
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00182552 0

COURS

DE

MÉTHODOLOGIE MATHÉMATIQUE

Tous les exemplaires sont revêtus de la signature de l'auteur.

Daugé

COURS

DE

MÉTHODOLOGIE
MATHÉMATIQUE

PAR

FÉLIX DAUGE

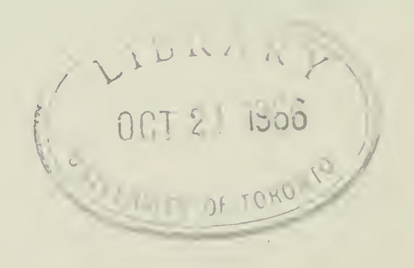
INGÉNIEUR EN CHEF HONORAIRE DES PONTS ET CHAUSSÉES
PROFESSEUR ORDINAIRE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GAND
INSPECTEUR DES ÉTUDES A L'ÉCOLE PRÉPARATOIRE DU GÉNIE CIVIL ET DES ARTS
ET MANUFACTURES ANNEXÉE A CETTE UNIVERSITÉ

DEUXIÈME ÉDITION
REVUE ET AUGMENTÉE

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

1896


LIBRARY
OCT 21 1966
UNIVERSITY OF TORONTO

AVERTISSEMENT.

Le livre que nous publions aujourd'hui est la deuxième édition d'un ouvrage qui a paru en 1883 sous ce titre : *Leçons de Méthodologie mathématique à l'usage des élèves de l'École normale des sciences annexée à l'Université de Gand*. L'École normale des sciences ayant été supprimée, le cours de Méthodologie mathématique a été porté au programme du doctorat en sciences physiques et mathématiques, ce qui explique le nouveau titre que nous avons adopté.

Le Cours actuel est destiné, comme l'était celui de l'ancienne École normale des sciences, aux jeunes gens qui aspirent à devenir professeurs dans un athénée ou un collège; il n'a donc pour objet que les matières de l'enseignement moyen et c'est à peine s'il s'élève au-dessus des Éléments. Nous avons cru cependant devoir comprendre dans la Géométrie analytique quelques théories qui ne font pas partie du programme des athénées. Peut-être trouvera-t-on qu'elles offrent bien des lacunes; mais les limites du Cours nous obligeaient à nous renfermer dans un cadre assez restreint et, d'autre part, la Géométrie projective et la Géométrie supérieure font l'objet, à la faculté des sciences de deux cours spéciaux. Nous n'avons

eu pour but que de donner la clef de certaines méthodes dont l'emploi est fréquent en Géométrie supérieure. Nous avons placé à la fin du volume des compléments d'Arithmétique et d'Algèbre conduisant à la solution du problème de l'inscription des polygones réguliers dans le cercle.

Nous avons tenu compte, dans cette seconde édition, des critiques peu nombreuses et très bienveillantes d'ailleurs, dont notre livre a été l'objet et nous y avons apporté quelques améliorations de détail. Certaines additions nous ont paru nécessaires, et nous signalerons ici celles qui concernent la Géométrie non euclidienne. Le chapitre relatif à la Géométrie analytique a été entièrement refondu et nous nous sommes assez longuement étendu sur les formules de transformation des coordonnées parce qu'il nous semble que dans la plupart des traités on n'accorde pas à cette théorie toute l'importance qu'elle mérite.

Nous adressons ici tous nos remercîments à notre cher collègue, M. le professeur Mister, qui a surveillé avec nous l'impression de notre livre et qui nous a donné maint bon conseil. M. Ghuys, professeur agrégé de l'enseignement moyen et docteur en sciences physiques et mathématiques a bien voulu prendre part également au travail ingrat de la correction des épreuves et nous lui adressons aussi nos sincères remercîments.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

Introduction.

CHAPITRE II.

Arithmétique.

CHAPITRE III.

Algèbre.

CHAPITRE IV.

Géométrie.

CHAPITRE V.

Analyse infinitésimale et principales méthodes qui peuvent y suppléer.

CHAPITRE VI.

Géométrie analytique.

CHAPITRE VII.

Compléments d'Arithmétique et d'Algèbre.



COURS

DE

MÉTHODOLOGIE MATHÉMATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

INTRODUCTION.

§ 1. Objet du Cours.

1. Ce cours a pour objet l'étude des diverses méthodes dont on peut faire usage dans l'enseignement des mathématiques, particulièrement des mathématiques élémentaires.

Après avoir donné quelques préceptes généraux sur le choix des méthodes et la pratique de l'enseignement, nous passerons en revue les principales parties des mathématiques élémentaires en nous attachant aux questions les plus difficiles et aux points sujets à controverse. Parmi ces questions il en est qui sont intimement liées à la méthode infinitésimale; nous aurons donc à nous occuper des principes fondamentaux de cette méthode, ainsi que de celles qui peuvent y suppléer. En ce qui concerne la géométrie analytique, après avoir traité d'une manière assez détaillée les premiers éléments pour bien faire ressortir le caractère de généralité des formules fondamentales, nous ferons un exposé sommaire de certaines théories et de certains principes employés dans la géométrie supérieure, notamment des principes de dualité et d'homographie qui conduisent à des méthodes très générales aussi bien pour démontrer des propositions connues que pour découvrir des propositions nouvelles.

Enfin, pour terminer, nous présenterons des compléments d'arithmétique et d'algèbre, relatifs à la théorie des nombres et à la résolution des équations binômes. Ils seront de nature à faire ressortir la liaison intime qui existe entre toutes les branches des mathématiques : ils montreront que la théorie des nombres a fait faire à l'algèbre et à la géométrie des progrès inattendus; et que de même la géométrie, par ses figures, permet de démontrer de nombreux théorèmes relatifs à la théorie des nombres.

§ 2. Préceptes généraux relatifs à la pratique de l'enseignement.

2. Dans l'étude des mathématiques on peut se proposer deux buts bien distincts : on peut avoir en vue d'y puiser des connaissances applicables aux besoins de la société et conduisant à un grand nombre de carrières; ou bien on peut y voir un moyen d'exercer l'esprit. Cette étude, bien dirigée, est peut-être la plus propre à développer la faculté du raisonnement. Celui qui s'est bien pénétré de la marche que l'on suit dans les sciences exactes, où nulle proposition n'est admise si elle n'est une conséquence d'autres propositions déjà reconnues vraies, apporte dans toutes les questions qu'il traite les mêmes procédés de recherche et de discussion, et ne se laisse convaincre que par des arguments solides.

La principale mission du professeur de mathématiques consiste donc à diriger les études des élèves de manière à fortifier leur jugement. Les moyens dont il doit user sont très divers et varient d'après l'âge et la tournure d'esprit de ceux qu'il est chargé d'instruire. Les préceptes généraux que l'on peut formuler à cet égard sont en petit nombre.

Ce n'est pas dans les livres que l'on peut apprendre à enseigner. Suivre avec beaucoup d'attention les leçons d'un ou de plusieurs bons professeurs; s'inspirer de leurs exemples au moment où l'on débute dans la pratique de l'enseignement; enfin chercher à se perfectionner sans cesse en apportant tous ses soins à la préparation de ses leçons, c'est, au début de la carrière professorale, le plus sûr moyen de réussir. Nous ne nous étendrons donc pas beaucoup sur la pratique de l'enseignement. Néanmoins il est certaines règles générales qu'il ne sera pas inutile d'indiquer.

3. On comprend tout d'abord la nécessité de ne présenter aux jeunes gens que des raisonnements rigoureux. Il faut se garder de sacrifier la rigueur à la brièveté dans le but d'augmenter le nombre des objets d'étude. Les principes fondamentaux surtout doivent être enseignés avec un soin particulier. Toutefois, s'il est bon de répandre sur ceux-ci autant de clarté que possible, il faut cependant éviter un écueil : c'est celui où l'on tomberait en insistant beaucoup sur des considérations trop abstraites, et en se laissant aller à des digressions qui pourraient être de nature à embrouiller les idées plutôt qu'à les élucider. Nous dirons avec Duhamel : « Il est des notions premières que l'on est en droit de supposer aux élèves. Elles serviront à leur donner d'autres connaissances; nous ne chercherons pas à les éclaircir elles-mêmes, parce que les explications n'ont pour but que de ramener ce que l'on ne connaît pas à ce que l'on connaît et qu'il faut par conséquent admettre *a priori* certaines notions, certaines idées, par leur simple énoncé, ou la simple dénomination par laquelle on les a désignées.

« Ainsi, par exemple, nous nous garderons bien d'expliquer ce qu'on entend par une vérité, ce que c'est que être ou exister, soit matériellement ou intellectuellement. Nous ne définirons ni le temps ni l'étendue, que l'esprit conçoit très bien dès qu'il a vu et touché et dès qu'il a reconnu une succession dans les événements, mais qui pourront devenir obscurs pour lui plus tard, si on cherche à les définir(*). »

Pour les mêmes motifs il ne faut pas que, dès le début, quelque proposition difficile à établir par le raisonnement, et cependant tenue par tous pour rigoureusement exacte, devienne l'objet d'une discussion propre à semer le doute dans l'esprit, et à dégoûter l'élève en épuisant ses efforts sur un travail sans résultat; mieux vaut admettre un postulatum présentant suffisamment par lui-même le caractère de l'évidence, que d'essayer d'en donner une démonstration fondée sur un raisonnement obscur, difficile à saisir. Car une démonstration n'a d'autre objet que de faire naître dans l'esprit le sentiment bien clair de la vérité, et, s'il s'agit d'une proposition que tout homme doué d'un jugement sain accepte sans difficulté, les preuves que l'on voudrait en donner ne la rendraient pas plus évidente, et la plupart des élèves se borneraient à les apprendre par cœur.

(*) DUHAMEL : *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement.*

Il peut aussi être avantageux de laisser de côté, dans un premier enseignement, certaines démonstrations, rigoureuses à la vérité, mais qui exigent pour être bien comprises une maturité d'esprit qui se rencontre rarement chez les commençants. Toutefois, il faut alors avoir soin de prévenir les élèves qu'on laisse provisoirement subsister une lacune qui sera comblée plus tard. S'ils ont la conviction qu'il s'agit d'une vérité indiscutable, dont la démonstration leur sera faite quand ils seront mieux à même de la comprendre, cette manière de procéder, qui ne nuit en rien à la rigueur des déductions, ne saurait avoir aucun inconvénient; et elle offre cet avantage de faire gagner du temps en réservant ces questions difficiles pour l'instant où elles seront le plus rapidement comprises et le mieux assimilées.

4. Si l'étude approfondie de la métaphysique des sciences n'est pas nécessaire pour de jeunes élèves, il n'en est pas ainsi du professeur. Celui-ci doit au contraire méditer tous les points difficiles, afin qu'après un examen attentif des arguments qui ont été produits, il puisse se faire une opinion motivée sur le mode d'exposition qu'il convient d'adopter. Il faut qu'il ait confiance en sa méthode pour que sa parole ait de l'autorité. Il doit donc examiner attentivement quelles sont les propositions que l'on peut admettre comme des axiomes, et quels sont les moyens de les ramener au plus petit nombre possible ; puis les énoncer purement et simplement comme des vérités qu'il n'est pas nécessaire de démontrer. Quant à la discussion par laquelle il aura formé sa conviction, elle n'est pas à la portée des commençants : il serait dangereux de vouloir la leur faire apprendre ; on s'exposerait à les habituer à se payer de mots, et à substituer la mémoire au jugement.

5. La mémoire est une faculté précieuse pour celui qui cultive les sciences exactes aussi bien que pour ceux qui se livrent à tout autre genre d'études. Toutefois, il ne faut pas qu'elle se développe aux dépens du raisonnement.

On peut distinguer la mémoire des choses et la mémoire des mots. La mémoire des choses est indispensable pour faire des progrès, quelle que soit la science qu'on étudie. En mathématiques notamment, toutes les propositions qu'on démontre s'appuient les unes sur les autres et il est impossible de comprendre un raisonnement si l'on ne se souvient pas des

propositions sur lesquelles il repose. Il pourra donc être utile de faire apprendre par cœur les énoncés de certains théorèmes, par exemple en géométrie. Cela présente, d'ailleurs, l'avantage d'habituer les commençants au langage mathématique et de les obliger à exprimer leurs idées avec précision et même avec élégance. Il n'est pas moins utile de présenter de nombreuses applications des propositions principales, afin que celles-ci restent pour toujours gravées dans la mémoire.

Quant à la mémoire des mots, elle est indispensable dans l'étude des langues, et peut même, comme on vient de le voir, être d'une certaine utilité en mathématiques pour apprendre aux commençants à énoncer les propositions d'une manière correcte, mais elle doit être proscrite d'une manière absolue dans les démonstrations. Le professeur doit s'assurer si les élèves ont bien compris celles qu'il leur a exposées. Il faut donc qu'il leur fasse fréquemment des questions qui lui permettent de vérifier s'ils ont bien saisi comment toutes les parties d'un raisonnement reposent les unes sur les autres, de telle façon qu'un anneau rompu dans cette chaîne ferait tomber tous les autres.

Dans le même but il doit parfois leur faire changer, soit les dispositions d'une figure, soit les notations d'un calcul ; ou encore leur faire exposer la marche d'une démonstration sans permettre d'écrire aucune formule. Ce dernier genre d'exercice est très utile ; il peut être difficile pour des commençants; mais il doit être regardé comme l'un de ceux qui sont les plus propres à faire saisir l'esprit des méthodes, discerner les cas où elles sont susceptibles d'application, et par conséquent à fournir des ressources précieuses lorsqu'il s'agit de diriger ses recherches vers des sujets nouveaux.

6. Quand l'élève interrogé se trouve arrêté dans un raisonnement, il ne faut pas se borner à lui en indiquer immédiatement la suite. Il faut au contraire tâcher de la lui faire retrouver par lui-même. Le plus souvent, lorsqu'il ne peut continuer une démonstration, c'est parce qu'il perd de vue, soit le point de départ, c'est-à-dire les hypothèses fondamentales d'où la proposition découle, soit le but qu'il doit atteindre, la propriété qui est à démontrer. On doit donc ramener son attention sur ces points extrêmes, et sur les liaisons qui peuvent s'établir entre eux. S'il commet une faute de raisonnement, il faut saisir cette occasion de bien lui faire voir en quoi il se trompe. Une erreur bien redressée lui

sera souvent plus profitable que l'étude de plusieurs propositions bien démontrées.

7. Une des principales qualités du professeur est l'esprit d'ordre. D'abord, en ce qui concerne la clarté de ses démonstrations, elle dépend avant tout de l'ordre qu'il y met. Le raisonnement est facile à saisir quand ses parties se succèdent de façon qu'elles découlent logiquement les unes des autres. Il ne faut alors pour se le rappeler, qu'un léger effort de mémoire, tandis que celle-ci joue le principal rôle dès que l'on s'écarte de cet agencement naturel.

L'ordre dans le travail est indispensable non seulement pour la clarté, mais encore pour la rapidité. Il peut éviter des pertes de temps considérables. Aussi le professeur doit-il s'efforcer par tous les moyens de faire acquérir cette importante qualité à ses élèves; à cet effet il devra appeler leur attention sur une foule de détails que l'on a trop souvent le tort de négliger. Ainsi, en géométrie, il faut veiller à ce que les figures soient faites avec soin; dans les calculs algébriques, il ne faut jamais tolérer des formules mal écrites, soit sous le rapport du choix de notations, soit sous le rapport de la place qu'elles occupent sur le tableau; il ne faut pas permettre de faire les réductions en effaçant certains termes, mais bien en les barrant, ce qui rend possibles les vérifications; en un mot, il faut faire en sorte que toutes les écritures et les dessins parlent aux yeux en quelque sorte, afin qu'on en retrouve sans peine la signification.

Il importe que les élèves soient bien exercés au maniement des formules algébriques. Le professeur devra donc leur donner un grand nombre d'opérations à faire et les accoutumer à y mettre cet ordre, cette netteté dont il vient d'être question. Ce n'est qu'ainsi qu'ils pourront se retrouver dans leurs calculs lorsqu'il s'agira de les vérifier. C'est également à cette condition qu'ils pourront en effectuer de très longs, car ce n'est qu'à cette condition qu'en reprenant plus tard un travail interrompu, ils s'y retrouveront aisément sans devoir revenir sur ce qui est fait.

Le professeur doit régler d'avance la distribution du temps consacré aux leçons, de manière à l'utiliser aussi complètement que possible. Il ne faut pas qu'il parle trop longtemps de suite; car il ne pourrait maintenir l'attention de ses jeunes élèves; et s'il ne laisse pas à chaque

définition, à chaque énoncé, le temps de se fixer dans leur mémoire, il est à craindre que tout ne se confonde dans leur esprit. D'ailleurs le professeur doit faire les questions nécessaires pour s'assurer si les élèves ont bien compris ce qu'il leur a expliqué. Lacroix(*), qui s'est beaucoup occupé de l'enseignement des mathématiques, conseille de diviser les leçons en deux parties, dont la première soit la répétition de la leçon précédente par plusieurs élèves pris au hasard et interrogés successivement, et dont la seconde soit consacrée à l'exposition de matières nouvelles, cette dernière devant être faite par le professeur lui-même.

8. Le professeur doit s'efforcer d'inspirer aux élèves le goût de l'étude. Dans ce but, il doit éviter de leur imposer un travail qui soit au-dessus de leurs forces et essayer de faire disparaître autant que possible ce que les théories ont de trop aride, en présentant quelques applications intéressantes. Il faut surtout qu'il fasse en sorte d'acquérir sur ses jeunes auditeurs l'ascendant nécessaire pour qu'ils écoutent ses conseils et ses leçons.

La règle de conduite qu'il doit s'imposer avec eux est simple. Il doit autant que possible soutenir leur attention en ayant les yeux sur eux pendant ses explications ; sans se départir d'une juste sévérité, indispensable surtout dans les classes nombreuses, il faut qu'en tout temps il fasse preuve d'une grande bienveillance ; qu'il trouve quelques mots encourageants pour récompenser le travail ; qu'il évite de blesser l'amour-propre des élèves zélés, mais dont les efforts ne sont pas couronnés de succès ; qu'il n'ait recours aux punitions que dans les cas graves, et lorsqu'il a la certitude qu'elles sont méritées ; que, dans les autres cas, il se borne à des remontrances présentées en termes brefs et sévères, mais néanmoins toujours convenables. Il est à peine nécessaire d'ajouter que ses exemples exerceront la plus grande influence sur les enfants ou les jeunes gens confiés à ses soins ; s'il manque de tenue, s'il considère ses leçons comme une charge trop lourde et les donne avec ennui, en les faisant aussi courtes que possible, s'il n'a pas le sentiment de ses devoirs, comment pourrait-il commander le respect et se faire écouter ? Au contraire, s'il a lui-même l'amour du travail, s'il remplit

(*) *Essais sur l'enseignement général, et sur celui des mathématiques en particulier*, par S. F. Lacroix.

ses fonctions avec zèle, s'il est animé d'un vif désir de voir progresser ses élèves, enfin s'il met à leur service toute son intelligence et tout son cœur, il gagnera leur affection, et ils craindront un mot de reproche tombant de sa bouche bien plus que des pensums et des arrêts.

9. Il est nécessaire, dans l'enseignement moyen, d'avoir pour les leçons un texte imprimé. Les élèves très jeunes ne sont pas en état de rédiger des cahiers convenables; d'autre part, le professeur, s'il dictait, perdrait un temps précieux; ces dictées ne seraient admissibles que s'il n'existait pas d'ouvrages imprimés s'accordant avec le cadre du cours; or, quand il s'agit des mathématiques élémentaires, on a le choix entre plusieurs bons auteurs. Le professeur doit se borner à expliquer le texte de celui qu'il adopte; à développer les points qui l'exigent, à faire sur les démonstrations quelques remarques ou rapprochements utiles. Ces remarques présentées de vive voix, peuvent faire l'objet de devoirs rédigés à domicile. Les cahiers ne doivent contenir que des devoirs de ce genre, ou des applications et des problèmes.

Les qualités essentielles que le professeur doit rechercher dans l'ouvrage qu'il met entre les mains de ses élèves, sont la rigueur, la clarté des démonstrations et la simplicité des méthodes.

Qu'entend-on par *méthodes?* quelles sont celles qu'il faut préférer? C'est ce que nous allons examiner en nous plaçant d'abord à un point de vue très général.

§ 3. De la méthode en général. — Analyse et synthèse (*).

10. Les méthodes sont les marches générales suivies par l'esprit humain pour parvenir à la connaissance de vérités nouvelles, en partant de certaines autres vérités déjà connues; de telle façon que les vérités ainsi aperçues se présentent à nous avec le même caractère d'évidence que celles qui ont servi de point de départ. On ne peut tracer une marche sure pour résoudre toute espèce de questions; mais certaines méthodes offrent un grand caractère de généralité qui n'appartient pas à d'autres; ce sont celles qui méritent la préférence dans l'enseignement.

(*) Dans ce paragraphe des guillemets indiquent certains passages extraits de l'ouvrage de DUHAMEL intitulé : *Des méthodes dans les sciences de raisonnement.*

11. « Les vérités nécessaires existent par elles-mêmes; le raisonnement et la méthode ne sont que des moyens que l'homme emploie pour les découvrir ou les reconnaître, et ne doivent par conséquent être envisagés que par rapport à l'esprit humain : leur unique objet est de produire en lui la connaissance et la certitude.

« L'état de certitude est produit dans l'homme par le sentiment clair de la vérité, ou en d'autres termes, par l'évidence. Descartes admet que lorsqu'on l'éprouve, c'est bien la vérité que l'on aperçoit, parce que, dit-il, Dieu ne peut avoir voulu nous tromper. Il n'est cependant personne qui n'ait cru quelquefois avoir l'évidence, et n'ait reconnu plus tard qu'il s'était trompé. Ce sentiment n'est donc pas infaillible, et l'on ne doit s'y fier qu'avec une extrême réserve.

« Il est des vérités dont l'évidence frappe immédiatement tous les esprits, et qu'on doit admettre comme points de départ : les méthodes ont pour objet de faire servir ces vérités à en découvrir d'autres qui produisent dans les hommes le même sentiment d'évidence, et qu'ils admettent alors avec la même certitude que les premières. Des êtres supérieurs à l'homme pourraient n'avoir pas besoin de ces détours, et apercevoir immédiatement toutes les vérités avec la même évidence; nos méthodes ne leur seraient pas nécessaires : elles ne sont faites, nous le répétons, que pour suppléer à la faiblesse de l'esprit humain.

12. « L'expression d'une vérité quelconque sera désignée généralement sous le nom de *proposition*.

« Une vérité dans la conception de laquelle entre la considération d'une certaine chose, s'appelle une *propriété* de cette chose.

« Une vérité dans la conception de laquelle entre la considération de plusieurs choses, est ce qu'on appelle un *rapport* entre ces choses.

« Les rapports nécessaires, qui dérivent de la nature des choses, sont ce qu'on appelle les *lois* de ces choses.

13. « *Ce que c'est qu'une définition.* — Les choses nouvelles dont on voudra introduire la notion, en les rattachant aux premières sur lesquelles tous les hommes sont d'accord, devront être déterminées au moyen des rapports qu'elles ont avec celles qui sont connues. Il ne faudra pas que tous les rapports possibles soient exprimés : on devra se borner à ceux qui sont nécessaires et suffisants pour que l'existence de la chose soit complètement et distinctement assurée; car toute autre condi-

tion ajoutée serait une conséquence des premières ou incompatible avec elles. C'est en l'entendant ainsi que nous dirons que *la définition d'une chose est l'expression de ses rapports avec des choses connues.*

« Et, par conséquent, toutes les choses ne peuvent être définies, puisqu'il faut pour cela en connaître déjà d'autres. On ne peut, comme nous l'avons dit, que ramener de proche en proche, à celles qu'on admet par le sentiment de l'évidence.

14. « *Déduction, raisonnement.* — Lorsque plusieurs rapports dont l'existence est certaine, entraînent avec évidence celle d'un nouveau rapport, on dit que ce dernier est une *conséquence* des autres ; et cette opération de l'esprit, par laquelle on arrive à la connaissance d'un rapport, d'après d'autres rapports admis, se nomme *une déduction*, ou *un raisonnement.*

« Ainsi, *raisonner*, ou *déduire*, c'est parvenir, au moyen de rapports connus, à des rapports qu'on ne connaissait pas. Cette déduction se fait par le sentiment de l'évidence, qui n'a besoin d'aucune règle, et ne peut être suppléé par aucune.

« Toutefois, les hommes étant sujets à l'erreur, il pourra arriver qu'une proposition, qu'on aura regardée comme conséquence de certaines autres, ne le soit cependant pas. Dans ce cas, on aura fait ce qu'on appelle un *faux raisonnement*, soit que la proposition déduite soit fausse par elle-même, soit qu'étant vraie, elle ne soit pas une conséquence nécessaire des premières.

« Les erreurs les plus dangereuses sont celles qui consistent dans une trop grande extension que l'on donne à des vérités reconnues dans un grand nombre de cas, auxquelles on ne connaît encore aucune exception, qui séduisent par la facilité qu'elles donnent aux démonstrations et aux recherches, et qui sont quelquefois assez spécieuses pour finir par être érigées *a priori* en principe, et servir même à l'établissement des cas particuliers qui en avaient donné l'idée. Une fausse déduction serait découverte immédiatement ; un principe faux par trop de généralité a une sorte d'inviolabilité qu'il tire du grand nombre de cas où il est vrai, et de la confiance qu'on voit qu'il inspire à ceux qui l'enseignent (*).

(*) Des erreurs d'un autre genre, non moins dangereuses que celles que signale Duhamel, résultent d'une énumération incomplète des divers cas qu'une propo-

15. « *Réduction.* — Nous avons appelé déduction l'opération de l'esprit qui consiste à parvenir, au moyen de rapports connus, à des rapports qu'on ne connaissait pas. Or, on peut se proposer la question inverse, et chercher de quels rapports on pourrait déduire un rapport désigné, c'est-à-dire à quels rapports on pourrait ramener la connaissance du rapport désigné. Cette opération est, comme nous le verrons bientôt, d'une grande importance. Nous la désignerons sous le nom de *réduction.*

« La solution de cette question est généralement indéterminée parce qu'une même proposition peut être la conséquence de données très diverses ; l'art consiste à choisir les plus convenables à l'objet que l'on a en vue.

16. « *Des propositions réciproques.* — Lorsque deux propositions sont telles que chacune d'elles se déduit de l'autre comme conséquence nécessaire, nous disons qu'elles sont *réciproques.* Il n'arrive pas toujours qu'une proposition qui est déduite d'une autre, l'entraîne réciproquement; et nous verrons plus tard combien il est important de constater cette réciprocité, lorsqu'elle a lieu : pour le moment nous nous bornons à la définir.

17. « *Des propositions incompatibles.* — On appelle ainsi des propositions qui ne peuvent être vraies en même temps. Ainsi, par exemple, une proposition qui dirait qu'une chose est plus grande qu'une certaine autre, serait incompatible avec celle qui dirait qu'elle est plus petite ; parce qu'elles ne peuvent être vraies ensemble, mais elles pourraient être fausses toutes les deux, et c'est ce qui aurait lieu si les deux choses étaient égales.

« Mais si les deux propositions sont précisément la négation l'une de l'autre, ce qu'on appelle *contradictoires,* si l'une est vraie, l'autre, qui la nie, sera fausse, et réciproquement.

« La proposition contradictoire d'une autre peut renfermer un plus ou moins grand nombre de cas différents ; et si l'on en omettait quelques-uns, on n'aurait plus qu'une proposition incompatible avec la première, mais

---

sition renferme. Elles sont d'ailleurs plus ou moins connexes aux précédentes; car l'oubli de certains cas particuliers peut conduire à donner à un énoncé un degré de généralité que la proposition ne comporte pas.

non la contradictoire; on ne pourrait plus affirmer que, si l'une des deux est fausse, l'autre sera vraie; ainsi, en reprenant l'exemple choisi précédemment d'une proposition qui dit qu'une première chose est plus grande qu'une seconde, la contradictoire dirait que la première chose n'est pas plus grande que la seconde, ce qui comporterait deux cas, celui où elle serait plus petite et celui où elle serait égale. Si l'on réduisait la seconde proposition à dire que la première chose est plus petite que la seconde, on aurait comme ci-dessus deux propositions incompatibles, mais non contradictoires. Elles ne pourraient être vraies toutes les deux, mais elles pourraient toutes les deux être fausses; et, par conséquent, on ne pourrait conclure, comme dans le cas de propositions contradictoires, que si l'on reconnaît la fausseté de l'une, on aura prouvé la vérité de l'autre.

18. « *Du faux on peut quelquefois déduire le vrai.* — Nous avons dit que la considération simultanée de plusieurs rapports reconnus vrais, ou en d'autres termes, de plusieurs propositions vraies, pouvait conduire à admettre comme évidente la vérité d'un nouveau rapport, et c'est ce que nous avons appelé déduire, ou raisonner. Mais *il n'est pas impossible d'arriver par une déduction exacte à une proposition vraie, en partant de rapports faux.*

« Cette remarque importante n'avait pas échappé à la sagacité d'Aristote. Dans le livre II de ses *Premiers analytiques* il dit : *On peut tirer le vrai de propositions fausses, ces propositions étant toutes deux fausses, ou l'une des deux seulement.* Et il le prouve par divers exemples. Nous croyons ne pouvoir nous dispenser d'en citer textuellement quelques-uns, quelque bizarre qu'en soit la forme.

« En voici un d'abord où les deux prémisses sont fausses, et la conclusion vraie :

Tout homme est pierre,
Toute pierre est animal;
Donc tout homme est animal.

« En voici un autre dans le même cas :

Toute pierre est animal,
Aucun cheval n'est animal;
Donc aucun cheval n'est pierre.

« Enfin en voici un troisième, où l'une seulement des deux prémisses est fausse, et la conclusion vraie :

Tout cheval est animal,
Aucun homme n'est animal;
Donc aucun homme n'est cheval.

« Aristote conclut naturellement de là que la vérité absolue d'une proposition bien déduite, ne prouve pas la vérité des prémisses.

« Nous pouvons donc regarder comme établies les deux propositions suivantes :

« 1° Si, en partant de certains rapports admis, on parvient par des raisonnements justes à des rapports vrais, on ne peut pas en conclure que les premiers le soient. Car il n'est pas impossible de déduire des rapports vrais de rapports faux.

« 2° Si, en partant de certains rapports, on parvient par des raisonnements justes à un rapport faux, les premiers ne sont pas tous vrais. Car s'ils l'étaient, on n'aurait pu en déduire que des rapports vrais ».

19. *Analyse et synthèse.* — Toutes les méthodes qu'on emploie pour démontrer les théorèmes et résoudre les problèmes, peuvent se ramener à deux grandes classes, auxquelles les géomètres anciens ont donné les noms d'*analyse* et de *synthèse*. *Analyse* signifie décomposition ou résolution; *synthèse,* au contraire, signifie composition. Il semble donc qu'il doive être facile de distinguer quand une question est résolue par l'une ou l'autre de ces deux méthodes; et cependant les auteurs ne sont pas d'accord sur leurs définitions ; ou du moins, le mot *analyse* se prend dans deux acceptions différentes :

Voici d'abord les définitions d'Euclide : (*)

Dans l'analyse, on prend comme accordé ce qui est demandé, parce qu'on arrive de là à quelque vérité qui est accordée.

Dans la synthèse, on prend ce qui est accordé, parce qu'on arrive de là à la conclusion, ou à l'intelligence de ce qui est demandé.

Il résulte de cette définition même, que l'analyse, ainsi entendue, est impuissante comme moyen de démonstration, puisque la vérité d'une

---

(*) *Les Œuvres d'Euclide,* en latin, en grec et en français, par F. PEYRARD, 13me livre des Éléments.

proposition bien déduite ne suffit pas pour prouver l'exactitude de celles d'où l'on est parti.

20. Afin d'éclaircir ce qui précède par un exemple, nous rapportons ci-dessous les deux démonstrations données par Euclide de la première proposition du treizième livre de ses Éléments; pour plus de clarté et de simplicité nous avons modifié quelque peu le texte de la traduction, mais sans changer le raisonnement.

Théorème. — Que la droite AB soit coupée en moyenne et extrême raison au point C (fig. 1). Soit AC le plus grand segment et prenons $AD = \frac{AB}{2}$, je dis que $\overline{CD}^2 = 5\overline{AD}^2$.

1° *Analyse.* — Car si $\overline{CD}^2 = 5\overline{AD}^2$, on a, à cause de $CD = AC + AD$:

Fig. 1.

D A C B

$$\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 + 2AC.AD = 5\overline{AD}^2, \quad \text{ou} \quad \overline{AC}^2 + 2AC.AD = 4\overline{AD}^2;$$

mais, par hypothèse,

$$\overline{AC}^2 = AB.CB = 2AD.CB;$$

donc,

$$2AD.CB + 2AD.AC = 4\overline{AD}^2, \quad \text{ou} \quad 2AD(BC + AC) = 4\overline{AD}^2;$$

mais cela est puisque

$$BC + AC = 2AD.$$

2° *Synthèse.* — On a, à cause de $CD = AC + AD$ et de $\overline{AC}^2 = AB.BC$;

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 + 2AC.AD = AB.BC + \overline{AD}^2 + 2AC.AD;$$

mais

$$2AC.AD = AC.AB;$$

donc

$$AB.BC + \overline{AD}^2 + 2AC.AD = AB.BC + \overline{AD}^2 + AB.AC;$$

on a, par conséquent,

$$\overline{CD}^2 = AB(BC + AC) + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 4\overline{AD}^2 + \overline{AD}^2 = 5\overline{AD}^2.$$

Si l'on compare ces deux démonstrations, on voit que la seconde est complète, sans qu'il soit besoin d'y rien ajouter, sans qu'il y ait rien de sous-entendu; mais qu'il n'en est pas de même de la première. Celle-ci montre bien que la proposition admise entraîne comme conséquence une

vérité connue ; mais cela ne suffit pas pour prouver qu'elle est vraie, puisque du faux on peut aussi parfois déduire le vrai. Il est donc au moins nécessaire de s'assurer que, si la proposition énoncée était fausse, il serait impossible d'arriver à la conséquence vraie que l'on en a tirée. Or, cela est aisé dans l'exemple précédent, parce qu'en revenant sur les diverses relations qui ont été successivement établies, on reconnaît que si l'on avait $\overline{CD}^2 \lesseqgtr 5\overline{AD}^2$, on aurait aussi $BC + AC \gtreqless 2AD$.

21. Une démonstration analytique est complète quand elle mène à une conséquence absurde qui fait rejeter l'hypothèse admise ; car, en raisonnant juste, si l'on part d'une proposition vraie, on ne saurait trouver une conclusion absurde. Quand l'analyse conduit, au contraire, à quelque vérité connue, il faut, pour pouvoir en conclure l'exactitude de la proposition énoncée, s'assurer que cette conséquence vraie ne saurait subsister dans le cas où le point de départ serait faux. Si l'on ne prenait pas cette précaution, la démonstration pourrait être fautive. C'est ce qui pourrait arriver si l'on partait d'une proposition inexacte dont la réciproque serait vraie. On le verra par les exemples ci-dessous.

Premier exemple. — Supposons que l'on veuille démontrer la proposition suivante : Si deux triangles ABC, A'B'C' ont les côtés AB et BC respectivement égaux à A'B' et B'C' et si de plus leurs surfaces sont égales, les angles ABC et A'B'C' sont égaux.

Veut-on procéder par l'analyse, on dira :

Admettons que l'angle ABC soit égal à A'B'C'; les deux triangles auront donc un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; ils seront donc superposables; donc leurs surfaces seront égales. Mais cela est; par conséquent, la proposition est démontrée.

Cependant celle-ci est fausse, puisque les angles ABC, A'B'C', au lieu d'être égaux, pourraient aussi être supplémentaires.

Deuxième exemple. — Soit à démontrer que si l'on a $a^2x^2 = b^2$ on aura également $x = \frac{b}{a}$.

D'après la méthode analytique, on raisonnerait de la manière suivante :

Supposons, qu'en effet, on ait $x = \frac{b}{a}$; il en résultera $x^2 = \frac{b^2}{a^2}$ et $a^2x^2 = b^2$; or cela est.

La proposition est cependant fausse, puisque, si $a^2x^2 = b^2$, on peut avoir $x = -\frac{b}{a}$ aussi bien que $x = \frac{b}{a}$.

22. Certains géomètres anciens avaient bien senti cette imperfection des démonstrations analytiques et combinaient les deux méthodes. C'est ce que prouve un passage de la préface du livre VII des *Collections mathématiques* de Pappus, dont on trouve la traduction suivante dans Lacroix (l. c.) :

« L'analyse est le chemin qui, partant de la chose demandée, que l'on accorde pour le moment, mène, par une suite de conséquences, à quelque chose de connu antérieurement, ou mis au nombre des principes reconnus pour vrais. Cette méthode nous fait donc remonter d'une vérité ou d'une proposition, à ses antécédents, et nous la nommons *analyse* ou *résolution*, comme qui dirait une solution en sens inverse. Dans la synthèse, au contraire, nous partons de la proposition qui se trouve la dernière de l'analyse ; ordonnant ensuite, d'après leur nature, les antécédents qui, plus haut, se présentaient comme des conséquents, et les combinant entre eux, nous arrivons au but cherché, d'où nous étions partis dans le premier cas.

« On distingue deux genres d'analyse : dans l'un, que l'on peut nommer *théorique*, on se propose de reconnaître la vérité ou la fausseté d'une proposition avancée ; l'autre se rapporte à la résolution des problèmes ou à la recherche des vérités inconnues. Dans le premier, en posant pour vrai ou pour déjà existant le sujet de la proposition avancée, nous marchons, par les conséquences de l'hypothèse, à quelque chose de connu, et si ce résultat est vrai, la proposition avancée est vraie aussi. *La démonstration directe se forme ensuite en reprenant, dans un ordre inverse, les diverses parties de l'analyse.* Si la conséquence à laquelle nous arrivons en dernier lieu se trouve fausse, nous en concluons que la proposition analysée l'est aussi. Lorsqu'il s'agit d'un problème, nous le supposons d'abord résolu, et nous poussons les conséquences qui en dérivent jusqu'à ce qu'elles nous mènent à quelque chose de connu. Si le dernier résultat peut s'obtenir, s'il est compris dans ce que les géomètres nomment *données*, la question proposée peut se résoudre ; la démonstration (ou plutôt la construction) se forme encore en prenant dans un ordre inverse les parties de l'analyse. L'impossibilité du dernier

résultat prouvera évidemment dans ce cas, comme dans le précédent, celle de la chose demandée.

« Il y a, en outre, dans la solution de chaque problème, ce qu'on appelle la *détermination*, c'est-à-dire la partie du raisonnement qui démontre quand, comment et de combien de manières le problème peut être résolu. »

Dans ce passage Pappus a eu tort de dire : si nous arrivons à quelque chose de vrai la proposition le sera aussi ; mais la démonstration en sens inverse qu'il exige, empêchera dans tous les cas de faire erreur. Et de même, la discussion qu'il exige dans le cas de l'analyse problématique fera découvrir les solutions omises, et rejeter les solutions étrangères.

Duhamel, dans l'ouvrage cité, a très bien fait voir comment doit être employée l'analyse pour qu'elle se suffise à elle-même, et n'ait pas besoin d'être suivie de la démonstration synthétique. Rappelons ce qu'il dit à ce sujet.

23. « *Méthode analytique pour la démonstration des théorèmes.* — Lorsque l'on aura à trouver la démonstration d'une proposition énoncée, on cherchera d'abord si elle peut se déduire comme conséquence nécessaire des propositions admises, auquel cas elle devra être admise elle-même, et sera par conséquent démontrée. Si l'on n'aperçoit pas de quelles propositions connues elle pourrait être déduite, on cherchera de quelle proposition non admise elle pourrait l'être, et alors la question sera ramenée à démontrer la vérité de cette dernière. Si celle-ci peut se déduire de propositions admises, elle sera reconnue vraie, et par suite la proposée ; sinon, on cherchera de quelle proposition non encore admise elle pourrait être déduite, et la question sera ramenée à démontrer la vérité de cette dernière. On continuera ainsi jusqu'à ce que l'on arrive à une proposition reconnue vraie, et alors la vérité de la proposée sera démontrée.

« On voit donc que cette méthode, qu'on appelle *analyse*, consiste à établir une chaîne de propositions commençant à celle qu'on veut démontrer, finissant à une proposition connue ; et telles qu'en partant de la première chacune soit une conséquence nécessaire de celle qui la suit ; d'où il résulte que la première est une conséquence de la dernière, et par conséquent vraie comme elle.

« L'analyse n'est donc autre chose qu'une méthode de *réduction*.

« Mais parmi les diverses propositions dont la première pourrait se déduire, laquelle faut-il choisir? Même question pour chacune de celles qui composent cette chaîne. On ne peut rien dire de précis à cet égard : la suite des propositions peut être prolongée indéfiniment sans qu'on parvienne à une proposition connue, comme il est possible aussi qu'on y parvienne promptement : cela dépend de la sagacité et de l'étendue des connaissances de celui qui cherche la démonstration. Et s'il a réussi à la découvrir, il pourra la communiquer aux autres en leur indiquant la série de propositions qui l'y ont fait parvenir.

« *Cas où la dépendance des propositions successives peut être renversée.* — Si deux des propositions successives dont nous venons de parler étaient réciproques, on pourrait considérer la seconde comme déduite de la première, au lieu de la considérer comme ayant la première pour conséquence. Et si cette réciprocité a lieu depuis la première jusqu'à la dernière, on peut dire que la méthode analytique consiste à établir une suite de propositions dont la première soit celle qui est à démontrer, et telles que la seconde se déduise de la première, la troisième de la seconde et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on parvienne à une proposition reconnue vraie.

« Et l'on voit même que la réciprocité n'est nécessaire que pour les propositions consécutives où la déduction a été renversée; elle ne l'est nullement pour celles où l'ordre de déduction est celui que nous avons prescrit en exposant la méthode analytique. Sous ces conditions, le second procédé n'est autre que le premier.

« *Remarque.* — Il est souvent plus commode de déduire une conséquence d'une proposition que d'en trouver une autre dont celle-ci soit la conséquence. Dans ce cas on pourra employer la seconde manière de procéder pour toutes les propositions successives, ou pour quelques-unes seulement, en ayant soin de s'assurer de la réciprocité; car si elle n'avait pas lieu, ne fût-ce que pour deux consécutives seulement, la seconde de ces deux pourrait être vraie sans que la première le fût, puisque le vrai peut quelquefois se déduire du faux. »

Il est aisé de constater cette réciprocité dans les propositions successives de la démonstration analytique d'Euclide, présentée N° 20.

Au contraire dans le premier exemple du N° 21, on admet l'égalité des angles ABC, A'B'C' et on en conclut celle des surfaces; mais de l'égalité des surfaces on ne peut conclure réciproquement celle des angles.

De même dans le second exemple, on peut conclure l'égalité $a^2x^2 = b^2$ de $x = \frac{b}{a}$, mais il n'y a pas réciprocité, et de $a^2x^2 = b^2$ on ne peut conclure $x = \frac{b}{a}$.

24. *Méthode analytique pour la résolution des problèmes.* — L'objet d'un problème est de déterminer une ou plusieurs choses satisfaisant à des conditions données. Or on aura évidemment des choses de l'espèce voulue qui y satisferont, si on en trouve de cette espèce assujetties à de nouvelles conditions qui entraînent les premières comme conséquences. Si ce nouveau problème est plus facile à résoudre que le premier, la question sera avancée ; et l'on pourra même ne pas s'assujettir à prendre pour objet de la recherche, des choses de l'espèce demandée ; il suffira que la connaissance des nouvelles choses entraîne immédiatement celle des proposées.

« Si le second problème ne peut être immédiatement résolu, on cherchera de la même manière à le ramener à un troisième, dont toutes les solutions en fourniront du second, comme celles du second en fournissaient du premier.

« Si on ne peut résoudre immédiatement ce troisième, on cherchera semblablement à le ramener à un quatrième, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on parvienne à un problème que l'on sache résoudre. Alors chacune de ses solutions en fera connaître du précédent ; chacune de celles-ci en fera connaître du problème qui précède, et en remontant ainsi jusqu'au premier, on voit que chaque solution du dernier problème en fournit une du proposé.

« Cette méthode s'appelle encore *analyse*, parce qu'elle ramène le problème proposé à une suite d'autres, jusqu'à ce que l'on en trouve un que l'on sache résoudre.

« Les problèmes que l'on substitue successivement les uns aux autres ne sont pas déterminés d'une manière absolue ; le choix peut en être fait avec plus ou moins de discernement, et quelquefois, au lieu de se rapprocher de la solution du problème on pourra s'en trouver plus éloigné. Aussi nos méthodes ne sont présentées que comme moyens de chercher, et non de trouver sûrement.

25. « *Que les rapports substitués doivent être réciproques pour que la solution soit parfaite.* — Les rapports substitués, comme nous l'avons

dit, à ceux qui étaient imposés aux choses demandées, peuvent ne pas leur être réciproques, c'est-à-dire que des choses de l'espèce désignée qui satisferaient aux conditions imposées, pourraient ne pas satisfaire aux nouvelles, qui ont seulement été choisies telles, que les choses qui y satisfont, satisfont aussi aux proposées. Dans ce cas, toute solution du problème substitué au proposé, serait bien une solution de celui-ci; mais quelques solutions de celui-ci pourraient ne pas être des solutions du nouveau problème, et par conséquent, en résolvant ce dernier, on pourrait n'avoir pas résolu complètement le proposé; il pourrait y avoir des solutions du premier qui ne le seraient pas du second et *ces solutions seraient perdues si l'on se bornait à déterminer celles du second.* Mais si au contraire les conditions du second problèmes et celles du premier sont réciproques, tout ce qui satisfera à celles du premier, satisfera à celles du second, et par conséquent si on trouve toutes les solutions du second, on ne perdra aucune de celles qu'on demande, et d'ailleurs on n'en aura aucune qui ne satisfasse à la question proposée. On raisonnerait de même pour les autres problème intermédiaires, et par conséquent on peut énoncer cette proposition générale :

« *Si dans les problèmes que l'on substitue les uns aux autres en partant du proposé, les conditions de deux consécutifs quelconques sont réciproques, les solutions du premier sont identiques avec celles du dernier, et de l'un quelconque des autres.*

26. « *Cas où les rapports substitués seraient simplement des conséquences des proposés.* — Nous avons commencé par ramener le problème à un autre dont les conditions entraînaient celles du premier, et nous avons montré ensuite que toutes les solutions du nouveau étaient certainement des solutions du premier, mais qu'elles pouvaient ne pas les renfermer toutes. Voyons maintenant ce qui arriverait si la dépendance entre les conditions des deux problèmes était inverse, en admettant toujours que la réciprocité n'ait pas lieu. Supposons donc un nouveau problème dont les conditions soient simplement des conséquences de celles du premier; il suivra de là que toute solution du premier sera solution du second, puisque tout ce qui satisfera aux conditions du premier satisfera nécessairement à celles du second. Mais toutes les solutions du second ne le sont pas nécessairement du premier, puisque d'après l'hypothèse, il serait possible qu'on satisfît aux conditions du second, sans satisfaire à celles du premier. On peut donc énoncer cette proposition générale:

« *Si, dans les problèmes substitués les uns aux autres en partant du proposé, les conditions de l'un quelconque sont des conséquences de celles du précédent, les solutions de l'un quelconque d'entre eux renferment toutes celles du proposé et peuvent en outre en renfermer d'étrangères.*

« En résumé :

1° « Si, dans les problèmes auxquels on ramène successivement le proposé, les conditions relatives à deux consécutifs quelconques sont réciproques, les solutions du proposé et de l'un quelconque des autres sont complètement identiques.

2° « Si les conditions relatives à l'un quelconque de ces problèmes sont simplement des conséquences de celles du suivant, toutes les solutions de l'un quelconque sont des solutions du proposé, mais peuvent ne pas les renfermer toutes.

3° « Si les conditions relatives à l'un quelconque de ces problèmes sont simplement des conséquences de celles du précédent, les solutions de l'un quelconque renferment toutes celles du proposé, et peuvent en renfermer d'étrangères.

« Si ces diverses circonstances avaient lieu successivement dans la série des problèmes qu'on ramène les uns aux autres, il n'y aurait aucune difficulté à appliquer successivement les conséquences relatives à chaque cas. »

27. *Comparaison des deux méthodes.* — Duhamel établit comme il suit une comparaison entre les deux méthodes:

« *S'agit-il d'abord de la démonstration d'un théorème*, l'on peut se proposer 1° de chercher cette démonstration, 2° de la communiquer aux autres lorsqu'on la connaît.

1° « Supposons d'abord le cas où l'on veut trouver la démonstration d'une proposition énoncée. La marche analytique consiste à la ramener à une autre dont elle soit la conséquence ; il y a bien là quelque incertitude, mais le point de départ est connu. Après ce premier pas on en fait un second semblable, en partant de la proposition qu'on vient d'obtenir; et on continue ainsi jusqu'à ce qu'on soit ramené à une proposition connue. On pourra sans doute n'y jamais parvenir; mais à chaque réduction qu'on tente on sait de quelle proposition on doit partir pour en chercher une dont elle se déduirait.

« Par la méthode synthétique au contraire on ne sait pas par où l'on

doit commencer, ni quelles conséquences tirer, à moins que l'on n'ait aperçu une certaine liaison entre des propositions admises et celles qu'on veut démontrer, auquel cas on aurait plus ou moins complètement suivi la marche analytique.

2° « S'il s'agissait seulement de communiquer aux autres une démonstration qu'on connnaît, l'analyse leur offre toujours l'avantage d'un point de départ assuré qui est le théorème proposé ; et l'on saisit à peu près aussi facilement la réduction de chacun de ceux qu'on considère à celui dont il serait la conséquence, que les déductions successives que présente la synthèse. Il reste donc à cette dernière le grave inconvénient de ne pas donner la raison qui a fait choisir le point de départ, ainsi que chacune des conséquences successives; la mémoire y joue un grand rôle. Ce n'est pas à dire pour cela qu'on doive toujours préférer la marche analytique. Il est souvent plus simple de déduire que de ramener une proposition à une autre dont elle se déduise. L'art consiste à employer le mieux possible les deux méthodes sans s'attacher exclusivement à l'une ou à l'autre; et il ne faut pas perdre de vue, que n'ayant d'autre objet que d'aider l'esprit humain, elles doivent se plier un peu à ses faiblesses, et le rebuter le moins possible.

« *Lorsqu'il s'agit de la résolution d'un problème*, par la méthode analytique on ramène le problème proposé à un second, celui-ci à un troisième, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à un problème que l'on sache résoudre. La méthode synthétique, au contraire, consiste à partir de ce dernier, à déduire de sa solution celle de l'avant-dernier, et ainsi de suite jusqu'au proposé.

« Si l'on a pour but de communiquer aux autres la solution qu'on connaît d'un problème, on peut suivre cette marche; il y aura seulement cet inconvénient pour celui qui apprend, que, n'apercevant aucune liaison entre le point de départ et le but, il marche à l'aveugle jusqu'à ce qu'il l'ait atteint. La solution analytique, au contraire, est plus facile à suivre, parce que l'on voit la liaison qui existe entre la chose cherchée et celles auxquelles on la ramène successivement.

« Mais si, au lieu d'avoir à communiquer une solution connue, on se propose de découvrir la solution d'un problème, la méthode synthétique serait tout à fait dérisoire, puisque l'on ne saurait de quel problème connu il faudrait partir pour en déduire la solution du proposé. »

A ces remarques de Duhamel nous ajouterons seulement une obser-

vation : c'est que l'analyse appliquée à la démonstration des théorèmes de la géométrie, présente l'inconvénient de faire souvent paraître les explications plus longues et moins directes. Aussi a-t-on généralement adopté la forme synthétique dans les ouvrages sur la géométrie élémentaire.

28. On emploie parfois le mot analyse dans un sens très différent de celui qui vient d'être indiqué. En effet, on désigne sous ce nom la méthode dans laquelle on applique le calcul algébrique. Certains auteurs, à tort selon nous, ne veulent même pas admettre que l'analyse et la synthèse, définies comme l'ont fait les anciens, constituent des méthodes essentiellement différentes. C'est notamment l'opinion émise par Carnot(*). Les motifs qu'il allègue sont les suivants :

De quelque manière qu'on établisse les preuves d'une proposition, soit qu'on s'élève des vérités connues à la conclusion finale, soit qu'on admette celle-ci pour vérifier si elle s'accorde avec les vérités connues, on passe par les mêmes raisonnements, mais dans un ordre inverse; selon Carnot, ce changement d'ordre ne peut constituer un changement de méthode.

Ce qui constitue la différenee essentielle entre la synthèse et l'analyse c'est, dit-il, que dans la première l'esprit ne peut jamais perdre de vue la signification des opérations successives qui conduisent au résultat final ; on doit arriver à celui-ci par une chaîne non interrompue de raisonnements qui se présentent clairement à l'intelligence avec un sens concret ; tandis que l'analyse, au contraire, mène au résultat par un chemin rapide qui lui est propre en formant sur sa route une autre chaîne, non d'objets réels comme la précédente, mais de hiéroglyphes qui le plus souvent ne désignent que des êtres de raison ; telles sont les quantités négatives ou imaginaires. Une fois qu'elle a saisi la vérité cherchée, qu'elle l'a montrée à la synthèse, la fonction de celle-ci est d'établir la chaîne d'objets réels. La grande difficulté est levée ; on sait où il faut arriver, le point de départ est connu, il ne s'agit que de tracer la route la plus courte et la plus commode pour remplir l'intervalle.

Mais cette route une fois établie n'est ni moins sûre ni moins

---

(*) *Géométrie de Position*, par L. N. M. Carnot.

lumineuse, soit qu'on la parcoure dans un sens, soit qu'on la parcoure dans l'autre; c'est toujours de la synthèse, comme la route hiéroglyphique dont nous avons parlé demeure toujours analyse, tant que les objets désignés par ces symboles ne sont point devenus réels et appréhensibles par l'esprit. Dès qu'ils le deviennent, les hiéroglyphes ne sont plus qu'une écriture abrégée qui ne conserve aucun caractère essentiellement différent de la synthèse : l'une devient l'autre par une simple traduction.

Ce ne sont pas, on le voit, les signes algébriques qui caractérisent ce genre d'analyse, mais c'est la manière dont on les emploie ; il est certain qu'on peut faire un grand usage des signes sans sortir de la synthèse; mais alors ce sont de simples abréviations, tandis que dans l'analyse les règles du calcul algébrique remplacent pour ainsi dire le raisonnement par un pur mécanisme. Ce n'est donc que quand on applique ce mécanisme qu'on commence à faire de l'analyse. Carnot va plus loin et, selon lui, l'analyse ne commence que là où l'on fait usage de quantités négatives isolées ou de quantités imaginaires. C'est, dit-il, l'emploi de ces formes algébriques qui constitue véritablement la méthode analytique; c'est entre les symboles qui peignent des objets réels et ceux qui n'expriment que des êtres de raison, qu'est le passage de la synthèse à l'analyse, la ligne de démarcation qui existe entre elles.

En cela nous ne pouvons adopter la manière de voir de Carnot; il nous semble peu rationnel de ne pas considérer comme analyse la méthode où l'on fait usage du mécanisme de l'algèbre, dans les cas où celui-ci n'introduit pas de quantités négatives isolées dans le calcul. Ce serait en quelque sorte faire dépendre du hasard le classement de ces cas dans la synthèse plutôt que dans l'analyse. Il est clair, en effet, qu'il suffirait qu'on eût interverti les deux membres d'une équation, pour qu'ils fussent affectés du signe — au lieu du signe +, et que ce simple changement nous forcerait de considérer comme analytique une démonstration qui, autrement, eût été regardée comme synthétique. Que le calcul introduise ou n'introduise pas de quantités négatives isolées, cela n'a donc réellement aucune importance au point de vue de la méthode. Ce qui caractérise l'analyse algébrique, c'est qu'il n'est pas nécessaire de s'assurer qu'il ne se rencontre pas de symboles de ce genre dans les formules.

Nous aurons bientôt à étudier les procédés de l'analyse algébrique. Ajoutons seulement que, comme elle permet de remplacer, pour ainsi dire, le raisonnement par des procédés mécaniques, dont il suffit d'interpréter ensuite les résultats d'une manière convenable, on s'explique la grande puissance de cette méthode comme moyen de recherche.

En résumé, Carnot a tort, selon nous, de ne pas admettre la distinction faite par les anciens entre l'analyse et la synthèse ; car l'analyse peut être envisagée à deux points de vue. Si on la définit comme les anciens, elle n'est qu'une forme particulière du raisonnement ; c'est, comme l'a montré Duhamel, une méthode de réduction. Mais les géomètres modernes entendent aussi par analyse la méthode qui consiste à appliquer les règles du calcul algébrique.

De quelque manière qu'on l'envisage, l'analyse est d'ailleurs la méthode d'invention. Elle doit être appliquée de préférence quand on cherche la démonstration d'un théorème ou la solution d'un problème. Mais quand il s'agit d'enseigner une démonstration ou une solution connue, on peut choisir l'une ou l'autre méthode, selon qu'elle paraîtra de nature à faire plus facilement comprendre la question.

CHAPITRE II.

ARITHMÉTIQUE.

§ 1. Objet de l'arithmétique.

29. L'étude de l'arithmétique a une grande importance, parce que cette branche des mathématiques sert de base à toutes les autres, et que, de même que la géométrie, elle exerce très bien au raisonnement.

Les idées les plus simples que font naître en nous les corps qui nous entourent, sont celles de forme, d'étendue, de mobilité et de pluralité. Laissons d'abord de côté les premières pour ne nous occuper que de la pluralité.

La première idée de pluralité nous vient de ce que l'expérience nous apprend à distinguer les unes des autres des collections diversement composées d'objets de même espèce. Ces diverses pluralités sont appelées *nombres*. Chacun des objets qui les constituent est une *unité*. On a désigné chaque nombre par un nom. L'unité est elle-même un nombre, le nombre *un*.

Les mêmes noms s'appliquent aux nombres, quelle que soit la nature de l'unité. Quand celle-ci est indiquée, les nombres sont dits *concrets*. Mais on a reconnu qu'ils jouissent de certaines propriétés indépendantes de la nature des unités qui les composent. C'est de là qu'est venue l'idée du *nombre abstrait*, c'est-à-dire, du nombre qui n'est actuellement appliqué à aucune espèce particulière d'unités, mais qui est applicable à toutes. Par exemple, deux objets d'une certaine espèce, ajoutés à deux autres objets de la même espèce, font quatre objets de cette espèce. On

peut donc faire abstraction de la nature de ces objets et dire simplement : deux et deux font quatre ; *deux* et *quatre* sont ici des nombres abstraits, parce qu'on n'indique pas de quelle espèce est l'unité, et que celle-ci peut être quelconque.

30. Les nombres peuvent aussi être engendrés par la mesure des grandeurs. On définit ordinairement une grandeur ou une quantité en disant que c'est une chose susceptible d'augmentation ou de diminution ; d'après une autre définition une grandeur est une chose susceptible d'être partagée en plusieurs parties de même espèce.

On a reproché à la première définition qu'elle ferait ranger dans la catégorie des grandeurs l'habileté d'un artiste, la cruauté d'un tyran, etc. Quant à la seconde, elle paraît manquer de clarté dans certains cas ; par exemple, il est difficile de concevoir, a priori, que la vitesse d'un mobile soit partagée en plusieurs parties de même espèce.

Nous en concluons qu'une bonne définition exigerait des explications qui seraient peut-être trop difficiles pour être parfaitement comprises par les commençants. On peut concevoir que certaines choses soient augmentées ou diminuées ; telles sont les longueurs, les surfaces, les volumes, les vitesses, etc. Il en résulte que deux de ces choses étant données, on peut les comparer pour s'assurer si elles sont égales ou si l'une est plus grande ou plus petite que l'autre.

A cet effet, il faut avant tout avoir une définition de l'égalité des choses que l'on compare ; et quand les deux choses comparées ne sont pas égales, pour pouvoir décider quelle est la plus grande, il faut une définition de l'addition des choses de l'espèce que l'on considère. Quand une chose est égale à une autre plus un reste de même espèce, elle est dite plus grande que l'autre ; et dans le même cas on peut concevoir qu'une des choses que l'on considère soit divisée en parties égales, avec ou sans reste.

Dès lors on peut aussi chercher combien de fois une chose en contient une autre de même espèce, qu'on nomme l'*unité* et qu'on choisit arbitrairement pour servir de terme de comparaison. C'est ce qu'on appelle *mesurer* la chose dont il s'agit. Cela posé, on peut dire qu'*en mathématiques on nomme grandeur ou quantité toute chose qu'on peut concevoir augmentée ou diminuée et qui est susceptible de mesure.*

Si l'unité est contenue exactement un certain nombre de fois dans la grandeur à mesurer, le résultat de la comparaison est un nombre de

même nature que quand il s'agit d'un agrégat d'unités qui ne se fractionnent pas.

Si au contraire, après avoir trouvé combien il entre d'unités dans la grandeur à mesurer, on obtient un reste, on peut évaluer celui-ci en cherchant combien de fois il contient une des parties de l'unité divisée successivement en 2, 3, 4, ..., parties égales.

Nous n'examinerons pas ici la question de savoir si ces opérations doivent nécessairement avoir une fin, c'est-à-dire s'il est toujours possible de diviser l'unité en un nombre assez grand de parties égales pour que l'une d'elles soit une aliquote du reste à mesurer. Nous réserverons cette question pour un examen ultérieur et nous nous bornerons, pour le moment, à dire que, quand on trouve une telle subdivision, il suffit d'indiquer en combien de parties égales on a fractionné l'unité et combien de fois l'une de ces parties est contenue dans le reste; on a alors de celui-ci une idée exacte. C'esi ainsi qu'on engendre les *fractions*. Leur origine fait voir qu'elles se composent de deux termes, et quelle est la signification de chacun d'eux.

Les nombres engendrés d'abord par les pluralités d'objets distincts, sont donc engendrés aussi par la mesure des grandeurs ; mais celle-ci donne en outre naissance aux fractions; ce mode commun de génération des nombres et des fractions a fait étendre à ces dernières la dénomination de nombre; de sorte qu'on a distingué les nombres en *nombres entiers* et *nombres fractionnaires*.

Remarque. — Un point sur lequel il importe de fixer l'attention, c'est, en premier lieu, que l'unité doit être de même nature que la grandeur à mesurer, et, en second lieu, que, suivant le choix qu'on fait de l'unité, une même grandeur peut être représentée par des nombres très divers.

D'où il suit que cette grandeur peut être parfaitement déterminée par les données d'une question, tandis que le nombre qui la représente reste indéterminé tant qu'on n'a pas choisi l'unité de mesure.

Par exemple, la surface d'un cercle est déterminée quand on connaît le rayon. Pourtant le nombre qui la représente reste indéterminé tant qu'on n'a pas choisi l'unité de surface; et on pourrait citer une foule d'exemples de ce genre. Nous verrons (Géométrie, ch. IV, § 3) que l'auteur d'un traité de géométrie élémentaire très estimé, Legendre, a commis une grave erreur pour avoir méconnu cette vérité si simple.

31. Plussieurs nombres peuvent être composés en un seul, et réciproquement un nombre peut être décomposé en plusieurs autres. Ces opérations peuvent se faire de beaucoup de manières différentes. *L'objet de l'arithmétique est de donner des règles fixes et certaines pour énoncer et écrire les nombres et pour effectuer sur eux de la manière la plus simple, toutes les opérations possibles.*

On distingue d'ailleurs deux parties dans l'arithmétique : 1° *l'arithmétique ordinaire*, que nous venons de définir et qui peut s'établir d'une infinité de manières d'après certaines conventions plus ou moins arbitraires, particulièrement d'après la base du système de numération. 2° *la théorie des nombres*, qui a pour objet l'étude de propriétés complètement indépendantes de la manière dont les nombres sont écrits. Telles sont, par exemple, la propriété d'un nombre d'être divisible par un autre, celle d'être un carré parfait, etc.

Les démonstrations des règles de l'arithmétique se font le plus souvent sur des exemples numériques, ce qui les rend plus faciles à saisir. Cela ne nuit pas à leur généralité, pourvu que les raisonnements que l'on fait, soient indépendants des valeurs numériques employées. Il faut que les raisonnements soient fondés sur les fonctions que les nombres remplissent, et non sur leurs valeurs particulières.

Les vérités fondamentales de l'arithmétique ont un caractère de simplicité qui permet de les démontrer sans faire usage de signes. Pour les théories plus compliquées, le langage ordinaire ne donnerait, ni assez de concision, ni assez de clarté, et dès lors il est utile d'introduire les signes de l'algèbre élémentaire. Ce n'est pas faire de l'algèbre que d'employer ces signes comme simples moyens d'abréviation. Nous l'avons déjà dit, on ne fait à proprement parler de l'algèbre, que quand on emploie le mécanisme du calcul algébrique.

§ 2. Numération. (Système décimal.)

32. La numération a pour objet d'énoncer tous les nombres à l'aide d'un système limité de mots, ce qui constitue la *numération parlée;* et de les représenter par un système limité de caractères ou *chiffres*, ce qui constitue la *numération écrite.*

33. *Numération parlée.* — La première condition à remplir pour la numération parlée, est que chaque nombre ait un nom différent ;

et la seconde, qu'il n'y ait pas, pour former ces noms, autant de mots particuliers que de nombres, car la meilleure mémoire ne pourrait en retenir assez pour les besoins journaliers des hommes. On remplit ces conditions à l'aide de certaines conventions qui peuvent être modifiées de manière à donner divers systèmes de numération.

Dans tout système de numération, l'idée fondamentale consiste à décomposer les grands nombres en d'autres plus petits. On forme d'abord une collection composée d'un certain nombre d'unités simples, que l'on considère comme une unité nouvelle, ou de second ordre; pour compter celles-ci on peut faire usage des noms déjà donnés aux nombres moindres que cette unité nouvelle. D'ailleurs une collection composée d'autant d'unités du second ordre que l'une de celles-ci contient d'unités simples, est considérée comme une unité nouvelle ou de troisième ordre. Pour compter ces unités, on peut encore faire usage des noms qui servent à compter les unités simples; on peut continuer ainsi à former des unités du quatrième ordre, du cinquième ordre, etc., et il est aisé de voir que grâce à cet artifice, il suffit d'adopter des noms nouveaux pour désigner les collections successivement adoptées comme unités des divers ordres.

Dans le système décimal, dix unités simples forment une unité du second ordre ou une *dizaine*; dix unités du second ordre constituent l'unité du troisième ordre ou la *centaine*; dix unités du troisième ordre constituent l'unité du quatrième ordre appelée *mille*. Ensuite dix unités du quatrième ordre forment l'unité du cinquième ordre; dix de celles-ci forment l'unité du sixième ordre, et ainsi de suite. Mais on n'a pas appliqué un nom spécial à chacune de ces unités.

On a d'abord donné des noms aux nombres depuis *un* jusqu'à *neuf*. On a aussi adopté les noms *vingt*, *trente*,..., *nonante*, pour désigner deux, trois,..., neuf dizaines. Quant aux centaines on les compte de une à neuf, de la même manière que les unités simples, sans faire usage de mots nouveaux, jusqu'à dix centaines, qui forment l'unité de *mille*. On compte les mille depuis un jusqu'à neuf cent nonante neuf mille en appliquant les mêmes noms qu'aux nombres composés d'unités simples. On n'adopte un nouveau nom que pour mille mille, que l'on appelle un *million*. On compte ensuite les millions, depuis un jusqu'à neuf cent nonante neuf millions, de la même manière que les unités simples, et l'on n'adopte un nom nouveau que pour mille millions et ainsi de suite.

34. *Numération écrite.* — Dans la numération écrite, il suffit de dix caractères pour écrire tous les nombres, pourvu que l'on convienne que, quand deux chiffres sont placés l'un à côté de l'autre, les unités représentées par le chiffre de gauche sont d'un ordre immédiatement supérieur à celui des unités représentées par l'autre. Ce moyen ingénieux d'exprimer tous les nombres à l'aide de dix chiffres en leur donnant à la fois une valeur absolue et une valeur de position, nous vient de l'Inde. Laplace fait remarquer qu'il y a là une idée très fine, qui doit être placée au premier rang des inventions utiles. Nous y sommes si habitués que nous la considérons comme fort simple, et que nous n'en apprécions pas assez le mérite, ni la difficulté qu'il y avait d'y parvenir.

§ 3. Opérations fondamentales sur les nombres entiers.

35. Les opérations de l'arithmétique peuvent avoir pour but de composer des nombres ou de les décomposer; les nombres composants peuvent d'ailleurs être égaux ou inégaux. De là les quatre règles fondamentales.

Chacune de ces règles revient à ramener l'opération à une série d'autres plus simples. Mais pour qu'elles soient commodes, il faut qu'elles s'appliquent indistinctement à tous les nombres, et que la démonstration en soit faite une fois pour toutes. Elles constituent dès lors une sorte de mécanisme qu'on applique aveuglément dans chaque cas particulier, sans qu'on doive se préoccuper de le justifier de nouveau.

36. *L'addition est la règle qui a pour objet de former le nombre résultant de la réunion de plusieurs autres en un seul.* Le résultat de cette opération s'appelle *somme* ou *total.*

On peut la concevoir effectuée en réunissant tous les groupes d'unités en un seul, et en comptant combien d'unités renferme le groupe ainsi obtenu. Ce moyen est celui par lequel les enfants commencent à apprendre l'addition des nombres les plus petits. Mais il est trop long quand il s'agit de nombres un peu grands, et on le remplace par une règle simple, applicable à tous les cas.

La première idée qu'on se fait de la pluralité entraîne cette autre que, dans quelque ordre qu'on place les objets, et de quelque manière qu'on les partage en groupes séparés, pourvu qu'on n'en retire aucun et qu'on

n'en introduise pas de nouveau, la pluralité ne change pas, et le nombre reste le même.

Il résulte de là que la somme de plusieurs nombres est indépendante de l'ordre dans lequel on ajoute les parties dont ils se composent; de façon qu'on peut, pour additionner plusieurs nombres, faire successivement les sommes des unités simples, des dizaines, des centaines, etc., et réunir tous les résultats en un seul. Dès lors, si on suppose que l'on sache de mémoire ajouter à un nombre quelconque, un nombre d'un seul chiffre, l'opération entière peut être décomposée en opérations partielles de ce genre. Il suffit d'écrire dans une même colonne verticale tous les chiffres représentant des unités du même ordre. La somme de ces chiffres représentera encore des unités de cet ordre, et sera l'une des parties du total cherché. Il est inutile, pendant qu'on les ajoute, de se préoccuper de leur nature : les unités simples du total correspondant à une colonne quelconque, seront à leur place si on les écrit sous cette colonne; et les dizaines de ce total, représentant des unités de même nature que les chiffres de la colonne suivante, à gauche, devront être ajoutées à celles-ci.

Dans chaque colonne il est indifférent de commencer l'opération par le haut ou par le bas, mais il y a une raison pour marcher de la droite vers la gauche quand on passe d'une colonne à l'autre, parce que sans cela il faudrait parfois revenir sur les résultats partiels déjà obtenus. Le report provenant du total fourni par une colonne quelconque doit, en effet, influer sur le total de la colonne placée à sa gauche. C'est une remarque qu'il ne faut pas négliger. Pour en faire comprendre l'importance aux commençants, il est utile de leur faire effectuer quelques additions en partant des colonnes de gauche.

37. *La soustraction est l'opération qui a pour but de trouver l'excès d'un nombre sur un autre plus petit.* Le résultat s'appelle la *différence* ou le *reste*. Celui-ci, ajouté au plus petit nombre, doit reproduire le plus grand.

Ici encore, peu importe dans quel ordre on retranche successivement du premier nombre toutes les parties du second. Or, en admettant que le plus petit soit écrit sous le plus grand de manière que les unités de même ordre se correspondent, si chaque chiffre inférieur est moindre que celui sous lequel il est écrit, l'opération se décompose immédiatement en une série de soustractions partielles.

Si un chiffre inférieur est plus grand que le chiffre placé au-dessus, on peut opérer de plusieurs manières :

1° On emprunte une unité au chiffre placé à gauche de celui qui, dans le nombre supérieur, est trop faible pour que la soustraction soit possible. Ce dernier est ainsi augmenté de dix unités, et l'on peut faire la soustraction. Le chiffre auquel on a fait l'emprunt, doit être diminué d'une unité.

2° On ajoute dix unités au chiffre qui, dans le nombre supérieur, est trop faible pour que la soustraction soit possible, et une unité au chiffre qui se trouve immédiatement à gauche dans le nombre à soustraire ; on augmente ainsi les deux nombres d'une même quantité, ce qui n'influe pas sur leur différence. Cette méthode permet, dans la division, de soustraire du dividende, sans les écrire, les produits partiels du diviseur par les divers chiffres du quotient.

3° On peut effectuer la soustraction à peu près comme s'il s'agissait d'une addition. A cet effet on cherche les divers chiffres de la différence demandée en ajoutant fictivement à chaque chiffre du nombre à soustraire, ce qui est nécessaire pour obtenir le chiffre sous lequel il est écrit ou ce chiffre augmenté d'une dizaine ; dans ce dernier cas une unité doit être ajoutée au chiffre suivant du nombre à soustraire. Cette méthode permet de retrancher d'un nombre donné la somme de plusieurs autres sans additionner préalablement ces derniers.

Exemple. — Soit à soustraire 8772 + 7821 de 79534. Après avoir écrit les deux premiers nombres sous le troisième on commencera l'addition par le bas et on dira : Un et 2 font 3, et **1** font 4 ; je pose 1. Deux et 7 font 9, et **4** font 13 ; je pose 4 et je retiens 1. Un et 8 font 9 et 7 font 16 et **9** font 25 ; je pose 9 et je retiens 2. Deux et 7 font 9 et 8 font 17 et **2** font 19 ; je pose 2 et je retiens 1. Un et **6** font 7 ; je pose 6. On fait la preuve en vérifiant que le premier nombre est égal à la somme des trois autres.

```
79534
 8772
 7821
-----
62941
```

4° On change la soustraction en addition en prenant le complément de chaque chiffre du nombre à soustraire, d'abord à dix, pour le chiffre des unités, puis à neuf pour tous les autres ; et on retranche ensuite du total une unité de l'ordre immédiatement supérieur à celui des unités de l'ordre le plus élevé du nombre à soustraire.

Exemple. — Soit à soustraire 6754 de 543928. Après avoir écrit le

plus petit nombre sous le plus grand on dira : 6 (complément de 4), plus 8 font 14; je pose 4 et je retiens 1. Un plus 4 (complément de 5), plus 2 font 7; je pose 7; 2 (complément de 7), plus 9 font 11; je pose 1 et je retiens 1; 1 plus 3 (complément de 6), plus 3 font 7; je pose 7; 4 moins 1 font 3, je pose 3; enfin je pose 5.

$$\begin{array}{r} 543928 \\ 6754 \\ \hline 537174 \end{array}$$

Lagrange a recommandé cette méthode dans les séances de l'École normale (*), parce que, dit-il, on se trompe souvent quand on est obligé d'emprunter. Cependant il ne paraît pas moins facile de se tromper en prenant les compléments à vue; mais la méthode des compléments est utile dans les calculs logarithmiques, car elle permet, comme la précédente, de retrancher d'un nombre donné la somme de plusieurs autres sans faire préalablement le total de ces derniers; en prenant les logarithmes dans les tables on peut écrire immédiatement les compléments de ceux qu'il faut soustraire.

On voit que dans tous les cas la règle de la soustraction ramène l'opération à des opérations partielles qui s'effectuent aisément.

L'opération doit se commencer par la droite, comme l'addition, et pour le même motif.

38. *Multiplier un nombre entier par un autre nombre entier, c'est composer un nombre contenant un nombre donné (appelé multiplicande), autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre donné (appelé multiplicateur).* Le résultat de l'opération est le *produit.*

Une multiplication n'est autre chose qu'une addition abrégée.

Pour multiplier l'un par l'autre deux nombres d'un seul chiffre, on peut recourir à l'addition; on a formé, de tous les produits de ce genre, une table qu'il faut connaître par cœur (table de Pythagore).

S'il s'agit ensuite de multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre, il suffit de remarquer que chacune des parties dans lesquelles on peut décomposer le multiplicande, doit entrer dans le produit autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur; il faut donc faire la somme des produits partiels que l'on obtient en multipliant successivement les unités, les dizaines, les centaines, etc... du multiplicande, par le multiplicateur : De là la règle connue.

(*) *Journal de l'École polytechnique,* t II.

Enfin, considérons le cas où l'on doit multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un autre nombre de plusieurs chiffres; par exemple 5324 par 749.

Il faut prendre le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur 749; c'est-à-dire 700 fois, plus 40 fois, plus 9 fois. Pour prendre le multiplicande 9 fois, la règle est tracée plus haut. Pour le prendre 40 fois, observons que, 40 étant 4 fois 10, il faut prendre 4 fois un groupe d'unités contenant 10 fois le multiplicande. Or, la multiplication par 10 se fait en écrivant un zéro à droite du nombre à multiplier; car chaque chiffre prend ainsi une valeur relative 10 fois plus grande. Le résultat doit ensuite être multiplié par 4, et ajouté au premier produit partiel; mais il est clair que la somme sera la même si on multiplie par 4 le multiplicande, et si on écrit ce second produit partiel de manière que ses unités simples soient sous les dizaines du premier, ses dizaines sous les centaines du premier, et ainsi de suite. On opérera d'une manière analogue pour former le produit partiel du multiplicande par les centaines du multiplicateur, et il ne restera qu'à faire l'addition des trois produits partiels.

L'opération totale est ainsi décomposée en opérations telles qu'on n'a jamais à multiplier qu'un nombre d'un seul chiffre par un autre nombre d'un chiffre, sans qu'on doive se préoccuper de l'ordre des unités que ces chiffres représentent.

Remarque. — Pour former l'un quelconque des produits partiels du multiplicande par un des chiffres du multiplicateur, il faut commencer l'opération par la droite, à cause des retenues. Mais rien n'oblige à prendre pour premier multiplicateur partiel le chiffre des unités du multiplicateur; on pourrait former ces produits dans un ordre quelconque; l'usage de commencer par la droite a prévalu.

On fera comprendre aux enfants l'importance de cette remarque en les exerçant d'abord à la multiplication d'un nombre quelconque par un nombre d'un seul chiffre, en commençant par la gauche ; et ensuite à la multiplication d'un nombre de plusieurs chiffres par un autre de plusieurs chiffres, en commençant par le premier chiffre à gauche du multiplicateur.

39. *Dans toute multiplication de plusieurs nombres entiers, on peut intervertir d'une manière quelconque l'ordre des facteurs.* — 1° On peut

intervertir l'ordre des deux derniers facteurs d'un produit, de sorte qu'on a, par exemple,

$$5.7.8.3.4. = 5.7.8.4.3.$$

En effet, le produit des trois premiers facteurs est 280; formons le tableau :

280	280	280
280	280	280
280	280	280
280	280	280

Chaque ligne horizontale contient 280 trois fois et renferme un nombre d'unités égal à 280. 3. Le tableau, formé de 4 lignes semblables, contient donc 280. 3. 4 unités. Mais il renferme aussi 3 lignes verticales, chacune desquelles contient 4 fois 280 unités. Il contient donc 280. 4. 3 unités, d'où 280.3.4 = 280. 4. 3.

Autre démonstration. — Considérons le produit 7. 9, c'est-à-dire un nombre composé de 9 groupes de 7 unités. Si on prend une unité dans chaque groupe, on forme un nouveau groupe de 9 unités, et pour épuiser toutes les unités du produit, il faut répéter l'opération 7 fois. Ce nombre se compose donc aussi de 7 groupes de 9 unités, et on a 7.9 = 9.7.

Pour prouver de cette manière qu'on a $p.q.m.n = p.q.n.m$, il suffit de considérer le produit $p.q$ comme une unité nouvelle. La première démonstration paraît plus facile à saisir, parce qu'elle parle aux yeux.

2° Ayant établi, comme on vient de le faire, qu'on peut intervertir l'ordre des deux derniers facteurs, il est aisé de prouver qu'on peut intervertir comme on veut l'ordre de tous les facteurs. Car on peut amener un facteur quelconque à un rang déterminé, en l'échangeant un certain nombre de fois avec celui qui le précède ou avec celui qui le suit.

Remarque. — Dans les applications le multiplicande et le produit sont de même nature, tandis que le multiplicateur est toujours un nombre abstrait; et, en ce sens, il n'est pas indifférent de prendre les facteurs dans l'un ou l'autre ordre. Il faut faire remarquer aux élèves combien est vicieuse l'expression dont ils se servent, quand ils disent, par exemple, qu'ils multiplient un certain nombre de francs par un nombre de mètres. Il est nécessaire, dans les applications, de tenir la main à ce que

les commençants prennent les deux facteurs dans l'ordre logique. C'est ainsi que, pour trouver combien coûtent cinq mètres d'étoffe à trois francs le mètre, il faut multiplier trois francs par cinq. Il en résulte qu'on peut écrire 3 fr. $\times$ 5, mais non 5 $\times$ 3 fr.

40. *On peut décomposer l'un quelconque des facteurs d'un produit en facteurs plus simples sans altérer ce produit.* — Car pour prendre un nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans 20, par exemple, il suffit de former un groupe qui contienne 5 fois ce nombre et de répéter 4 fois ce groupe. Multiplier par 20 revient donc à multiplier par 5 et ensuite par 4.

On peut encore, pour le prouver, placer le facteur à décomposer au premier rang dans le produit, et alors la légitimité de la décomposition est évidente.

Conséquence. — Si un facteur est rendu un certain nombre de fois plus grand ou plus petit, le produit devient le même nombre de fois plus grand ou plus petit.

41. *Nombre des chiffres d'un produit.* — Quand le multiplicateur est une puissance de 10, le nombre des chiffres du produit est inférieur d'une unité à la somme des nombres de chiffres des deux facteurs. Si le multiplicateur n'est pas une puissance de 10, le produit est compris entre ceux du multiplicande par les puissances de 10, l'une immédiatement supérieure, l'autre immédiatement inférieure au multiplicateur. Ces produits ont, le premier autant de chiffres qu'il y en a en tout dans les deux facteurs proposés, et le second un de moins. *Le produit lui-même a donc, dans tous les cas, autant de chiffres qu'il y en a dans les deux facteurs réunis, ou un de moins.*

42. *Division des nombres entiers.* — On peut donner de la division par un nombre entier deux définitions, auxquelles correspondent deux genres de questions qui se résolvent par cette opération.

La division est l'opération qui a pour but de trouver combien de fois un nombre donné (le diviseur) est contenu dans un autre nombre donné (le dividende); ou bien,

C'est l'opération qui a pour but de partager le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unités au diviseur.

L'une de ces définitions étant adoptée, l'autre doit être considérée comme une proposition à démontrer.

Partons de la première. C'est ce qu'il y a de plus logique; car ainsi l'on peut ne considérer d'abord les nombres que comme des agrégats d'unités qui ne se fractionnent pas, et n'introduire la notion des fractions que plus tard. Elle permet, d'ailleurs, d'effectuer une division à l'aide de la soustraction, de même que la multiplication par un nombre entier peut s'effectuer à l'aide de l'addition.

Si l'on retranche le diviseur autant de fois que possible du dividende, et qu'on trouve le reste zéro, le premier nombre est contenu dans le second autant de fois que l'on a fait de soustractions. Ce nombre de soustractions est donc le quotient, et le dividende est égal au diviseur répété autant de fois qu'il y a d'unités au quotient; en d'autres termes, il est égal au produit du diviseur multiplié par le quotient.

Si on trouve un reste différent de zéro et plus petit que le diviseur, l'opération prouve que le dividende contient un certain nombre de fois le diviseur, plus le reste; c'est-à-dire que le dividende se compose du produit du diviseur multiplié par le quotient, plus le reste. Elle ne peut avoir d'autre sens, tant qu'on considère des unités qui ne se fractionnent pas.

Quand on introduit la notion de la mesure des grandeurs continues, et par conséquent des fractions, on peut pousser la division plus loin, en faisant usage du reste.

Mesurer une grandeur, c'est précisément déterminer combien de fois elle contient la grandeur prise pour unité. Or, quand la grandeur à mesurer ne contient pas exactement un certain nombre de fois l'unité, on fractionne celle-ci pour mesurer le reste, et l'on engendre les nombres fractionnaires.

L'analogie entre cette opération et la division est frappante : *Chercher combien de fois le dividende contient le diviseur, c'est mesurer le dividende, au moyen du diviseur pris pour unité;* si le dividende ne contient pas un nombre entier de fois le diviseur, le résultat pourra être exprimé sans peine par un nombre fractionnaire.

Soit, par exemple, à diviser 45 par 7. Le dividende 45 contient 6 fois le diviseur 7, plus le reste 3. Or, pour chercher combien de fois le reste 3 contient le diviseur 7, on peut considérer ce dernier comme partagé en 7 parties égales, chacune desquelles est l'unité. Le reste contient 3 de ces parties; par conséquent, il est la fraction trois septièmes du diviseur. Le dividende contient donc 6 fois le diviseur, plus la fraction $3/7$ du

diviseur. Le quotient sera le nombre fractionnaire 6 3/7, nombre qui représenterait le dividende si le diviseur était pris pour unité.

43. Démontrons maintenant que *le quotient est l'une des parties du dividende, partagé en autant de parties égales qu'il y a d'unités au diviseur.* — Le dividende est égal à la somme $7 \times 6 + 3$. Si on veut le diviser en 7 parties égales, il faudra diviser en 7 parts égales chacun des deux termes de cette somme.

Or, $7 \times 6 = 6 \times 7$. De sorte que 6 est contenu 7 fois dans 7 multiplié par 6 ; 6 est donc le septième de 7×6.

Ensuite, si on partage chaque unité du reste 3 en 7 parties égales, et si on prend un septième de chacune de ces unités, on obtiendra 3/7 de l'unité, qui vaudront le septième du reste.

Le septième du dividende vaudra donc 6 3/7. C. Q. F. D.

Première remarque. — Puisque le quotient répété autant de fois qu'il y a d'unités au diviseur reproduit le dividende, on peut dire que ce dernier est le produit du quotient multiplié par le diviseur. Mais on ne peut encore dire qu'il est le produit du diviseur par le quotient que dans le cas où celui-ci est entier. Cela ne peut se dire convenablement, quand le quotient est fractionnaire, qu'après qu'on a défini la multiplication par une fraction ; jusque là il faut dire que le dividende égale le diviseur multiplié par la partie entière du quotient, plus le reste. Cette définition très générale de la division : *c'est l'opération qui sert à trouver l'un des facteurs d'un produit, connaissant l'autre facteur,* ne doit donc venir que plus tard.

Deuxième remarque. — Le quotient d'une division peut être regardé comme une fraction qui a le dividende pour numérateur et le diviseur pour dénominateur. Car, pour diviser 45 par 7, on pourrait raisonner comme nous l'avons fait pour diviser le reste 3 par 7, et on aurait au quotient $\frac{45}{7}$.

44. *Règle de la division.* — Soit à diviser 985246 par 2653.

Il faut commencer par déterminer l'ordre du premier chiffre à gauche du quotient. Pour cela séparons, à gauche du dividende, assez de chiffres pour que leur ensemble forme un nombre dans lequel le diviseur soit contenu au moins une fois, et moins de 10 fois.

L'ordre du dernier chiffre séparé, sera celui du premier chiffre à gauche du quotient. Ainsi, dans l'exemple proposé, le nombre à détacher à la gauche du dividende est 9852, et le premier chiffre à gauche du

quotient représentera des centaines. En effet, le quotient contiendra au moins une centaine, puisqu'en multipliant le diviseur par cent, le produit vaudra 2653 centaines, et pourra se retrancher du dividende ; d'autre part, le quotient ne pourra pas contenir une unité de mille, ou 10 centaines, puisqu'en multipliant le diviseur par 10 centaines, le produit vaudra 26530 centaines, nombre plus grand que le dividende. La partie entière du quotient contiendra donc, ici, des centaines, des dizaines et des unités.

985246	2653
18934	371
3636	
983	

Proposons-nous maintenant de trouver le chiffre des centaines du quotient. A cet effet, remarquons d'abord que le dividende contient les produits partiels du diviseur par les centaines, les dizaines et les unités du quotient, plus le reste de la division. Or, le premier de ces produits partiels se trouve contenu dans les centaines du dividende ; et je dis que, si l'on divise par le diviseur 2653 le nombre 9852 que l'on a détaché à la gauche du dividende, la partie entière du quotient de cette division partielle sera exactement le chiffre des centaines du quotient cherché.

Pour le prouver il suffit de faire voir que le chiffre ainsi obtenu ne peut être plus petit ni plus grand que le chiffre cherché.

1° *Il n'est pas trop petit* ; car les 9852 centaines du dividende contiennent le produit partiel du diviseur par les centaines du quotient cherché et peuvent en outre contenir des centaines provenant des autres produits partiels et du reste de la division. Il n'est donc pas possible qu'en divisant 9852 par 2653 on obtienne un quotient inférieur au chiffre cherché.

2° *Le chiffre trouvé n'est pas trop grand.* Car le supposer trop grand ce serait supposer que la division de 9852 centaines par 2653 donnerait plus de centaines que celle du nombre proposé par 2653 ; ce qui est absurde, le nombre proposé étant au moins égal à 9852 centaines.

On pourrait dire aussi :

Ce chiffre n'est pas trop grand ; car en multipliant par le diviseur le nombre de centaines qu'il représente, le produit partiel obtenu peut se retrancher des centaines du dividende. Le quotient contient donc au moins autant de centaines qu'il y a d'unités dans le chiffre trouvé.

On pourra adopter l'un ou l'autre de ces deux raisonnements et choisir celui qui sera le mieux compris par l'élève à qui l'on s'adresse.

Il faut donc faire la division partielle de 9852 par 2653, et chercher

la partie entière du quotient. Or le produit des unités de l'ordre le plus élevé du diviseur (2 mille), par le quotient demandé doit se trouver en totalité dans les unités de même ordre du dividende (9 mille). Mais ces 9 mille peuvent contenir en outre d'une part, les mille provenant des reports, et, d'autre part, ceux du reste de la division partielle. Le quotient 4, de la division de 9 par 2, peut donc être trop fort, mais il ne saurait être trop faible. Si le produit du diviseur 2653 par 4 pouvait être soustrait du dividende partiel 9852, le chiffre 4 ne serait pas trop fort, et ce serait le quotient cherché. Mais dans le cas actuel la soustraction est impossible. Il faut donc diminuer 4 d'une ou plusieurs unités ; si on essaie 3, la soustraction peut se faire ; donc 3 est le quotient cherché.

9852	2653
	3

On peut encore vérifier autrement si 4 est trop fort. Opérons comme s'il s'agissait de diviser le dividende partiel 9852 par 4, ce qui se fait à vue. Le chiffre 4 sera trop fort si le quotient de cette division est moindre que le diviseur 2653. Au contraire, un quotient au moins égal à 2653 indiquerait que le chiffre 4 serait bon. On doit donc pousser la division jusqu'à ce qu'on ait un chiffre qui diffère du correspondant dans 2653 ; suivant que ce chiffre est plus petit ou plus grand que celui auquel on le compare, 4 est trop fort ou exact.

Voici le tableau de ces opérations, qui, bien entendu, peuvent se faire mentalement : (Le deuxième chiffre qu'on obtient au quotient est 4 moindre que le chiffre correspondant 6 du diviseur : donc le chiffre essayé 4 est trop fort. Quand on essaie 3 le premier chiffre du quotient est 3, plus grand que le chiffre correspondant 2 du diviseur : 3 est bon).

9852	4
	24...
9852	3
	3...

Ayant trouvé le premier chiffre 3 du quotient cherché, retranchons des centaines du dividende le produit du diviseur par 3 centaines. Le reste contiendra encore les produits partiels du diviseur par les dizaines et les unités du quotient, plus le reste de la division. On opérera pour ces deux produits partiels comme pour le premier.

45. La démonstration de la règle de la division est la première qui offre quelque difficulté en arithmétique. Il faut habituer les commençants à l'exposer clairement et avec beaucoup d'ordre.

L'artifice employé dans cette opération consiste à mettre en évidence les produits partiels du diviseur par chacun des chiffres du quotient, ce

qui la ramène à autant d'opérations partielles qu'il y a de chiffres au quotient. Chacune de ces divisions se fait par un tâtonnement ; mais on a pour se guider, une règle fixe qui conduit rapidement au but. Elle consiste à diviser le nombre composé d'un ou de deux chiffres, à gauche du dividende, par celui des unités du même ordre du diviseur, et à s'assurer si le quotient ainsi trouvé n'est pas trop fort.

L'opération doit nécessairement être commencée par la gauche, parce que là on peut détacher du dividende un nombre qui contient entièrement l'un des dividendes partiels qu'on veut mettre en évidence.

§ 4. Des fractions.

46. Les fractions ordinaires s'énoncent et s'écrivent d'après des principes très simples, résultant de leur mode de génération. On a vu qu'elles peuvent être engendrées par la mesure des grandeurs, ou par la division des grandeurs continues en parties égales : de là la possibilité de les envisager de deux manières. Si, par exemple, on donne la fraction $\frac{5}{12}$, on peut la considérer comme valant 5 fois le douzième de l'unité ; mais on peut dire aussi qu'elle est égale au douzième de 5 ; car elle est le quotient de 5 divisé par 12.

47. Si l'on multiplie ou qu'on divise l'un des termes d'une fraction par un nombre entier, la valeur de la fraction devient ce nombre de fois plus grande ou petite. On peut démontrer très clairement, sans employer d'exemple numérique, les quatre cas que renferme cette proposition, laquelle s'applique d'ailleurs évidemment aussi au quotient d'une division.

Il en résulte que si on multiplie ou qu'on divise les deux termes d'une fraction par un même nombre, la fraction ne change pas. C'est sur ce principe que reposent deux opérations importantes : la simplification des fractions, et la réduction des fractions au même dénominateur.

48. *Comparaison des fractions.* — La comparaison de deux fractions n'est commode que si elles ont un terme commun. On les réduit ordinairement au même dénominateur, parce que c'est par cette opération qu'il faut commencer quand on veut les additionner ou les soustraire. La réduction de plusieurs fractions au même dénominateur peut se faire en prenant pour dénominateur commun le produit des dénominateurs de

toutes les fractions ; ou mieux en prenant le plus petit multiple commun de ces dénominateurs; mais la détermination de ce dernier nombre ne peut être convenablement expliquée que dans la théorie de la divisibilité.

49. *Changement que subit une fraction quand on ajoute un même nombre à ses deux termes, ou qu'on l'en retranche.* — S'il s'agit d'une fraction proprement dite, en ajoutant un même nombre à ses deux termes, ou l'augmente. Pour le démontrer, remarquons d'abord que l'excès de l'unité sur une fraction quelconque est une autre fraction, ayant même dénominateur que la fraction proposée, et ayant pour numérateur l'excès du dénominateur sur le numérateur de la fraction proposée.

Si on considère les excès de l'unité sur la fraction proposée et sur la fraction modifiée, les numérateurs de ces excès seront les mêmes ; car ils sont respectivement la différence des deux termes de la fraction proposée et la différence des deux termes de la fraction modifiée ; et ces différences sont égales, puisque les deux termes de la seconde fraction sont égaux respectivement à ceux de la première augmentés d'un même nombre.

Mais le dénominateur du premier excès est moindre que celui du second, puisqu'on y a ajouté un certain nombre pour obtenir celui du second. Donc le premier excès surpasse le second, et par conséquent la première fraction est moindre que la seconde. On voit d'ailleurs que la fraction modifiée est d'autant plus grande que le nombre ajouté aux deux termes de la fraction primitive est plus grand. La fraction augmente donc indéfiniment à mesure qu'on ajoute à ses deux termes des nombres de plus en plus grands. Toutefois elle reste toujours une fraction proprement dite; elle reste plus petite que l'unité.

Il serait aisé d'appliquer la démonstration au cas où la fraction serait plus grande que l'unité, et à celui où l'on retrancherait un même nombre de ses deux termes.

50. *Addition et soustraction des fractions.* — Ces opérations peuvent se définir de la même manière que quand il s'agit de nombres entiers. Pour les effectuer, il n'y a qu'à réduire les fractions au même dénominateur, à l'effet de faire représenter par les numérateurs des parties égales de l'unité.

Cette réduction au même dénominateur n'est qu'une opération préliminaire servant à rendre comparables les unités que représentent les numérateurs. L'opération consiste réellement dans l'addition ou la sous-

traction des numérateurs, et ne diffère pas, au fond, de celles que l'on effectue sur des entiers. On ne peut additionner ou soustraire que des unités de même nom ; dans le cas des fractions, ce nom est indiqué par le dénominateur commun.

51. *Multiplication des fractions.* — La multiplication par une fraction peut, à la rigueur, se définir comme la multiplication par un entier ; mais il est nécessaire d'expliquer, en tout cas, que le sens attaché au mot multiplication reçoit une certaine extension quand le multiplicateur est fractionnaire.

Nous avons dit que la multiplication a pour objet de trouver un nombre qui contienne le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient l'unité. Comment faut-il comprendre ceci, quand le multiplicateur est une fraction telle que un quart ? Il faut l'entendre en ce sens que le produit doit être le quart du multiplicande. Quand le multiplicateur est une fraction telle que deux tiers, le produit doit contenir deux fois le tiers du multiplicande. C'est pour cela qu'on modifie ordinairement la définition de la multiplication, quand on passe à la multiplication des fractions et que l'on dit :

La multiplication est une opération qui sert à trouver un nombre composé au moyen d'un nombre donné, appelé multiplicande, comme un autre nombre donné, qu'on nomme multiplicateur, est composé avec l'unité. Le résultat s'appelle produit.

Cette dernière définition est un peu compliquée, et peut-être vaut-il mieux conserver la première, à condition de bien expliquer comment il faut l'entendre quand le multiplicateur est un nombre fractionnaire, et de faire remarquer que le sens du mot multiplication a reçu ici une certaine extension.

52. Il est clair que le mot multiplier est pris ici dans un sens plus étendu que quand le multiplicateur est entier, puisque multiplier un nombre par $1/4$, par exemple, revient à le diviser par 4 ; et si l'on veut faire bien comprendre la raison d'être de cette extension, il faut avoir recours aux applications.

Deux grandeurs peuvent être liées de telle façon que si l'une change, l'autre change en même temps ; et la loi la plus simple qu'on puisse concevoir, c'est qu'elles augmentent ou diminuent proportionnellement ; de sorte que si l'une devient 2 fois, 3 fois, ... plus grande, l'autre devient

aussi double, triple, ..., etc. Telle est la relation entre la quantité d'une marchandise qui se vend à tant le mètre et le prix de la quantité vendue.

Pour trouver le prix total à payer, il faut composer un nombre qui contienne le prix du mètre, autant de fois que le nombre de mètres achetés contient un mètre. Si ce nombre de mètres est 2, 3, ..., il faut prendre 2, 3, ... fois le prix d'un mètre. Si l'on a acheté la moitié, le tiers, ... d'un mètre, il faut payer la moitié, le tiers, ... du prix d'un mètre. Enfin si l'on a acheté les 2/3 d'un mètre, il faut payer 2/3 du prix d'un mètre.

L'opération à effectuer serait donc, suivant le nombre de mètres achetés, une multiplication, une division, ou à la fois une multiplication et une division. Cependant elle peut se concevoir et se définir de la même manière dans tous les cas ; car elle revient à composer un nombre qui contient le prix d'un mètre de la même manière qu'un mètre est contenu dans la quantité achetée ; et comme on l'appelle multiplication dans le cas où le nombre de mètres achetés est entier, on lui a donné le même nom quand ce nombre de mètres est fractionnaire. Le mot multiplication a donc reçu ici une extension qui fait que parfois on désigne sous ce nom une division. C'est un point qu'on néglige trop souvent de faire ressortir dans l'enseignement.

53. L'extension du nom de multiplication à une opération qui comporte une division, peut-elle être regardée comme une simple convention ? ou bien est-ce l'expression d'un rapport qui existe entre les choses, indépendamment de toute convention, et que nous ne sommes pas les maîtres de changer ? Ces questions sont trop délicates pour être bien comprises par de jeunes élèves, mais ici, nous devons les examiner, et nous adoptons l'opinion de Cournot. (*)

Lorqu'on multiplie un nombre par une fraction, la relation qui lie les deux facteurs au produit, ne saurait être logiquement regardée comme d'une nature différente de ce qu'elle serait si le multiplicateur était entier. Cela semblera plus évident si l'on observe qu'on peut, en changeant la grandeur de l'unité, qui est arbitraire, transformer un multiplicateur fractionnaire en multiplicateur entier.

Si, par exemple, on achète 3/4 de livre d'une marchandise, à 32 frs.

(*) COURNOT : *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie.*

la livre, c'est exactement la même chose que si on en achetait 12 onces, à 2 frs. l'once. Pour trouver la somme à payer, il faut faire une multiplication, et le multiplicateur est fractionnaire dans le premier cas, tandis qu'il est entier dans le second. Evidemment les deux opérations sont foncièrement les mêmes, et c'est pour cela qu'il convient de leur appliquer le même nom.

On voit, par cet exemple, que la nature de la relation qui existe entre les deux facteurs et le produit, doit être considérée comme indépendante du choix arbitraire de l'unité, d'où dépend la valeur numérique, entière ou fractionnaire du multiplicateur. L'opération qui sert à trouver le produit doit donc avoir le même nom dans tous les cas, afin que le terme qui sert à désigner la relation dont il s'agit, ait le même degré de généralité que notre manière de concevoir cette relation elle-même.

54. La règle à suivre pour la multiplication des fractions, résulte immédiatement de la définition de l'opération, et des propositions démontrées relativement aux modifications que les fractions subissent, quand on multiplie un de leurs termes par un certain nombre.

Par exemple, pour multiplier une fraction par $2/3$, il faut commencer par prendre le tiers du multiplicande, c'est-à-dire par le rendre trois fois plus petit, ce qui se fait en multipliant son dénominateur par 3. Il faut ensuite prendre 2 fois ce tiers, et pour cela le rendre 2 fois plus grand, en multipliant son numérateur par 2. Il faut donc multiplier les deux fractions terme à terme.

Remarque. — Toute extension d'une définition oblige à revenir sur les règles ou théorèmes déjà établis, pour vérifier s'ils restent vrais avec la définition nouvelle. D'après cette remarque il est nécessaire de démontrer les propositions suivantes :

1° On a vu qu'un produit ne change pas, quand on intervertit l'ordre des facteurs, en supposant ceux-ci entiers. Cette proposition reste vraie si quelques facteurs sont fractionnaires. C'est là une conséquence immédiate de la règle de la multiplication des fractions.

Puisqu'on peut intervertir l'ordre des facteurs d'un produit, l'un quelconque de ces facteurs peut être pris pour multiplicateur, et par suite le produit est composé avec chacun d'eux comme l'autre l'est avec l'unité. Ce changement de rôle des facteurs, on l'a déjà fait remarquer, suppose

qu'on les regarde comme des nombres abstraits ; dans les applications il ne serait pas indifférent, au point de vue logique, de prendre pour multiplicande l'un ou l'autre des deux.

2° Un facteur fractionnaire peut être décomposé en plusieurs autres sans qu'il en résulte une altération du produit ; car cela ne change pas les produits des numérateurs et des dénominateurs des fractions multipliées entre elles.

3° Si l'on multiplie un facteur quelconque d'un produit par une fraction, le produit sera multiplié par cette fraction. On le voit sans peine, en remarquant que ce facteur peut s'écrire au dernier rang.

55. *Division des fractions.* — La définition de la division peut être maintenant généralisée de manière à s'appliquer aux fractions. C'est l'opération qui a pour but de déterminer l'un des facteurs d'un produit, connaissant ce produit et l'autre facteur.

56. La règle à suivre pour diviser l'une par l'autre deux fractions, par exemple pour diviser $5/7$ par $3/4$, peut se démontrer de plusieurs manières. Car, les nombres étant considérés comme abstraits, on peut regarder le dividende $5/7$ comme le produit du diviseur $3/4$ par le quotient ; ou comme le produit du quotient par le diviseur $3/4$. De là déjà deux méthodes pour démontrer la règle de la division.

Première méthode. — Si l'on considère le dividende comme le produit du diviseur par le quotient, ce dividende $5/7$ est composé au moyen du diviseur $3/4$, comme le quotient avec l'unité ; c'est-à-dire que si on détermine combien de fois le dividende contient le diviseur, on saura combien de fois le quotient contient l'unité.

Réduisons les deux fractions au même dénominateur, elles deviendront $\frac{5.4}{7.4}$ et $\frac{7.3}{7.4}$. Or, la seconde contenant 7.3 fois $1/28$ de l'unité, on peut la regarder comme partagée en 7×3 ou 21 parties égales, chacune desquelles vaut $1/28$ de l'unité. La première contient 5×4 ou 20 de ces parties ; donc elle vaut 20 fois $1/21$ de la seconde, et contient celle-ci autant de fois que l'indique la fraction $\frac{20}{21} = \frac{5.4}{7.3}$. Ce nombre, qui est le quotient, est égal au dividende multiplié par la fraction diviseur renversée. De là la règle connue.

Deuxième méthode. — Le dividende est le produit du quotient inconnu

multiplié par $3/4$. Donc les trois quarts du quotient valent le dividende ; un quart du quotient vaut le tiers du dividende ; et le quotient lui-même vaut quatre fois le tiers du dividende. Donc pour obtenir le quotient, il faut multiplier $5/7$ par $4/3$, c'est-à-dire qu'il faut multiplier le dividende par la fraction diviseur renversée.

Troisième méthode. — Une troisième méthode consiste à vérifier directement la règle énoncée de la manière suivante :

Je dis que le quotient de la division de $5/7$ par $3/4$ est $\frac{5.4}{7.3}$.

Pour le prouver, il suffit de faire voir qu'en multipliant cette dernière fraction par le diviseur on trouve le dividende. Or le produit est $\frac{5.4.3}{7.3.4} = \frac{5}{7}$.

57. *Remarque.* — Ici se présente la même observation que pour la multiplication par une fraction. Diviser 3 par $1/5$, par exemple, revient à multiplier 3 par 5. Pourquoi donne-t-on le nom de division à une opération qui revient en réalité à une multiplication ? La raison en est que si on considère sous le point de vue le plus général l'opération inverse de la multiplication, il faut lui conserver le même nom, quelles que soient les valeurs absolues des nombres sur lesquels on opère ; et on le comprendra mieux en considérant les diverses applications qu'on peut faire de la division.

Les questions qu'on résout par la division sont inverses de celles pour lesquelles on opère par multiplication. Supposons deux grandeurs d'espèces différentes liées par la loi de proportionnalité ; pour plus de clarté, admettons qu'on connaisse le prix p d'un mètre d'étoffe. Si l'on demande le prix P de n mètres, il faut faire une multiplication, et l'on a

$$P = p \times n.$$

On peut se proposer deux questions inverses. 1° Connaissant P et p, trouver n. 2° Connaissant P et n, trouver le prix p du mètre. Dans les deux questions, l'inconnue est un des facteurs d'un produit donné, dont on connaît l'autre facteur. Elles se résolvent donc par une opération inverse de la multiplication ; et, la nature de ces questions étant indépendante des valeurs absolues des nombres qu'elles contiennent, il convient de donner à l'opération qui sert à les résoudre, le même nom dans tous les cas ; aussi bien quand les nombres sont fractionnaires que quand ils sont entiers.

La première des deux questions énoncées ci-dessus revient à déterminer combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. La seconde reviendrait à partager le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unités au diviseur, si celui-ci était entier; mais quand il est fractionnaire, à cette idée se substitue l'idée plus générale de la détermination d'une grandeur qui soit contenue dans le dividende de la même manière que l'unité est contenue dans le diviseur. Ce sont les solutions de ces deux problèmes qui constituent les deux premières méthodes exposées plus haut pour démontrer la règle de la division.

La troisième méthode est la plus simple; mais quand on se trouve en présence d'élèves assez avancés, il est utile de présenter les deux autres comme problèmes à résoudre.

On voit que la diversité des définitions qu'on peut donner de la division s'explique par celle des applications. Ce n'est qu'après avoir étudié celles-ci qu'on se fera une idée nette des différents points de vue sous lesquels on peut considérer cette opération.

58. *Extension de la définition des fractions. Conséquences.* — Le sens que nous avons attaché jusqu'ici au mot fraction, peut être généralisé. Cette question, souvent négligée, a été traitée complètement par Duhamel dans l'ouvrage cité.

Les fractions ont été considérées d'abord comme indiquant en combien des parties égales l'unité a été partagée, et combien on a pris de ces parties. Les deux termes étaient alors des nombres entiers, et le numérateur pouvait être plus grand ou plus petit que le dénominateur. On a reconnu ensuite qu'elles pouvaient être envisagées comme le quotient de la division du numérateur par le dénominateur. Ce second point de vue permet de ne plus regarder les deux termes comme entiers, puisqu'on peut diviser deux nombres fractionnaires l'un par l'autre. L'idée de fraction prend ainsi plus d'extension, et les propositions qui s'y rapportent prennent plus de généralité ; mais cela n'est permis qu'à la condition de revenir sur les règles et les théorèmes démontrés dans le cas où les deux termes des fractions étaient entiers, afin de vérifier s'ils restent applicables aux fractions plus générales que nous venons de définir.

Donnons quelques exemples.

Une fraction ne change pas de valeur quand on multiplie ses deux termes par un même nombre.

Soit la fraction $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$; et multiplions ses deux termes par $\dfrac{11}{13}$; on aura successivement

$$\frac{\frac{2}{3}\times\frac{11}{13}}{\frac{5}{7}\times\frac{11}{13}}=\frac{\frac{2.11}{3.13}}{\frac{5.11}{7.13}}=\frac{2.11}{3.13}\times\frac{7.13}{5.11}=\frac{2.7}{3.5}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}},$$

ce qui démontre la proposition.

La division équivalant à une multiplication par la fraction diviseur renversée, on voit que la valeur d'une fraction ne change pas non plus quand on divise ses deux termes par un même nombre fractionnaire.

Réduction au même dénominateur. — Le principe qui précède permet de réduire des fractions au même dénominateur, alors que les dénominateurs, ou quelques-uns d'entre eux sont fractionnaires.

Addition des fractions généralisées. — Supposons les fractions réduites au même dénominateur; leur somme sera égale à la somme des numérateurs divisée par le dénominateur commun. Pour le démontrer sur un exemple, remarquons que l'on a

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{11}{13}}+\frac{\frac{5}{7}}{\frac{11}{13}}=\frac{2.13}{3.11}+\frac{5.13}{7.11}=\frac{2.13.7+5.13.3}{3.11.7}$$

$$=\frac{13(2.7+5.3)}{11\times 3.7}=\frac{\frac{2.7+5.3}{3.7}}{\frac{11}{13}}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{7}}{\frac{11}{13}}.$$

Multiplication des fractions généralisées. — La règle de la multiplication s'applique aux fractions généralisées. On a, en effet,

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{11}{13}}\times\frac{\frac{5}{7}}{\frac{17}{19}}=\frac{2.13}{3.11}\times\frac{5.19}{7.17}=\frac{2.5}{3.7}\times\frac{13.19}{11.17}=\frac{\frac{2.5}{3.7}}{\frac{11.17}{13.19}}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}}{\frac{11}{13}\times\frac{17}{19}}.$$

Nous croyons pouvoir nous borner à ces exemples.

§ 5. Fractions décimales; multiplication et division abrégées.

59. Les fractions décimales sont les fractions qu'on obtient en divisant l'unité en dix parties égales, qui sont elles-mêmes subdivisées indéfiniment en parties de 10 en 10 fois plus petites. Tous les dénominateurs des fractions décimales sont donc des puissances de 10, et par là disparaissent les complications que la diversité des dénominateurs introduit dans le calcul des fractions ordinaires.

Les dénominateurs étant des puissances de 10, peuvent être sous-entendus dans la numération écrite, laquelle n'est alors qu'une extension du système de numération adopté pour les nombres entiers. Les règles du calcul des fractions décimales se démontrent sans peine en rétablissant les dénominateurs au lieu de faire usage de la virgule.

60. *Multiplication abrégée.* — On doit souvent multiplier l'une par l'autre deux fractions décimales d'un très grand nombre de chiffres; et comme il se peut qu'on n'ait besoin du produit qu'avec une certaine approximation, il est utile de posséder une méthode qui permette d'abréger les calculs en négligeant dans les opérations les chiffres qui n'influent pas sur le résultat dont on a besoin.

Voici la méthode d'Oughtred.

Soit à trouver le produit du nombre 4,356362785 par 324,502038965, à moins d'un millième près.

Écrivons le chiffre 4 des unités du multiplicateur, sous le chiffre du multiplicande qui représente des unités 100 fois plus petites que celles qui marquent le degré d'approximation qu'on veut obtenir. Ici donc, ce chiffre 4 devra être placé sous le chiffre 6 qui représente des cent-millièmes dans le multiplicande. Écrivons tous les autres chiffres du multiplicateur dans l'ordre inverse de celui où ils doivent se trouver d'après la règle de la numération, c'est-à-dire dans un ordre tel que chaque chiffre représente des unités dix fois plus grandes que celles représentées par le chiffre qui se trouve à sa gauche. Par suite de cette disposition, le produit du chiffre des unités du multiplicateur par le chiffre sous lequel il est écrit,

```
        4,3 5 6 3 6 2 7 8 5
5 6 9 8 3 0 2 0 5,4 2 3
      1 3 0 6 9 0 8 8 1
          8 7 1 2 7 2 4
          1 7 4 2 5 4 4
            2 1 7 8 1 5
                  8 7 0
                    1 2
      1 4 1 3,6 4 8 4 6
```

représente des centièmes de la fraction qui marque l'approximation, et la même chose peut se dire du produit de tout autre chiffre du multiplicateur par celui sous lequel il est écrit. Car, en passant d'un chiffre du multiplicateur à celui qui est à sa droite, celui-ci représente des unités 10 fois plus grandes, tandis que le chiffre sous lequel il est écrit représente des unités 10 fois plus petites, que celui qui le précède dans le multiplicande. Tous les produits dont il s'agit sont donc du même ordre. Par conséquent si, pour chaque chiffre du multiplicateur, on néglige dans le multiplicande tous ceux qui se trouvent à droite de celui sous lequel il est écrit, les produits partiels représenteront tous des unités cent fois plus petites que la fraction qui marque l'approximation, c'est-à-dire des 100000[es]; on formera donc successivement les produits partiels du multiplicande par les chiffres 3, 2, 4, 5, 0, 2, 0 et 3 du multiplicateur, en négligeant chaque fois les chiffres du multiplicande placés à droite de celui par lequel on multiplie. Tous ces produits partiels représentant des cent-millièmes, on les écrira les uns sous les autres, et on les additionnera. La somme, divisée par 100000, sera approximativement le produit cherché. On séparera donc les 5 derniers chiffres à droite par une virgule, et on supprimera les deux derniers, pour ne conserver que les millièmes.

Pour connaître le degré d'approximation, observons qu'en formant l'un quelconque des produits partiels, la partie qu'on néglige à la droite du multiplicande est moindre qu'une unité de l'ordre de celles du dernier chiffre conservé; par exemple, en multipliant par 4, chiffre des unités du multiplicateur, on néglige au multiplicande moins d'un cent-millième, et au produit moins de 4 cent-millièmes. De même dans le produit partiel qui correspond au chiffre 5 représentant les dixièmes du multiplicateur, on néglige moins de 5 cent-millièmes, et ainsi de suite. On néglige donc, en totalité, un nombre de cent-millièmes moindre que la somme des chiffres par lesquels on multiplie. Quant à la partie du multiplicateur qu'on néglige vers la gauche parce qu'aucun chiffre n'y correspond dans le multiplicande, elle est moindre que la fraction qu'on obtient en forçant d'une unité le premier de ses chiffres à droite. Ici ce chiffre forcé est 9, dont le produit par le multiplicande serait moindre que 9 cent-millièmes.

L'erreur est donc un nombre de cent-millièmes moindre que la somme qu'on obtient en additionnant les chiffres du multiplicateur qui ont servi

à former les produits partiels et en y ajoutant le premier chiffre négligé au multiplicateur, forcé d'une unité. Si cette somme est moindre que cent, on est certain que la partie négligée au produit est plus petite qu'un millième.

61. *Division ordonnée de Fourier.* — Il existe aussi des méthodes pour abréger la division ; nous exposerons celle qui est connue sous le nom de division ordonnée de Fourier (*).

Formons le produit des 2 polynômes

$$M = aB^m + a_1B^{m-1} + a_2B^{m-2} + \cdots + a_{i-1}B^{m-i+1} + a_iB^{m-i} \cdots,$$
$$N = bB^n + b_1B^{n-1} + b_2B^{n-2} + \cdots + b_{i-1}B^{n-i+1} + b_iB^{n-i} \cdots;$$

nous aurons

$$MN = abB^{m+n} + \left.\begin{array}{l} ab_1 \\ +a_1b \end{array}\right| B^{m+n-1} + \left.\begin{array}{l} ab_2 \\ +a_1b_1 \\ +a_2b \end{array}\right| B^{m+n-2} + \cdots + \left.\begin{array}{l} ab_{i-1} \\ +a_1b_{i-2} \\ +a_2b_{i-3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ +a_{i-1}b \end{array}\right| B^{m+n-i+1} + \left.\begin{array}{l} ab_i \\ +a_1b_{i-1} \\ +a_2b_{i-2} \\ + \\ \cdot \\ \cdot \\ +a_ib \end{array}\right| B^{m+n-i} \ldots$$

Divisons MN par M, et faisons l'opération de telle manière qu'après avoir déterminé un terme quelconque du quotient, nous puissions nous arrêter sans avoir fait de calculs inutiles. A cet effet, il suffit de mettre successivement en évidence les produits partiels du premier terme aB^m du diviseur par les divers termes du quotient.

Ces produits partiels, tous écrits sur la première ligne, sont :

$$abB^{m+n} + ab_1B^{m+n-1} + ab_2B^{m+n-2} + \cdots$$

Divisons abB^{m+n} par le premier terme du diviseur, aB^m ; nous aurons ainsi le premier terme du quotient. Retranchons du dividende abB^{m+n}.

La plus haute puissance de B dans le reste sera B^{m+n-1}. Retranchons de ce reste le produit du premier terme, bB^n, du quotient par le second

(*) Voir FOURIER, *Analyse des équations déterminées*. — Voir aussi la note de M. SCHAAR, « sur la division ordonnée de FOURIER », *Bulletins de l'Acad. des sc. de Bruxelles*, 1851, t. 18.

terme, a_1B^{m-1}, du diviseur; nous aurons ainsi mis en évidence le produit partiel, ab_1B^{m+n-1}, du premier terme du diviseur par le second terme du quotient; donc si nous divisons ce produit par le premier terme du diviseur, nous aurons le second terme du quotient. Écrivons au quotient ce second terme, b_1B^{n-1}, et retranchons du dividende le terme ab_1B^{m+n-1} qui a servi à le trouver.

La plus haute puissance de B dans le reste sera alors B^{m+n-2}. Corrigeons le groupe de termes où B entre à cette puissance, des produits partiels du premier terme de quotient par le troisième du diviseur et du second terme du quotient par le second du diviseur. Nous aurons mis en évidence le produit du troisième terme du quotient par le premier du diviseur.

Continuons à suivre la même marche pour déterminer les autres termes du quotient; et en général, après avoir déterminé le terme $b_{i-1}B^{n-i+1}$ du quotient, et supprimé le terme $ab_{i-1}B^{m+n-i+1}$ du dividende, la plus haute puissance de B dans le reste sera B^{m+n-i}. Nous devrons alors corriger le groupe des termes où B entre à cette puissanee, des produits partiels du premier terme du quotient par le terme a_iB^{m-i} du diviseur; du second terme du quotient par $a_{i-1}B^{m-i+1}$, et ainsi de suite, jusqu'au produit du dernier terme, $b_{i-1}B^{n-i+1}$, du quotient, par le second terme, a_1B^{m-1}, du diviseur; nous aurons alors mis en évidence ab_iB^{m+n-i}, terme qui, divisé par le premier, aB^m, du diviseur, donne un nouveau terme, b_iB^{n-i}, du quotient.

On voit que, dans cette méthode, on ne fait usage d'un terme du diviseur que quand cela est strictement nécessaire pour déterminer un nouveau terme du quotient.

Supposons maintenant que B soit la base du système de numération, que M et N soient deux nombres et que les chiffres qui composent ces derniers soient a, a_1, a_2, ... et b, b_1, b_2, ... respectivement. Nous appellerons B^m une unité de l'ordre B^m, de sorte que le nombre M contient a unités de l'ordre B^m, a_1 unités de l'ordre B^{m-1}, et ainsi de suite.

La méthode exposée plus haut pour la division des polynômes algébriques ne serait applicable à ces nombres que si le groupe de termes qui se rapporte à une puissance quelconque de B, n'était pas affecté par ceux qui répondent aux puissances plus faibles. Mais en général le coefficient d'une puissance telle que B^{m+n-i}, sera un nombre plus grand que B. Dès lors la somme des termes en B^{m+n-i} contiendra des unités de l'ordre de $B^{m+n-i+1}$, qui devront être retenues et ajoutées aux unités de cet ordre.

Il en résulte que si, pour les unités d'un ordre quelconque, B^{m+n-i} par exemple, on a fait toutes les corrections indiquées précédemment, ce qui restera du coefficient de B^{m+n-i}, contiendra encore ab_i, plus les retenues en question. En divisant ce reste par a, on obtiendra donc le chiffre b_i du quotient, ou un chiffre plus fort; et il est par conséquent nécessaire de trouver le caractère auquel on pourra reconnaître si le chiffre trouvé est le chiffre exact du quotient ou s'il est trop fort. A cet effet, nous chercherons une limite supérieure des retenues qui peuvent influer sur les unités de l'ordre B^{m+n-i} du produit MN.

La limite cherchée n'est autre chose qu'une limite supérieure de la somme des termes qu'on négligerait au produit, si on ne tenait compte, en faisant la multiplication, que des produits partiels contenant au moins la puissance B^{m+n-i}. Il suffira donc d'examiner ce que serait dans cette hypothèse, pour chacun des termes du multiplicateur, la partie négligée du produit.

Pour le terme bB^n du multiplicateur, il serait tenu compte des termes du multiplicande jusqu'à a_iB^{m-i} inclusivement. La somme des suivants est inférieure à B^{m-i}; donc la partie négligée du produit serait moindre que bB^{m+n-i}.

De même, pour le terme b_1B^{n-1} du multiplicateur, on négligerait la somme des termes du multiplicande à partir de a_iB^{m-i}. Cette somme étant moindre que B^{m-i+1}, le produit négligé serait inférieur à b_1B^{m+n-i}.

En répétant le même raisonnement, on trouve que, pour chaque chiffre du multiplicateur, jusqu'à b_i, la partie négligée du produit serait moindre que ce chifre multiplié par B^{m+n-i}; cela donne donc une quantité négligée moindre que

$$(b + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_i)\, B^{m+n-i}.$$

Mais on négligerait en outre tous les termes du multiplicateur qui suivent b_iB^{n-i}. Leur somme est moindre que B^{n-i}. Le multiplicande étant lui-même moindre que $(a+1)\,B^m$, en le multipliant par la partie négligée du multiplicateur, on aurait un produit moindre que $(a+1)\,B^{m+n-i}$; donc, la partie du produit que l'on néglige, et par suite la somme des retenues qui peuvent influer sur le terme en B^{m+n-i}, est toujours moindre que

$$(b + b_1 + b_2 \cdots + b_i + a + 1)\, B^{m+n-i}.$$

Cela posé, admettons que le terme en B^{m+n-i} ait été corrigé de

$$(a_i b + a_{i-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{i-1}) B^{m+n-i}$$

et qu'on veuille déterminer b_i.

On observera que le coefficient corrigé de B^{m+n-i} contient encore le produit ab_i, plus les retenues. Donc, si on divise par a ce coefficient corrigé et qu'on désigne par q le quotient et par r le reste de la division, on aura d'abord $aq + r = ab_i + \textit{les retenues}$, ou $q + \frac{r}{a} => b_i$; d'autre part, $aq + r$ est moindre que la somme qu'on obtient en ajoutant à ab_i la limite supérieure des retenues qui vient d'être calculée; on a donc aussi

$$aq + r < ab_i + b + b_1 + b_2 + \cdots + b_i + a + 1$$

ou

$$aq + r < (a+1)(b_i + 1) + b + b_1 + b_2 \cdots + b_{i-1}.$$

L'inégalité $q + \frac{r}{a} => b_i$ montre que q ne saurait être moindre que b_i. Comme nous l'avons déjà dit, le chiffre q ne peut donc être trop faible; mais à cause des retenues, il peut être trop fort.

Supposons que q soit trop fort; on aura $q => b_i + 1$ et on pourra, dans la dernière des inégalités qui précèdent, écrire q à la place de $b_i + 1$; par conséquent,

$$aq + r < b + b_1 + b_2 \cdots + b_{i-1} + (a+1) q,$$

ou simplement

$$r < b + b_1 + b_2 + \cdots + b_{i-1} + q.$$

Si le chiffre q est trop fort, le reste r de la division sera donc moindre que la somme des chiffres trouvés au quotient. Donc on peut affirmer que *si le reste r est au moins égal à cette somme, le dernier chiffre trouvé q est exact*. Si r est moindre, on reste dans le doute, et il est nécessaire de s'assurer autrement si le chiffre q n'est pas trop fort. Dans le numéro suivant, en appliquant la règle de la division ordonnée à un exemple, nous indiquerons comment on y parvient.

62. Soit à diviser le nombre 12345648... par 234567... Ces deux nombres seront supposés écrits dans le système décimal, de sorte qu'on

aura $B = 10$. Les chiffres peuvent, d'ailleurs, être en nombre quelconque, aussi bien au dividende qu'au diviseur. Il pourrait même y avoir des décimales; cela ne changerait rien au raisonnement; il y aurait seulement des termes où B entrerait en dénominateur. Si la fraction décimale n'était pas limitée, on regarderait le dernier coefficient comme fractionnaire, afin de n'avoir à considérer qu'un polynôme d'un nombre limité de termes.

On peut toujours trouver, comme dans une division ordinaire, quelles sont les unités de l'ordre le plus élevé représentées au quotient; et en désignant celles-ci par B^n, nous pourrons écrire le quotient cherché sous la forme

$$N = bB^n + b_1B^{n-1} + b_2B^{n-2} + \cdots,$$

$b, b_1, b_2, b_3, \cdots$ étant les chiffres à déterminer.

De même, le diviseur pourra s'écrire sous la forme

$$M = aB^m + a_1B^{m-1} + a_2B^{m-2} + \cdots$$

et il est permis de prendre pour a, au lieu du premier chiffre à gauche du diviseur, l'ensemble des deux premiers ou même plus de deux. Ce nombre a est ce que Fourier appelle le *diviseur désigné*. Nous prendrons $a = 23$; d'où $a_1 = 4$, $a_2 = 5, \ldots$; a sera considéré comme un seul chiffre.

Le dividende pourra s'écrire sous la forme du produit MN du n° 61. On aura les unités de l'ordre B^{m+n} en séparant vers la gauche assez de chiffres pour que le diviseur désigné soit contenu dans le nombre ainsi formé au moins une fois et moins de 10 fois; dans l'exemple actuel on trouvera ainsi 123 unités de l'ordre B^{m+n}. Celles-ci contiennent le produit de $23B^m$ par bB^n, plus les retenues.

Divisons donc 123 par le diviseur désigné 23. Nous aurons pour quotient 5 et pour reste 8. Afin de savoir si le chiffre 5 n'est pas trop fort, il suffit d'appliquer le criterium trouvé plus haut. Si 5 était trop fort, le reste de la division devrait être moindre que le quotient; or ici, ce reste, 8, surpasse le quotient 5. Donc celui-ci ne saurait être trop fort et, par conséquent, il est exactement le chiffre b que nous cherchons. Le reste que nous obtenons après avoir soustrait de 123 le produit de 23 par 5 provient des reports.

A côté du reste 8 abaissons le chiffre 4 du dividende; nous trouvons ainsi 84 unités de l'ordre B^{m+n-1}, lesquelles contiennent le produit partiel connu des 4 unités de l'ordre B^{m-1} du diviseur par les 5 unités de l'ordre B^n du quotient; plus celui de 23 B^m par les unités cherchées de l'ordre B^{n-1} du quotient, plus les reports.

```
B^(m+n)                          B^m
12345648. ...........  |  2345678...
      115   = 23.5     |  52631...
B^(m+n-1)....84               B^n
       20   = 4.5
       64
       46   = 23 2
B^(m+n-2)...185
       33   = 5.5 + 4.2
      152
      138   = 23.6
B^(m+n-3) ....146
       64   = 6.5 + 5.2 + 4.6
       82
       69   = 23.3
       13
B^(m+n-4).....824
        77 = 7.5 + 6.2 + 5.6
       747
       702 = 234.3
        45
        23 = 23.1
        22
```

Corrigeons 84 du produit 4 × 5. Divisons le reste 64 par 23, ce qui donne le quotient 2 et le reste 18. Ce reste est plus grand que la somme 5 + 2 des chiffres trouvés au quotient. Donc 2 est exactement le deuxième chiffre cherché, et le reste 18 provient entièrement des retenues.

A côté de 18 abaissons le chiffre 5 du dividende, ce qui donne 185 unités de l'ordre B^{m+n-2}; puis remarquons que 185 renferme :

1° le produit du 3e chiffre du diviseur par le 1r chiffre du quotient;
2° » » » 2e » » » » 2e » » ;
3° » » » diviseur désigné 23, » 3e » » ;
4° les retenues.

Les deux premiers produits sont connus. Soustrayons leur somme, soit 5.5 + 4.2, de 185, et divisons le reste 152 par 23. Le quotient 6 sera le troisième chiffre du quotient cherché, ou un chiffre plus fort; mais comme le reste 14 est plus grand que la somme (5 + 2 + 6) des chiffres trouvés au quotient, on peut affirmer que 6 est exact. Le reste 14 représente les retenues.

En abaissant le chiffre 6 du dividende, on obtient 146 unités de l'ordre B^{m+n-3}. De ces 146 unités retranchons

1° le produit du 4e chiffre du diviseur par le 1r du quotient;
2e » 3e » » » 2e » ;
3e » 2e » » » 3e » ;

c'est-à-dire la somme $6.5 + 5.2 + 4.6 = 64$. Le reste 82 contiendra encore le produit du diviseur désigné 23 par le quatrième chiffre du quotient, plus les unités de report. En divisant 82 par 23 on obtient 3 ; et si le reste 13 égalait au moins la somme des chiffres, $5 + 2 + 6 + 3$, trouvés au quotient, le dernier de ces chiffres serait exact; mais ici cela n'est pas; une vérification ultérieure est donc nécessaire pour s'assurer si 3 n'est pas trop fort.

Si l'on écrivait au quotient un chiffre trop grand, en continuant les opérations, on finirait par en être averti, parce que les soustractions deviendraient impossibles; mais on peut aussi, comme nous allons le faire voir, changer le diviseur désigné.

Remarquons que, si on prend un diviseur désigné composé de 2 chiffres et non d'un seul, c'est parce que le reste de chaque division partielle est moindre que le diviseur; d'où il résulte que, quand la somme des chiffres trouvés au quotient atteint une valeur au moins égale au diviseur désigné, il devient impossible de faire usage du caractère qui sert à reconnaître l'exactitude d'un nouveau chiffre du quotient.

Donc dès que la somme des chiffres déjà obtenus au quotient égale le diviseur désigné, il y a nécessité d'augmenter celui-ci, et de faire a égal à l'ensemble des 3 premiers chiffres du diviseur. C'est par un tel changement que nous vérifierons le chiffre 3. On va voir que cela peut se faire sans revenir sur les opérations déjà effectuées.

Faisons $a = 234$. Ce sont des unités de l'ordre B^{m-1}. Examinons où en serait l'opération après la détermination du troisième chiffre, 6, du quotient, si on avait fait usage, pour le déterminer, du diviseur désigné 234.

Le troisième chiffre, 6, ayant été reconnu exact, en le multipliant par le diviseur désigné 234, on aurait obtenu le produit 6×234, représentant des unités de l'ordre B^{m+n-3}. Après qu'on aurait retranché ce produit du dividende, celui-ci aurait été corrigé de tous les produits partiels de l'ordre B^{m+n-3}, sauf cependant celui provenant de la multiplication de 23 B^m par les unités d'ordre B^{n-3} que représente le quatrième chiffre, encore inconnu, du quotient. Le reste eût donc été identique à celui dont nous nous sommes servi ci-dessus pour déterminer ce quatrième chiffre, c'est-à-dire à 82 B^{m+n-3}.

Donc, après avoir effectué la division partielle qui détermine le troisième chiffre du quotient, au moyen du diviseur désigné 234, on trouve pour reste 82 B^{m+n-3}.

Pour continuer l'opération il faut abaisser le chiffre suivant, 4, du dividende, lequel représente des unités de l'ordre B^{m+n-4} ; on obtient ainsi le dividende partiel 824, lequel contient :

1° Le produit du 1r chiffre du quotient par le 4e du diviseur;
2° » » 2e » » » 3e » ;
3° » » 3e » » » 2e » ;
4° » » 4e » » » diviseur désigné ;
5° Les retenues.

Après avoir corrigé 824 de la somme $(7.5 + 6.2 + 5.6 = 77)$ des trois premiers produits partiels, le reste 747 divisé par 234 donne le quotient 3, et le reste 45. Ce reste étant plus fort que la somme $5 + 2 + 6 + 3$ des chiffres obtenus au quotient, 3 est exactement le quatrième chiffre cherché, et on pourra continuer la division en opérant toujours de la même manière.

On pourrait aussi, après s'être assuré au moyen du diviseur 234 que le chiffre 3 est bon, revenir au diviseur désigné 23 ; en effet, le reste $45\ B^{m+n-4}$, obtenu après avoir retranché du dividende le produit partiel $234\ B^{m-1} \times 3\ B^{m-3}$, n'est autre chose que le dividende partiel corrigé qu'il faut diviser par $23\ B^{m}$ pour obtenir le cinquième chiffre du quotient. En effectuant la division on trouve le quotient $1.\ B^{n-4}$, et le reste $22\ B^{m+n-4}$. Comme 22 est plus grand que la somme $5 + 2 + 6 + 3 + 1$ des chiffres trouvés au quotient, 1 est exactement le cinquième chiffre demandé.

Par cette méthode on n'emploie chaque chiffre du diviseur que quand cela devient strictement nécessaire pour trouver un chiffre de plus au quotient. On ne fait donc aucun calcul inutile.

§ 6. Des divers systèmes de numération.

63. Les principes sur lesquels repose notre système de numération sont indépendants du nombre d'unités simples dont se compose l'unité du second ordre ; ou, en d'autres termes, de la base du système pour laquelle on pourrait faire choix de tel nombre qu'on voudrait, au lieu du nombre 10.

La convention adoptée pour la numération écrite peut être appliquée quelle que soit la base. Si celle-ci est B, il faut B chiffres pour écrire tous les nombres possibles ; et chaque chiffre écrit à la gauche d'un autre

représente des unités B fois plus grandes que celles représentées par ce dernier.

On suppose assez généralement que c'est l'habitude de compter sur les doigts qui a déterminé la base du système usuel. Tout autre système eût pu prévaloir, et il est à remarquer que le système duodécimal, c'est-à-dire celui dont la base est 12, serait, à certains égards, plus avantageux que le système décimal, parce que 12, sans être un nombre trop grand, a plus de diviseurs que 10. Dans ce qui suit, nous ferons certaines opérations dans le système duodécimal et, à cet effet, nous représenterons le nombre $9+1$ par a et $a+1$ par b. Le nombre $b+1$ sera représenté par 10, d'après la convention fondamentale.

En ce qui concerne la numération parlée, il n'existe pas de conventions pour les systèmes autres que le système décimal : on n'a pas de mots analogues aux mots cent, mille, million, etc. Les nombres s'énoncent donc assez difficilement dans un système autre que le système décimal.

Dans ce qui va suivre nous conviendrons, pour abréger, de faire usage de la notation $(ab13)_{12}$, pour indiquer un nombre écrit dans le système à base 12. Il contient donc 3 unités simples ; une unité du second ordre, ou 1 fois douze ; onze unités du troisième ordre ou 11 fois le carré de 12 ; et enfin dix unités du quatrième ordre, ou 10 fois le cube de 12. De même, $(203)_8$ indiquerait un nombre écrit dans le système à base 8, et contenant par conséquent 3 unités simples, plus 2 fois le carré de 8. Quand il n'y aura aucun indice, le nombre sera censé écrit dans le système décimal.

64. Un nombre étant écrit dans le système à base B, on peut se proposer de l'écrire dans le système à base B'. Les opérations peuvent se faire par trois méthodes différentes. Nous les appliquerons successivement au nombre $(5a62)_{12}$ que nous ferons passer dans le système à base 8.

1° *Par multiplication.* — Remarquons que le nombre comprend deux unités, plus six fois douze, plus dix fois le carré de 12, plus 5 fois la troisième puissance de 12.

Effectuons, dans le système à base 8, ces diverses multiplications, et additionnons les produits.

Dans le système à base 8, le nombre 12 s'écrira 14, puisque 12 contient 4 unités simples ; plus une unité du second ordre du système à base 8.

Pour former le carré de $(14)_8$, multiplions d'abord ce nombre par 4 unités simples. A cet effet on dira : 4 fois 4 font 16, ou 2 fois 8 ; on pose zéro et on retient 2 ; 4 fois 1 font 4 et deux unités retenues font 6 ; on pose 6. Multipliant ensuite $(14)_8$, par l'unité du second ordre du multiplicateur, on obtient $(14)_8$ unités de cet ordre, qu'on écrit sous le premier produit partiel, en ayant soin de placer le chiffre 4 sous le chiffre 6. On additionne ensuite les 2 produits partiels. La première colonne donne zéro ; la seconde donne 10, qui contient 1 fois 8 plus 2. On pose 2 et on retient 1. Cette unité étant reportée à la colonne suivante, on trouve 2 unités du troisième ordre et le produit est $(220)_8$.

$$\begin{array}{r} 14 \\ 14 \\ \hline 60 \\ 14 \\ \hline 220 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 220 \\ 14 \\ \hline 1100 \\ 220 \\ \hline 3300 \end{array}$$

La troisième puissance de 12 se forme d'une manière analogue. L'opération est indiquée ci-contre. On trouve $12^3 = (3300)_8$.

Formons maintenant les divers produits dont se compose le nombre donné et additionnons-les ; nous aurons :

$$\begin{array}{rcl} & & 2 \\ (60)_{12} = (\ 6 \times 14)_8 & = & (110)_8 \\ (a00)_{12} = (12 \times 220)_8 & = & (2640)_8 \\ (5000)_{12} = (\ 5 \times 3300)_8 & = & (20700)_8 \\ & & (23652)_8, \end{array}$$

et, par conséquent,

$$(5a62)_{12} = (23652)_8.$$

2° *Par division.* — Quand on opère dans le système à base 12, au lieu d'une série de multiplications, on doit faire des divisions.

$$\begin{array}{r|l} 5a62 & 8 \\ \cline{2-2} 66 & 899 \\ 62 & \\ 2 & \end{array}$$

On cherche d'abord combien de fois le nombre donné contient la nouvelle base 8, c'est-à-dire combien il renferme d'unités du second ordre du système auquel on veut passer.

Cette division se fait comme il suit : on sépare les deux premiers chiffres à gauche du dividende, soit $(5a)_{12}$. Ce nombre vaut 5 fois 12 plus 10, ou 70, et contient 8 fois 8, plus 6. On écrit donc 8 au quotient et à côté du reste 6, on abaisse le troisième chiffre 6 du dividende. Le nombre $(66)_{12}$ vaut 6 fois 12, plus 6 ou 78 ; 8 y est contenu 9 fois avec le reste 6. On écrit 9 au quotient et on abaisse le chiffre 2 du dividende à côté du reste 6. Le nombre $(62)_{12}$ vaut

$$6 \times 12 + 2 = 74$$

et contient 9 fois 8, plus 2; on a donc le quotient $(899)_{12}$, qui représente les unités du second ordre du système à base 8, que contient le nombre donné. Le reste 2 représente les unités simples.

$$\begin{array}{r|l} 899 & 8 \\ \cline{2-2} 19 & 112 \\ 5 & \end{array}$$

On cherchera ensuite combien il entre d'unités de troisième ordre du système à base 8 dans les $(899)_{12}$ unités du second ordre, en divisant ce nombre par 8. La division fait voir qu'il y a dans ce nombre donné $(112)_{12}$ unités du troisième ordre, plus 5 unités du second ordre; en continuant de la même manière, on trouvera les unités du quatrième et du cinquième ordre par les 2 divisions indiquées ci-contre :

$$\begin{array}{r|l} 112 & 8 \\ \cline{2-2} 52 & 17 \\ 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 17 & 8 \\ \cline{2-2} 3 & 2 \end{array}$$

Le nombre donné contient donc en définitive 2 unités simples, plus 5 fois 8, plus 6 fois 8^2, plus 3 fois 8^3, plus 2 fois 8^4, et on a

$$(5a62)_{12} = (23652)_8.$$

3° *Par multipliation et division.* — Si on fait toutes les opérations dans le système à base 10, on a successivement

$$(5a62)_{12} = 2 + 6.12 + 10.12^2 + 5.12^3 \ ; \ (5a62)_{12} = 10154.$$

$$10154 = 2 + 1269 \times 8 = 2 + 5.8 + 158.8^2 = 2 + 5.8 + 6.8^2 + 19.8^3 = 2 + 5.8 + 6.8^2 + 3.8^3 + 2.8^4,$$

d'où

$$(5a62)_{12} = (23652)_8.$$

Cette dernière méthode, fait passer le nombre donné par le système décimal, dans lequel on a l'habitude de compter. On s'en fait ainsi une idée plus nette que quand il est écrit dans les deux autres systèmes.

§ 7. Théorie de la divisibilité des nombres.

65. Théorème I. — *Quand un nombre en divise deux autres, il divise leur somme et leur différence.*

Car si chacun des deux nombres vaut un certain nombre de fois le diviseur dont il s'agit, leur somme et leur différence valent aussi un certain nombre de fois le diviseur ; en d'autres termes, leur somme et leur différence sont divisibles exactement par ce diviseur.

Si un nombre en divise plusieurs autres, il divise leur somme pour le même motif.

Corollaire. — *Tout nombre qui en divise un autre divise ses multiples.*

Car tout diviseur d'un nombre N divise la somme de plusieurs nombres égaux à N.

66. Théorème II. — *Tout nombre d qui divise a et b divise le reste r de la division de a par b, et réciproquement.*

Car, si q est le quotient de la division, on a $a = bq + r$; donc r vaut a diminué d'un multiple de b. Or, par hypothèse, d divise b, et par conséquent le multiple bq; d divise également a; donc il divise la différence $a - bq$ ou r. Réciproquement, a se composant de r plus un multiple de b, si r est divisible par d en même temps que b, et par conséquent que bq, les deux parties qui composent a sont divisibles par d et a doit l'être également.

67. Théorème III. — *Le plus grand commun diviseur de deux nombres a et b est le même que celui de b et de r, r étant le reste de la division de a par b.*

Car tout diviseur commun de a et de b est aussi diviseur commun de b et de r, et réciproquement. Si on formait le tableau de tous les diviseurs de a et de b, il serait donc le même que le tableau de tous les diviseurs de b et de r. En particulier le plus grand commun diviseur de a et de b est donc aussi le même que le plus grand commun diviseur de b et de r.

Premier corollaire. — De cette proposition on déduit comme corollaire la règle suivante pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.

Soit a le plus grand de ces nombres et b le plus petit; divisons a par b, et soit r le reste de la division. Si $r = 0$, b est un commun diviseur de a et de b; et comme b n'est divisible par aucun nombre plus grand que lui-même, ce sera le plus grand commun diviseur cherché. Si le reste r n'est pas nul, la question est ramenée à trouver le plus grand commun diviseur de b et du nombre r moindre que b.

Divisons b par r et soit r' le reste de la division; on verra, comme plus haut, que si r' est nul, r est le plus grand commun diviseur de r et de b, et par conséquent aussi celui de a et de b. Si r' n'est pas nul, la question est ramenée à trouver le plus grand commun diviseur de r et du reste r' moindre que r.

En continuant ainsi on aura une série de restes $r, r', r'', \ldots$; et, chacun de ces nombres entiers étant moindre que le précédent, on finira par trouver un reste nul. Le reste précédent sera alors le plus grand commun diviseur cherché.

Deuxième corollaire. — Si les deux nombres sont premiers entre eux, leur plus grand commun diviseur est l'unité; l'avant-dernier reste sera donc alors 1, le dernier étant zéro. Réciproquement, si un des restes est l'unité, le reste suivant sera nul, et les deux nombres, ayant l'unité pour plus grand commun diviseur, seront premiers entre eux.

Troisième corollaire. — Tout diviseur commun de a et de b divise leur plus grand commun diviseur. Car tout diviseur commun de a et de b divise r; tout diviseur commun de b et de r divise r', et ainsi de suite. De sorte qu'un diviseur commun de a et de b divise tous les restes r, r', r''... etc.; et, par conséquent, le plus grand commun diviseur de a et de b, qui est l'avant-dernier de ces restes.

68. Lemme. — *Si un nombre a divisé par p donne le quotient q et le reste r, et qu'on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre b, la division de ab par pb donnera encore le quotient q, et le reste sera br.*

Car $a = pq + r$, et pour multiplier a par b, il faut multiplier par b les deux parties pq et r dont a se compose. On a alors $ab = pb \times q + rb$. Or on a $r < p$, d'où $rb < pb$; le produit ab contient donc q fois le produit pb, avec un reste rb moindre que pb. C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Si un nombre p divise le produit ab, et qu'il soit premier avec a, il divise b.*

En effet, appliquons le procédé du plus grand commun diviseur aux deux nombres a et b, premiers entre eux ; l'avant-dernier reste sera 1, et le dernier zéro. Désignons par r, r', r'', ... 1, 0, les restes successifs. Cherchons ensuite le plus grand commun diviseur des deux produits $a.b$ et $b.p$. Il résulte du lemme qui précède que les quotients des divisions successives seront les mêmes, mais qu'on aura les restes.

$$rb, \quad r'b, \quad r''b, \ldots b, \quad 0.$$

Par conséquent b est le plus grand commun diviseur entre ab et bp. Or p est un diviseur de ab par hypothèse ; c'est évidemment aussi un diviseur de bp. Donc p divise le plus grand commun diviseur de ab et bp, c'est-à-dire que p divise b. C. Q. F. D.

Premier corollaire. — *Tout facteur premier p qui divise un produit abcd, divise l'un des facteurs de ce produit.*

Car s'il ne divise pas a il est premier avec a et il doit diviser le

produit bcd. Alors, s'il ne divise pas b, il doit diviser cd et, par conséquent, l'un des facteurs c ou d. On voit que ce raisonnement s'applique quel que soit le nombre des facteurs du produit.

En particulier si p, nombre premier, divise a^m, il divise a.

Deuxième corollaire. — *Si a est premier avec b, a^m est premier avec b^n.*

Car tout nombre premier qui diviserait à la fois a^m et b^n, devrait diviser aussi a et b.

Troisième corollaire. — *Si p est premier avec les deux facteurs a et b d'un produit ab, il est premier avec ce produit.*

Car soit, s'il est possible, d un facteur premier commun à p et ab. Alors d devrait diviser a ou b, et par conséquent un de ces nombres aurait un facteur d commun avec p, ce qui est impossible. Le théorème se démontrerait de la même manière pour un produit de plusieurs facteurs.

Quatrième corollaire. — *Un nombre* N *divisible par plusieurs facteurs $a, b, c, d, \ldots$ premiers entre eux, est divisible par le produit $abcd$.*

Prouvons d'abord que, a et b étant deux diviseurs premiers entre eux, le produit ab divise N.

On a $N = aq$, q étant un nombre entier ; et puisque b, qui divise aussi N ou aq, est premier avec a, il faut qu'il divise q. On a donc $q = bq'$, et $N = a \times bq' = ab \times q'$, q' étant un nombre entier. Donc N est divisible par ab.

Si on considère maintenant le facteur c, il est premier avec ab ; donc ab et c étant deux facteurs premiers entre eux, leur produit divise N d'après ce qui vient d'être démontré. N est donc divisible par abc. On continuerait de la même manière pour faire voir que N est divisible par le produit $abcd \ldots$

69. Théorème V. — *Un nombre* N *ne peut être décomposé en facteurs premiers que d'une seule manière.*

Admettons qu'on ait effectué de deux manières différentes la décomposition d'un nombre N en facteurs premiers. Soient $a, b, c, \ldots$ les facteurs trouvés par la première manière et $a', b', c', \ldots$ ceux trouvés par la seconde manière ; on aura

$$abcd \ldots kl = a'b'c'd' \ldots k'l'.$$

Je dis que les facteurs premiers $a', b', c', \ldots$, ne peuvent différer de $a, b, c, \ldots$; car le nombre premier a divisant le produit $a'b'c' \ldots k'l'$, doit diviser l'un des facteurs de ce produit, ce qui ne se peut à moins qu'il ne soit identique à l'un d'eux, et qu'on n'ait, par exemple, $a = a'$.

On aura donc aussi

$$bcd \ldots kl = b'c'd' \ldots k'l'.$$

On prouvera, comme ci-dessus, que b doit être identique à l'un des facteurs b' du second membre, et on en conclura

$$cd \ldots kl = c'd' \ldots k'l'.$$

En continuant ainsi, on verra qu'à chacun des facteurs $c, d, \ldots$ correspond un facteur identique, c' d', ... etc.

Rien ne s'oppose à ce que quelques-uns des facteurs $a, b, c, \ldots$ soient égaux; la démonstration s'applique donc au cas où les facteurs sont élevés à des puissances quelconques.

Premier corollaire. — *Un nombre quelconque* N *a pour diviseurs, outre ses facteurs premiers, les produits de ceux-ci pris deux à deux. trois à trois, etc., et ne saurait en avoir d'autres.*

D'abord, le produit d'un nombre quelconque de ces facteurs divise N, puisque le quotient de la division est le produit de tous les facteurs restants. Il ne peut d'ailleurs y avoir d'autres diviseurs, car s'il y avait un diviseur différent de ceux que nous venons de considérer, il devrait contenir quelques facteurs premiers qui n'entreraient pas dans N, ou qui n'entreraient dans ce nombre qu'à une puissance moindre. Or cela est impossible, puisque N ne peut être décomposé en facteurs premiers que d'une seule manière.

Deuxième corollaire. — *Deux ou plusieurs nombres ont pour diviseurs communs les produits de leurs facteurs premiers communs pris* 2 *à* 2, 3 *à* 3, ... *etc. Et le plus grand de ces diviseurs communs est le produit de tous les facteurs premiers communs, élevés aux plus hautes puissances communes.*

Cette proposition est une conséquence immédiate de celles qui précèdent.

70. *Caractères de divisibilité.* — Afin de pouvoir facilement décomposer un nombre quelconque en ses facteurs premiers, il importe de connaître les caractères qui permettent de vérifier sans peine, s'il est divisible par un facteur donné.

Les caractères de divisibilité des nombres dépendent de la base du système de numération, bien que la propriété d'un nombre d'être divisible par un autre ne dépende nullement de ce système. Ainsi, dans le système décimal, un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ; dans le système duodécimal, un nombre est divisible par 3 quand le chiffre qui représente les unités simples est divisible par 3 ; et, si un nombre donné satisfait à la première condition quand il est écrit dans le système décimal, on peut affirmer qu'il satisfera aussi à la seconde quand on l'écrira dans le système duodécimal.

Nous supposerons ici que la base du système de numération soit un nombre quelconque B ; pour enseigner cette théorie à des commençants il vaudrait mieux ne pas généraliser autant.

L'artifice ordinairement employé pour reconnaître si un nombre N est divisible par D, consiste à décomposer N, d'après une règle fixe, en deux parties dont la première, n, est toujours divisible par D. De sorte que, quand la seconde partie, n', est divisible par D, il en est de même du nombre N ; et que, dans le cas contraire, le reste de la division de N par D est le même que celui de la division de n' par D.

Pour que le caractère de divisibilité soit d'un usage commode, il faut que n' s'obtienne facilement, et qu'il soit aisé de trouver le reste de la division de n' par D.

71. Soit B la base du système de numération. Si $a, b, c, \ldots$ sont les chiffres d'un nombre N, dans l'ordre où ils sont écrits en avançant de droite à gauche, on aura $N = a + bB + cB^2 + \cdots$ Soit $D < B$ et désignons par Q le quotient, et par R le reste de la division de B par D ; nous aurons $B = DQ + R$, d'où $B - R = DQ$. Donc D est un diviseur de $B - R$.

Je dis maintenant que tout nombre D qui divise $B - R$, divise aussi $B^n - R^n$. Car on a $B^n - R^n = B(B^{n-1} - R^{n-1}) + R^{n-1}(B - R)$, ce qui prouve que si $B^{n-1} - R^{n-1}$ est divisible par D, $B^n - R^n$ le sera également. Or en faisant $n = 2$, on voit que $B^2 - R^2$ est divisible par D. Donc en faisant successivement $n = 3, 4, \ldots$ on trouve aussi que $B^3 - R^3$, $B^4 - R^4$, et en général $B^n - R^n$ sont divisibles par D.

Remarquons ensuite que N peut s'écrire sous cette forme :

$$N = (B - R)b + (B^2 - R^2)c + (B^3 - R^3)d + \cdots$$
$$+ a + bR + cR^2 + dR^3 + \cdots$$

La somme des termes de la première ligne est divisible par D. Donc, si la somme

$$a + bR + cR^2 + dR^3 + \cdots$$

est divisible par D, N le sera également; et dans le cas contraire, cette somme divisée par D, donnera le même reste que N.

72. On peut, au moyen de cette formule, établir un grand nombre de caractères de divisibilité.

En effet, soit $R = 1$; on aura $B - 1 = D.Q$ et

$$N = \text{multiple de } D + (a + b + c + d + \ldots).$$

Le nombre N sera alors décomposé en deux parties, dont l'une est un multiple de D, tandis que l'autre est la somme des chiffres de N. On en conclut que tout facteur de $B - 1$ qui divise la somme des chiffres d'un nombre N, divise ce nombre lui-même; et que si la division ne se fait pas exactement, le nombre N donne le même reste que la somme de ses chiffres.

Faisons $B = 10$; d'où $B - 1 = 9$; les diviseurs de $B - 1$ seront 9 et 3. Donc, *dans le système décimal, un nombre est divisible par* 3 *ou par* 9, *quand la somme des chiffres qui le composent est un multiple de* 3 *ou de* 9.

Faisons ensuite $B = 12$; on aura $B - 1 = 11$. — Donc, *dans le système duodécimal, un nombre est divisible par* 11, *quand la somme des chiffres qui le composent est divisible par* 11.

Posons maintenant $B = 100$, et divisons le nombre N en tranches de deux chiffres, en commençant par la droite, la dernière tranche à gauche pouvant se réduire à un seul chiffre. Chacune des lettres $a, b, c, \cdots$ représentera alors une de ces tranches de 2 chiffres, et les diviseurs de $B - 1$ ou 99 seront 3, 9, 11 et 33.

Nous pouvons en conclure que, *dans le système décimal, un nombre* N *est divisible par* 11 *ou par* 33, *quand la somme des tranches de deux chiffres dans lesquelles nous avons décomposé ce nombre, est divisible par* 11 *ou par* 33. Si la division ne se fait pas exactement, la somme en question donne le même reste que le nombre N.

Si l'on fait $B = 1000$, les lettres $a, b, c, \cdots$ représenteront les nombres qu'on obtient en divisant N en tranches de trois chiffres à partir de la droite; en même temps on aura $B - 1 = 999 = 27 \times 37$. D'où l'on peut conclure que *dans le système décimal un nombre* N *est divisible par* 27 *ou par* 37, *quand la somme des tranches de trois chiffres de ce nombre, à partir de la droite, est divisible par* 27 *ou* 37.

73. Admettons maintenant que $B + 1$ soit un multiple de D ; dans la formule précédente R deviendra égal à -1, et on aura

$$N = \text{multiple de } D + (a - b + c - d + \cdots).$$

En désignant par D un diviseur quelconque de $B + 1$, N sera donc divisible par D quand la somme de ses chiffres de rang impair, en partant de la droite, diminuée la somme de ses chiffres de rang pair, sera divisible par D. Et si la différence en question n'est pas exactement divisible par D, le reste sera le même que celui de la division de N par D.

Au cas où la somme des chiffres de rang pair surpasserait celle des chiffres de rang impair, il suffirait d'ajouter à celle-ci un multiple de D.

Dans cette démonstration on a fait $R = -1$; elle repose donc sur la considération des quantités négatives isolées, c'est-à-dire sur une théorie qui appartient essentiellement à l'algèbre.

Pour éviter cet inconvénient, on peut raisonner comme il suit :

La différence $B^{2n} - R^{2n}$ est divisible par $B + R$. Car elle est divisible par $B^2 - R^2$, qui est divisible par $B + R$; c'est ce qu'on a vu plus haut.

D'autre part, $B^{2n+1} + R^{2n+1}$ est aussi divisible par $B + R$; car on a

$$B^{2n+1} + R^{2n+1} = (B^{2n} - R^{2n})\,B + R^{2n}\,(B + R);$$

et les deux parties du second membre de cette égalité sont divisibles par $B + R$.

On a aussi

$$N = b\,(B + R) + c\,(B^2 - R^2) + d\,(B^3 + R^3) + \cdots$$
$$+ a - b\,R + c\,R^2 - d\,R^3 \cdots$$

Donc, si $B + R$ est divisible par D, le reste de la division de N par D est le même que celui de la différence

$$a + c\,R^2 + \cdots - (b\,R + d\,R^3 + \cdots).$$

Au cas où la soustraction serait impossible, on pourrait à la première somme ajouter un multiple quelconque de D.

En particulier, si $B + 1$ est divisible par D, le reste de la division de N par D est le même que celui de la différence

$$a + c + e \cdots - (b + d + \cdots).$$

Soit $B = 10$; on aura $B + 1 = 11$. Donc

Un nombre écrit dans le système décimal est divisible par 11 *quand la différence entre la somme de ses chiffres de rang impair et la somme de ses chiffres de rang pair est divisible par* 11.

Il est clair que dans le système duodécimal on peut énoncer exactement de la même manière le caractère de divisibilité par 13.

Faisons $B = 100$, d'où $B + 1 = 101$. On verra alors que *dans le système décimal, un nombre est divisible par le facteur premier* 101, *si, après avoir divisé ce nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite, la somme des tranches de rang impair, moins la somme des tranches de rang pair, est divisible par* 101.

Soit enfin $B = 1000$; on aura $B + 1 = 1001 = 7.13.11$. Donc, *dans le système décimal, un nombre est divisible par* 13 *ou par* 7, *quand, après l'avoir partagé en tranches de trois chiffres à partir de la droite, la somme des tranches de rang impair, moins la somme des tranches de rang pair, est divisible par* 13 *ou par* 7.

74. Voici un autre caractère de divisibilité par 7. Soient a le chiffre des unités, b celui des dizaines, ... etc., d'un nombre N, écrit dans le système décimal, de sorte qu'on ait

$$N = \cdots fedcba.$$

Retranchons le double du *chiffre* des unités, du *nombre* des dizaines contenues dans N. En désignant la différence par N′, on aura

$$N' = \cdots fedcb - 2a.$$

Je dis que si N′ est divisible par 7, N le sera également. Car on a

$$N = \cdots fedcb \times 10 + a = (\cdots fedcb - 2a)\, 10 + 21a,$$
$$N = 10N' + 21a.$$

Or $21a$ est divisible par 7 ; donc, suivant que N sera ou non divisible par 7, il en sera de même de 10N′. Mais 7 est premier avec 10 ; pour diviser 10N′ il doit donc diviser N′. On peut ensuite appliquer à N′ le même essai qu'à N, et continuer jusqu'à ce qu'on ait un nombre assez petit pour qu'on puisse reconnaître immédiatement s'il est divisible par 7.

Appliquons ceci au nombre 38059. En doublant le chiffre des unités, et retranchant le résultat du nombre des dizaines, on trouve $3805 - 18 = 3787$.

Le nombre proposé est donc divisible par 7, si 3787 est divisible par 7. Opérant sur 3787 comme sur le nombre donné, il vient $378 - 14 = 364$.

Enfin pour essayer 364, prenons encore la différence $36 - 8 = 28$. Celle-ci étant divisible par 7, il en sera de même du nombre proposé.

On voit d'ailleurs qu'on peut simplifier les opérations en retranchant 7 de tous les chiffres qui surpassent ce diviseur ; ce qui est permis puisque de cette manière on ne fait que retrancher des multiples de 7 du nombre donné. On trouverait ainsi successivement les nombres 31052 ; 3105 — 4 = 3101, 310 — 2 = 308 ; 301 ; 30 — 2 = 28.

Il faut remarquer toutefois, quand on applique ce caractère de divisibilité, que si la division ne se fait pas exactement on n'en trouve pas le reste. Le diviseur 7 est d'ailleurs assez petit pour qu'un essai direct se fasse sans difficulté, et le caractère dont il vient d'être question a peu d'importance.

§ 8. Des fractions décimales périodiques.

75. Soit donnée une fraction ordinaire $\frac{p}{q}$, à réduire en fraction décimale.

On convertira d'abord les unités du numérateur en dixièmes, en multipliant p par 10. Divisant ensuite le produit par q, la partie entière du quotient sera le chiffre des dixièmes de la fraction décimale demandée. Quant au reste de la division, on le multipliera encore par 10 pour le réduire en centièmes et on divisera le produit par q ; la partie entière du quotient sera le chiffre des centièmes que l'on cherche ; le reste devra être multiplié par 10 pour le réduire en millièmes, et ainsi de suite.

Si le dénominateur q ne contient pas d'autres facteurs que 2 et 5, la fraction donnée $\frac{p}{q}$ se réduira exactement en fraction décimale. Car soit $q = 2^m.5^n$, et supposons $m > n$; on aura

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^m.5^n} = \frac{p.5^{m-n}}{10^m}.$$

Le dénominateur devient ainsi une puissance de 10, et la fraction ordinaire est transformée en fraction décimale. On pourrait opérer d'une manière analogue si l'on avait $m < n$.

Dans le cas où la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible, si son dénominateur q contient des facteurs premiers autres que 2 et 5, elle ne peut s'exprimer exactement en fraction décimale.

En effet, admettons qu'on puisse avoir $\frac{p}{q} = \frac{a}{10^n}$; il viendrait $a = \frac{10^n p}{q}$. Or q est premier avec p ; il devrait donc diviser 10^n, ce qui est impos-

sible puisque par hypothèse ce dénominateur contient des facteurs autres que 2 et 5, et qui, par conséquent, n'entrent pas dans 10^n.

Dans ce dernier cas, la fraction $\frac{p}{q}$ engendre une fraction décimale périodique.

Car, après chaque division partielle, le reste est moindre que q. Donc on peut avoir au plus $q - 1$ restes différents, et après $q - 1$ opérations au plus, on retombera sur un des restes déjà trouvés, ou sur le numérateur p. Dès lors les quotients et les restes successifs se reproduiront dans un ordre constant.

Il existe donc des quantités susceptibles d'être représentées exactement au moyen de certaines subdivisions de l'unité et qui ne peuvent l'être par des fractions décimales, bien qu'à l'aide de celles-ci on puisse représenter des subdivisions de l'unité susceptibles de devenir moindres que toute grandeur donnée. Ainsi, par exemple, une quantité qui vaudrait exactement $\frac{35}{99}$ de l'unité ne pourrait jamais être complètement épuisée au moyen de fractions décimales. La division donne, en effet, $\frac{35}{99} = 0\,3535\ldots$, la période 35 se reproduisant à l'infini.

On distingue deux espèces de fractions périodiques : les fractions *périodiques simples*, dans lesquelles la période commence au premier chiffre décimal et les fractions *périodiques mixtes*, dans lesquelles le premier, ou les premiers chiffres décimaux, ne font pas partie de la période.

76. Une fraction ordinaire étant donnée, on vient de voir qu'il est aisé de reconnaître si elle donne naissance à une fraction décimale exacte ou à une fraction décimale périodique ; et, dans ce dernier cas, de trouver par une division quelle est la période. On peut se proposer la question inverse qui est la suivante : une fraction périodique étant donnée, trouver la fraction ordinaire qui, réduite en fraction décimale, produirait cette fraction périodique ; ou, en termes plus simples, *trouver la fraction ordinaire génératrice d'une fraction périodique donnée.*

Cette question peut se résoudre d'un assez grand nombre de manières ; mais il paraît bien difficile, sinon impossible, de la traiter d'une manière complète sans faire intervenir la considération des limites. C'est pourquoi nous commencerons par la présenter en nous plaçant à ce point de vue.

77. Lorsqu'une grandeur variable s'approche constamment d'une certaine quantité fixe, de manière que leur différence puisse devenir et rester moindre que toute grandeur donnée, la quantité fixe est appelée la *limite* de cette quantité variable.

Cela posé, on démontrera sans peine le principe suivant : *Quand une quantité variable* X *croît constamment sans pouvoir devenir plus grande qu'une quantité fixe* A, *elle a une limite égale ou inférieure à* A. — Car il y a évidemment une série ininterrompue de grandeurs que la variable peut dépasser, et, à la suite de celles-ci, une série d'autres qu'elle ne peut pas atteindre. La valeur où commence cette seconde série est évidemment la limite en question.

Elle est d'ailleurs égale à A ou inférieure à A, puisque A est une des valeurs qui ne peuvent être atteintes. *Quand la différence* A — X *peut devenir moindre que toute grandeur donnée*, A *sera, d'après la définition, la limite même de la variable* X.

On prouverait de même que *quand une quantité* X *décroît sans cesse et ne peut cependant devenir moindre qu'une certaine quantité fixe* A, *elle a une limite égale ou supérieure à* A. *Si la différence* X — A *peut devenir aussi petite qu'on le veut*, A *est la limite de* X. On peut regarder comme évident, aussi bien dans un cas que dans l'autre, que la variable ne peut tendre en même temps vers deux limites différentes.

78. Considérons maintenant une fraction décimale périodique engendrée par une fraction ordinaire $\frac{p}{q}$. Si l'on s'arrête à une décimale quelconque, on a une quantité moindre que $\frac{p}{q}$, puisqu'on néglige toutes les décimales suivantes. Toutefois, la quantité négligée est plus petite qu'une unité de l'ordre de la dernière décimale conservée. En effet, quand on réduit la fraction ordinaire en fraction décimale, à chaque division partielle on écrit au quotient le chiffre le plus fort possible ; de sorte que si l'on forçait l'un de ces chiffres d'une unité après avoir négligé les suivants, on aurait une valeur plus grande que $\frac{p}{q}$.

Ainsi, à mesure qu'on prend un nombre plus grand de décimales, on obtient des fractions telles que l'excès de $\frac{p}{q}$ sur l'une quelconque d'entre elles est moindre qu'une unité de l'ordre de la dernière décimale con-

servée. Cette différence peut donc devenir et rester ensuite plus petite que toute grandeur donnée, et par conséquent $\frac{p}{q}$ est la limite vers laquelle tend la fraction périodique quand on prend dans celle-ci un nombre sans cesse croissant de décimales.

Si la fraction périodique donnée n'est pas engendrée par la réduction d'une fraction ordinaire donnée en fraction décimale, on peut prouver aisément qu'elle tend aussi vers une certaine limite, bien que la valeur de celle-ci soit inconnue. Car si l'on prend un nombre de décimales sans cesse plus grand, on aura une quantité incessamment croissante, et qui cependant restera toujours inférieure à certaines valeurs fixes, à savoir celles qu'on obtiendrait en s'arrêtant à une décimale quelconque et en la forçant d'une unité. Donc, une fraction périodique quelconque étant donnée, si l'on prend un nombre sans cesse plus grand de décimales, on aura une quantité variable qui tendra vers une limite fixe. Cette limite, on peut se proposer de la déterminer.

Si l'on a obtenu la fraction périodique en réduisant en fraction décimale une fraction ordinaire donnée, il est clair, d'après ce qui précède, que celle-ci sera la limite demandée; mais si l'on s'est donné arbitrairement la fraction périodique, on ne connaîtra pas, a priori, la limite en question, et celle-ci devra être calculée.

Pour la trouver, on fera remarquer d'abord qu'en reculant la virgule d'un rang vers la droite on obtient une nouvelle valeur dont la limite vaudra dix fois celle de la première. En effet, si dans la nouvelle fraction l'on s'arrête à une décimale quelconque, on aura un nombre dix fois plus grand que celui que l'on eût obtenu en s'arrêtant au même chiffre avant le déplacement de la virgule. Donc chacune des valeurs de la quantité variable que l'on doit considérer maintenant, est dix fois plus grande que la valeur correspondante de la variable primitive. La limite sera donc aussi dix fois plus grande. On prouverait de même qu'en reculant la virgule de deux rangs, la limite sera multipliée par 100; de trois rangs, par 1000; et ainsi de suite.

Considérons maintenant une fraction périodique 0, *abrstrst*... et désignons par x sa limite. Si l'on multiplie celle-ci successivement par 10^5 et par 10^2, on aura les égalités

$$\lim abrst,\quad rstrst \cdots = 10^5 x,$$
$$\lim ab,\quad rstrst \cdots = 10^2 x;$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{abrst - ab}{99900},$$

puisque, dans les deux premières égalités, la fraction décimale a évidemment la même limite.

Nous trouvons donc pour la limite cherchée une fraction ordinaire dont la loi de formation est facile à énoncer; et il est clair que cette fraction ordinaire sera la fraction génératrice de la fraction périodique donnée. En tous cas, si l'on jugeait nécessaire de le prouver, on pourrait le faire comme on le verra au n° 81.

Remarque. — Il est quelques traités où, pour trouver la génératrice d'une fraction périodique, on laisse complètement de côté la considération des limites, et où l'on se contente de ce raisonnement en apparence très simple : On désigne par x la valeur de la fraction périodique et l'on pose $x = 0,\ abrstrst\ldots$; puis on en déduit successivement

$$10^5x = abrst,\quad rstrst\ldots;\quad 10^2x = ab,\quad rstrst\ldots;\quad x = \frac{abrst - ab}{99900}.$$

Cette méthode est vicieuse parce qu'on ne définit pas nettement ce qu'il faut entendre par la valeur d'une fraction périodique, ou, en d'autres termes, le sens qu'il faut attacher à l'égalité $x = 0,\ abrstrst\ldots$ Il y a là une lacune qu'il est indispensable de combler et qu'on rend sensible en présentant l'objection suivante : La fraction décimale n'a pas exactement la même valeur dans $10^5.x$ que dans $10^2.x$, puisqu'elle contient une période de moins. La réponse est facile dès qu'on introduit la notion des limites; tandis que, si on laisse celle-ci à l'écart, l'égalité $x = 0,\ abrstrst\ldots$ n'a même plus de sens.

79. On peut aussi déterminer la limite x d'une fraction périodique par la théorie des progressions. Car l'égalité $x = \lim 0,\ abrstrst\ldots$, revient à

$$x = \frac{ab}{100} + \frac{rst}{10^5}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \cdots\right).$$

La somme des termes de la progression géométrique qui se trouve entre parenthèses a pour limite

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} = \frac{10^3}{999};$$

on a donc

$$x = \frac{ab}{100} + \frac{rst}{100} \times \frac{1}{999} = \frac{ab \times 999 + rst}{99900} = \frac{abrst - ab}{99900}.$$

Cette méthode exige que la théorie des progessions soit exposée avant celle des fractions périodiques; elle est d'ailleurs moins simple que la précédente.

80. On a encore proposé la méthode suivante. Désignons par $\frac{p}{q}$ la fraction ordinaire génératrice de la fraction périodique 0, *abrstrst* .... Si l'on réduit la fraction $\frac{p}{q}$ en décimales par la méthode ordinaire en multipliant p successivement par 10, 10^2, 10^3, ... et en divisant les produits par q pour obtenir les dixièmes, les centièmes, les millièmes, et ainsi de suite, le reste de la division de $p \times 10^2$ par q devra être le même que celui de la division de $p \times 10^5$; et les quotients devront être respectivement *ab* et *abrst;* de sorte qu'en désignant par R le reste dont il vient d'être question, l'on aura

$$p \times 10^5 = q \times abrst + \mathrm{R}, \quad p \times 10^2 = q \times ab + \mathrm{R},$$
$$\frac{p}{q} = \frac{abrst - ab}{99900}.$$

Cette démonstration n'est pas satisfaisante. En effet, elle prouve bien que si la fraction périodique a pour génératrice une fraction ordinaire $\frac{p}{q}$, celle-ci est de la forme indiquée. Mais on ne peut affirmer a priori que la fraction périodique a pour génératrice une fraction ordinaire. Il n'est pas évident qu'elle n'a pas pour limite un nombre incommensurable.

81. A la démonstration du N° 80 on peut en substituer une autre qui ne laisse rien à désirer du côté de la rigueur, et qui consiste à prouver directement que la fraction ordinaire $\frac{abrst - ab}{99900}$, réduite en fraction décimale, engendre la fraction périodique 0, *abrstrst* ....

En effet, posons $p = abrst - ab$, et $q = 99900$; la fraction donnée sera $\frac{p}{q}$, et l'on aura

$$p \times 10^2 = (abrst - ab)10^2 = (ab \times 999 + rst)10^2 = ab \times 99900 + rst00.$$

Le nombre *rst*00 est évidemment moindre que 99900; à moins que la

période ne se compose que de chiffres 9, ce que nous ne supposons pas ici. Donc le numérateur p étant multiplié par 100 pour le réduire en centièmes, et divisé par le dénominateur $q = 99900$, donnera pour quotient ab et pour reste $rst00$.

D'autre part, on a aussi

$$p \times 10^5 = (abrst - ab) . 10^5 = (abrst . 10^3 - ab . 10^3)\, 10^2$$
$$= (abrst . 999 + rst)\, 10^2 = abrst \times 99900 + rst00.$$

Donc, le numérateur p étant multiplié par 10^5 puis divisé par q, afin d'obtenir les 5 premières décimales, donnera le quotient $abrst$, et le même reste, $rst00$, que ci-dessus. Les trois dernières décimales rst se reproduiront donc périodiquement au quotient. C. Q. F. D.

Remarque. — Cette démonstration permet de se passer de la considération des limites. Toutefois, elle suppose que rst est plus petit que 999, et cela exige que l'on considère à part le cas où la période serait composée de tous chiffres 9.

En ce qui concerne cette dernière, on a fait remarquer (*), que la fraction 0,999 ... s'obtient en divisant par 1 l'unité exprimée en décimales, 1,000 ..., et en prenant 9 pour chaque quotient partiel. L'idée est ingénieuse; mais n'est-ce pas forcer le sens qu'on attache à la définition de la génératrice d'une fraction périodique? Quand on veut réduire une fraction ordinaire en fraction décimale par la division, on est convenu d'écrire toujours au quotient le chiffre le plus fort possible, et en opérant de cette manière on ne saurait engendrer la fraction périodique 0,999 .... Il semble donc difficile d'attacher à celle-ci un sens bien net si l'on veut se passer totalement des limites.

En résumé, la méthode exposée dans le N° 78 nous semble mériter la préférence, parce que c'est celle qui pénètre le mieux au fond de la question. Celle-ci, à raison des difficultés qu'elle présente, ne devrait d'ailleurs jamais être exposée qu'à des élèves assez avancés. Si néanmoins on voulait éviter la considération des limites, on pourrait suivre la marche indiquée au N° 81. La fraction 0,999 ... pourrait alors être considérée comme provenant de la somme de deux autres, par exemple 0,444 ... + 0,555 ...; mais il resterait toujours cet inconvénient qu'elle n'aurait par elle-même aucune signification.

(*) Voir *Mathesis*, recueil mathématique à l'usage des Écoles spéciales, par MM. P. Mansion et J. Neuberg (juillet 1881).

§ 9. Racines carrées des nombres. Nombres irrationnels.

82. On appelle *racine carrée* d'un nombre, le nombre qui, élevé au carré, reproduit le nombre proposé.

Les carrés des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 sont respectivement 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

On voit donc que tout nombre moindre que 100 a sa racine carrée moindre que 10, et qu'il n'y a que neuf nombres inférieurs à 100 dont les racines carrées soient des nombres entiers.

Quand un nombre entier n'a pas pour racine carrée un nombre entier, il ne peut avoir non plus pour racine carrée un nombre fractionnaire. Car si $\frac{a}{b}$ était la racine carrée d'un nombre entier N, on aurait $N = \frac{a^2}{b^2}$. Or on peut supposer que la fraction $\frac{a}{b}$, et par conséquent aussi $\frac{a^2}{b^2}$, soit irréductible; dès lors le nombre entier N serait égal à un nombre fractionnaire, ce qui est impossible. La même démonstration s'appliquerait à la racine d'un degré quelconque de N.

83. Proposons-nous d'abord, étant donné un nombre entier N, qui peut n'être pas un carré parfait, de trouver la racine carrée du plus grand carré entier contenu dans N. C'est ce qu'on appelle extraire la racine carrée du nombre N, à moins d'une unité près.

Si le nombre N est plus petit que 100, le plus grand carré qu'il contient s'obtiendra immédiatement par l'examen du tableau des carrés des nombres entiers de 1 à 9.

Si N est plus grand que 100, le plus grand carré qu'il contient est au moins égal à 100, et la racine cherchée est au moins égale à 10. Elle contient donc des dizaines et des unités, et nous commencerons par chercher quelle est la composition du carré d'un nombre qui contient des dizaines et des unités.

Pour multiplier un nombre par lui-même, il faut le multiplier successivement par les unités, et par les dizaines qu'il contient.

Or le produit du nombre proposé par ses unités, donne le carré des unités, plus le produit des dizaines par les unités.

Ensuite, le produit du même nombre par ses dizaines, donne le produit des dizaines par les unités, plus le carré des dizaines.

Le carré du nombre contient donc le carré des dizaines, le double du produit des dizaines par les unités et le carré des unités.

Un nombre plus grand que 100, dont on veut obtenir la racine à moins d'une unité près, contient donc quatre parties, à savoir : 1° le carré des dizaines de la racine cherchée; 2° le double du produit des dizaines par les unités de la racine ; 3° le carré des unités de la racine; et 4° le reste de l'opération.

Le carré des dizaines de la racine est contenu tout entier dans les centaines du nombre proposé. Séparons celles-ci par un point et supposons qu'on sache trouver la racine du plus grand carré qu'elles contiennent. On va voir qu'il sera facile alors de trouver la racine cherchée du nombre N.

Montrons d'abord que la racine du plus grand carré contenu dans les centaines donne exactement les dizaines de la racine cherchée, ou, en d'autres termes, que les dizaines ainsi trouvées forment un nombre qui n'est ni trop fort ni trop faible. En premier lieu il n'est pas trop fort, puisque son carré est contenu dans les centaines du nombre donné, et à plus forte raison dans ce nombre lui-même ; d'autre part, il n'est pas non plus trop faible, car si on l'augmentait seulement d'une dizaine, son carré ne serait plus contenu dans les centaines du nombre donné, tandis que le carré des dizaines de la racine cherchée est contenu dans ces centaines.

Le nombre trouvé représente donc exactement les dizaines de la racine cherchée.

Si l'on retranche le carré de ces dizaines du nombre donné N, le reste contiendra encore les trois autres parties énumérées plus haut.

Or, le double du produit des dizaines de la racine par les unités, étant un nombre exact de dizaines, doit se trouver dans les dizaines du reste, lesquelles peuvent contenir en outre des dizaines provenant des deux autres parties contenues dans N.

Donc si, pour trouver les unités de la racine, on divise les dizaines du reste par le double des dizaines de la racine, le quotient ne pourra être trop petit, mais il pourra être trop grand. Afin de s'assurer s'il est bon, on l'écrira à la droite du double du *nombre des dizaines*(*) de la racine pour former un nombre qu'on multipliera par le chiffre à essayer. On

(*) Il faut veiller à ce que les élèves, dans leur langage, fassent bien la distinction entre les dizaines de la racine et le nombre de ces dizaines.

obtiendra ainsi le double du produit des dizaines multipliées par les unités, plus le carré des unités. Si cette somme, qui doit être contenue dans le reste, était au contraire plus grande que celui-ci, il faudrait en conclure que le chiffre essayé des unités serait trop fort. On le diminuerait alors d'une ou plusieurs unités, et on recommencerait les essais jusqu'à ce que la soustraction fût possible.

Dans ce qui précède nous avons supposé qu'on savait trouver la racine du plus grand carré contenu dans les centaines du nombre donné. Il reste à faire voir comment on y parvient.

Admettons d'abord que le nombre proposé se compose de quatre chiffres au plus. Le *nombre de ses centaines* sera représenté par deux chiffres au plus, et on pourra en extraire facilement la racine carrée d'après la règle précédemment exposée.

Si le nombre proposé a plus de quatre chiffres, mais pas plus de six, le *nombre* de ses centaines en contient quatre au plus. Or on vient de voir comment on peut trouver la racine du plus grand carré contenu dans un nombre qui contient au plus quatre chiffres; et, par conséquent, on pourra extraire la racine carrée d'un nombre qui n'a pas plus de six chiffres.

Il est aisé d'étendre ce raisonnement à des nombres composés successivement de 8, de 10, de 12, ... chiffres au plus, et d'en déduire une règle générale pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier quelconque, à moins d'une unité près.

Nous n'avons voulu que rappeler succinctement ici le raisonnement sur lequel est fondée la règle à suivre pour extraire la racine carrée d'un nombre entier. Dans l'enseignement il convient, pour plus de clarté, de faire la démonstration en se servant d'un nombre choisi pour exemple.

84. *Extraction de la racine carrée d'une fraction.* — Si les deux termes de la fraction sont des carrés parfaits, il suffit, d'après la règle de la multiplication des fractions, d'extraire la racine carrée du numérateur et celle du dénominateur, et de prendre ces racines respectivement pour numérateur et pour dénominateur de la racine cherchée.

Quand une fraction est irréductible, et que ses deux termes ne sont pas carrés parfaits, il n'existe pas de fraction qui, multipliée par elle-même, reproduise la première. Car si $\frac{a'}{b'}$ était la racine carrée de $\frac{a}{b}$, les deux

fractions étant supposées réduites à leur plus simple expression, $\frac{a'^2}{b'^2}$ serait aussi une fraction irréductible et de l'égalité $\frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a}{b}$, on déduirait $a = a'^2$, $b = b'^2$; ce qui prouve qu'il n'existe pas de fraction dont le carré soit égal à la fraction irréductible $\frac{a}{b}$, à moins que les deux termes de celle-ci ne soient des carrés parfaits. Il y a donc une multitude de fractions dont on ne peut extraire exactement la racine carrée.

85. — Quand un nombre N, entier ou fractionnaire, n'est pas un carré parfait, il est toujours possible de trouver deux fractions qui soient des carrés parfaits, qui comprennent entre elles le nombre N, et dont les racines diffèrent l'une de l'autre d'une fraction donnée $\frac{1}{m}$, aussi petite qu'on le veut.

En effet, soit N un nombre quelconque, entier ou fractionnaire. Multiplions N par le carré de m, et cherchons le plus grand carré entier r^2 contenu dans le produit Nm^2; on aura

$$r^2 < Nm^2 < (r+1)^2; \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{r}{m}\right)^2 < N < \left(\frac{r+1}{m}\right)^2.$$

Donc $\frac{r}{m}$ et $\frac{r+1}{m}$ sont deux nombres qui diffèrent de la fraction donnée $\frac{1}{m}$, et dont les carrés comprennent entre eux le nombre N.

La fraction $\frac{r}{m}$, déterminée comme on vient de l'indiquer, s'appelle la valeur approchée de la racine carrée du nombre N, à moins d'une fraction $\frac{1}{m}$ près.

On peut de même obtenir une valeur approchée de la racine d'un nombre quelconque N, entier ou fractionnaire, à moins d'une fraction donnée $\frac{m}{n}$ près; car si l'on désigne par r la racine carrée du plus grand carré entier contenu dans le nombre $N\frac{n^2}{m^2}$, on aura

$$r^2 < N\frac{n^2}{m^2} < (r+1)^2; \quad \text{d'où} \quad \left(r.\frac{m}{n}\right)^2 < N < \left(\frac{(r+1)m}{n}\right)^2.$$

Or, la différence des fractions $\frac{rm}{n}$ et $\frac{(r+1)m}{n}$ dont les carrés com-

prennent le nombre N est égale à la fraction donnée $\frac{m}{n}$; donc $\frac{rm}{n}$ est la valeur approchée que l'on cherche.

La fraction qui marque l'approximation peut d'ailleurs être une fraction décimale, et alors on trouve la racine r par une simple extension de la règle démontrée pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier. On peut obtenir cette racine par une méthode qui permet de calculer tel nombre de décimales qu'on le veut, sans avoir fait aucun calcul inutile. Elle est analogue à la division ordonnée de Fourier; on en trouvera l'exposé ci-dessous.

86. *Méthode pour abréger l'extraction de la racine carrée d'un nombre décimal quelconque.* — Reprenons le produit MN, que nous avons formé n° 61, et faisons $M = N$, et par conséquent $m = n$, $a = b$, $a_1 = b_1$, ... etc.; nous aurons

$$M^2 = a^2B^{2m} + 2aa_1B^{2m-1} + \left.\begin{array}{r} 2aa_2 \\ + a_1^2 \end{array}\right| B^{2m-2} + \left.\begin{array}{r} 2aa_3 \\ + 2a_1a_2 \end{array}\right| B^{2m-3} + \left.\begin{array}{r} 2aa_4 \\ + 2a_1a_3 \\ + a_2^2 \end{array}\right| B^{2m-4} + \cdots + \left.\begin{array}{r} 2aa_i \\ + 2a_1a_{i-1} \\ + 2a_2a_{i-2} \\ + 2a_3a_{i-3} \\ + \cdots\cdots \end{array}\right| B^{2m-i} + \cdots$$

On peut trouver la racine carrée du polynôme M^2 par un procédé un peu différent de celui qu'on enseigne ordinairement en algèbre élémentaire.

On voit d'abord que le premier terme de la racine est aB^m. Retranchons son carré du polynôme proposé, et divisons le premier terme du reste par le double du terme aB^m déjà trouvé à la racine; le quotient sera le second terme a_1B^{m-1}. Retranchons ensuite du reste le produit de $2aB^m$ par le second terme a_1B^{m-1} plus le carré du second terme, $a_1^2B^{2m-2}$; le premier terme du reste, $2aa_2B^{2m-2}$, étant divisé par $2aB^m$, donnera le troisième terme a_2B^{m-2} de la racine. En continuant ainsi, on parvient à la règle suivante :

Quand on a obtenu un terme quelconque de la racine, il faut supprimer dans M^2 le terme dont on vient de se servir, c'est-à-dire le double produit de aB^m par le dernier terme trouvé; former ensuite la somme des doubles produits du second terme de la racine par le dernier terme trouvé, et des doubles produits des termes pris deux à deux à égale distance de ceux-ci, plus le carré du terme moyen, s'il y en a un; et retrancher

cette somme de ce qui reste du polynôme M^2. Le quotient de la division du premier terme restant par le double du premier terme de la racine donne un nouveau terme de celle-ci.

Ce procédé, convenablement modifié, s'applique à l'extraction de la racine carrée d'un nombre.

En effet, supposons que a, a_1, a_2, ... représentent des chiffres, et B la base du système de numération; le polynôme M^2 représentera un nombre dont la racine carrée sera M. On pourrait obtenir celle-ci par la méthode qui vient d'être exposée, si le groupe des termes qui renferme une puissance quelconque de B n'était pas affecté par les termes qui contiennent des puissances moindres; mais ici, comme dans la division ordonnée, il arrive qu'après avoir fait les corrections de tous les produits partiels déjà connus de l'ordre B^{2m-i}, les unités de cet ordre que contient encore le reste se composent : 1° du produit de la multiplication du diviseur $2aB^m$ par le terme aB^{n-i}, qu'il s'agit de déterminer; 2° des retenues provenant de la somme des produits partiels d'ordre inférieur à B^{2m-i}.

Donc, si l'on divise par $2aB^m$ les unités de l'ordre B^{2m-i} contenues dans le reste corrigé, on court le risque, à cause des retenues, de trouver un quotient plus fort que $a_i B^{m-i}$; et pour nous rendre compte de l'influence que les retenues peuvent exercer, nous en déterminerons une limite supérieure.

En général, la limite supérieure des retenues qui peuvent influer sur les unités de l'ordre B^{m+n-i} dans le produit M.N est, d'après ce qu'on a vu (n° 61),

$$(b + b_1 + b_2 + \cdots + b_i + a + 1)\, B^{m+n-i}.$$

Si l'on fait $a = b$, $a_1 = b_1$, $\cdots$, $m = n$, il vient pour la limite cherchée

$$(2a + a_1 + a_2 + \cdots + a_i + 1)\, B^{2m-i}.$$

Admettons maintenant qu'après avoir fait les corrections de tous les produits partiels de l'ordre B^{2m-i}, on divise le nombre des unités restantes de cet ordre par $2a$; désignons le quotient par q et le reste par r; on aura

$$(2aq + r)\, B^{2m-i} = 2aa_i B^{2m-i} + \text{les retenues},$$

et, par conséquent,

$$2aq + r < 2aa_i + 2a + a_1 + a_2 + \cdots + a_i + 1$$

ou

$$2aq + r < (2a + 1)(a_i + 1) + a_1 + a_2 \cdots + a_{i-1}.$$

On voit par là que, dans le cas où le quotient q est trop fort, c'est-à-dire où $q = > a_i + 1$ on aura a fortiori,

$$2aq + r < 2aq + q + a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1},$$

et

$$r < a_1 + a_2 \cdots + a_{i-1} + q.$$

Donc, si le reste r est au moins égal à la somme des chiffres obtenus à la racine à la suite de a, on peut affirmer que le quotient q n'est pas trop fort, et qu'il est par conséquent le chiffre cherché de la racine.

87. Appliquons cette règle à l'extraction de la racine carrée du nombre 72524897262 ..., écrit dans le système décimal.

Décomposons le nombre donné en tranches de deux chiffres pour déterminer par la méthode ordinaire le premier chiffre de sa racine. Supposons que la première tranche à gauche soit composée de deux chiffres, et que ceux-ci représentent 72 unités de l'ordre B^{2m}. Le plus grand carré entier contenu dans 72 étant 64, le premier chiffre de la racine cherchée sera $a = 8$ et représentera des unités de l'ordre B^m. Si l'on retranche de $72B^{2m}$ le carré de $8B^m$, ou $64B^{2m}$, il restera $8B^{2m}$; à côté de 8 abaissons le troisième chiffre du nombre donné, nous formerons ainsi le nombre 85; ce seront des unités de l'ordre B^{2m-1}. Elles contiennent le produit de $2aB^m$ par les unités de l'ordre B^{m-1} de la racine, plus les retenues. Divisons donc 85 par $2a = 16$; nous trouverons le quotient 5; et le reste, 5, étant égal au quotient, celui-ci n'est pas trop fort et donne exactement le second chiffre de la racine.

A côté du reste 5 abaissons le chiffre 2 du nombre donné; nous aurons 52 unités de l'ordre B^{2m-2}, lesquelles contiennent, indépendamment des retenues : 1° le double produit de $8B^m$ par les unités à déterminer de l'ordre B^{m-2}; 2° le carré de $5B^{m-1}$. Faisons la soustraction de ce dernier carré; il restera $27B^{2m-2}$. Divisons ensuite 27 par 16, nous aurons pour quotient 1, et pour reste 11 ; ce reste est plus grand que la somme $5+1$ des chiffres qui suivent 8 à la racine. Donc 1 est exactement le troisième chiffre de la racine cherchée.

Abaissons le chiffre 4 à côté du reste 11; nous aurons 114 unités de l'ordre B^{2m-3}, lesquelles contiendront : 1° le double produit de $8B^m$ par les unités de l'ordre B^{m-3} à déterminer ; 2° le double produit de $5B^{m-1}$ par $1.B^{m-2}$; 3° les retenues. Après en avoir retranché le double produit $2.5.1.B^{2m-3}$, on a pour reste $104B^{2m-3}$. La division de 104 par 16

donne 6 pour quotient et 8 pour reste ; et puisque celui-ci est moindre que $5+1+6$, on ne peut pas affirmer que 6 soit bon.

Si le chiffre 6 était trop fort, on en serait averti en continuant l'opération, parce que les corrections à faire finiraient par devenir impossibles ; mais il vaut mieux changer le diviseur $2a$, et prendre pour a l'ensemble des deux premiers chiffres de la racine. On a alors

$$2a = 2.85 = 170.$$

	B^{2m}		B^m
	72524897262.......		851615507.....
	64	$= 8^2.$	$16B^m$ $170B^{m-1}$
B^{2m-1}	85		
	80	$= 2.8.5.$	
B^{2m-2}	52		
	25	$= 5^2.$	
	27		
	16	$= 2.8.1.$	
B^{2m-3}	114		
	10	$= 2.5.1.$	
	~~104~~		
	~~96~~		
	~~8~~		
B^{2m-4}	1048		
	1	$= 1^2.$	
	1047		
	1020	$= 2.85.6.$	
B^{2m-5}	279		
	12	$= 2.1.6.$	
	267		
	170	$= 2.85.1.$	
B^{2m-6}	977		
	38	$= 2.1.1 + 6^2.$	
	939		
	850	$= 2.85.5.$	
B^{2m-7}	892		
	22	$= 2(1.5 + 1.6).$	
	870		
	850	$= 2.85.5.$	
B^{2m-8}	206		
	71	$= 2(1.5 + 6.5) + 1^2.$	
B^{2m-9}	1352		
	70	$= 2(1.0 + 6.5 + 1.5)$	
	1282		
	1190	$= 2.85.7.$	
	92		

Afin de continuer l'opération avec ce nouveau diviseur, ne tenons pas compte de la dernière division, puisque nous ignorons si le quotient 6 est bon. Regardons donc 1 comme le dernier chiffre connu de la racine, et reprenons le reste $104B^{2m-3}$, lequel est corrigé de tous les produits partiels connus dont l'ordre est au moins B^{2m-3}.

Supposons maintenant que 1 ait été déterminé au moyen du diviseur $2.85 = 170$; et qu'après avoir trouvé ce chiffre 1, on ait fait la soustraction du produit partiel 2.85.1. On verra sans peine que le reste ainsi obtenu serait corrigé de tous les produits partiels connus de l'ordre B^{2m-3} ; et que, par conséquent, il serait identique au dividende partiel $104\,B^{2m-3}$ dont nous avions fait usage pour déterminer le quatrième chiffre de la racine.

Ainsi, après avoir déterminé le troisième chiffre 1 à l'aide du diviseur $170B^{m-1}$, et retranché le produit $170B^{m-1} \times 1.B^{m-2}$, on a le reste $104B^{2m-3}$; et pour continuer l'opération, il faut, à côté de 104, abaisser le chiffre 8, ce qui donne 1048 unités de l'ordre B^{2m-4}; celles-ci contiennent : 1° le produit de $2.85.\ B^{m-1}$ par les unités à déterminer, de l'ordre B^{m-3}; 2° le carré de $1.B^{m-2}$; et 3° les retenues. Corrigeons 1048 du carré de 1, et divisons le reste 1047 par $2.85 = 170$;nous trouverons le quotient 6, et le reste, 27 plus grand que $1 + 6$; donc le chiffre 6 est bon.

Abaissons 9, et corrigeons $279\,B^{2m-5}$ de $2 \times 6B^{m-3} \times 1B^{m-2}$, ce qui donne le reste $267B^{2m-5}$. Divisons 267 par 170. Le quotient de cette division est 1, et le reste 97 ; et puisque ce dernier surpasse la somme des chiffres $1 + 6 + 1$, qui suivent 85 à la racine, on a exactement 1 pour le chiffre cherché.

Abaissons 7, et corrigeons 977 du double produit de 1 par 1, et du carré de 6. Le reste 939, divisé par 170, donne le quotient 5, et le reste 89; et celui-ci étant plus grand que $1 + 6 + 1 + 5$, le chiffre 5 sera bien le sixième chiffre de la racine.

L'opération pourra être ainsi continuée indéfiniment. On voit qu'elle est analogue à la division ordonnée de Fourier, et qu'elle présente sur la méthode ordinaire le grand avantage de simplifier beaucoup les calculs. C'est ainsi que, dans l'exemple que nous avons choisi, neuf chiffres de la racine sont déterminés en faisant usage de onze chiffres seulement du nombre donné; tandis que, par la méthode ordinaire, on devrait en employer dix-huit.

88. *Sur les nombres irrationnels.* — Nous avons vu que les nombres entiers peuvent être engendrés de deux manières; à savoir : par les collections d'unités qui ne se fractionnent pas, et par la mesure des grandeurs, ou la division des grandeurs continues en parties égales. Nous avons vu aussi que ce dernier mode de génération donne naissance non seulement aux entiers, mais encore aux fractions; nous avons toutefois réservé pour un examen ultérieur la question de savoir s'il est toujours possible de diviser l'unité en parties égales assez petites pour que l'une d'elles soit contenue exactement un certain nombre de fois dans la grandeur à mesurer. C'est ici que nous traiterons cette question.

Il n'est pas évident a priori que deux grandeurs de même espèce ont

toujours une commune mesure ; on peut même prouver directement qu'il est des cas où cela n'a pas lieu, et alors les deux grandeurs en question sont dites *incommensurables*.

89. Pour le montrer sur un exemple, nous commencerons par faire voir que, pour trouver une commune mesure entre deux grandeurs, on peut faire usage d'un procédé analogue à celui qui donne le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers.

Afin de nous expliquer plus clairement nous considérerons deux longueurs A et B ; mais nos raisonnements seraient applicables à deux grandeurs d'espèce quelconque.

Soit B la plus petite des deux, et portons-la sur A autant de fois que possible. Admettons qu'elle y soit contenue q fois avec un reste R. On aura

$$A = q \text{ fois } B + R.$$

Je dis que toute commune mesure des longueurs A et B, sera aussi une commune mesure des longueurs B et R, et réciproquement.

Car si une longueur L entre exactement m fois dans A, et n fois dans B, m et n étant des nombres entiers, elle entrera nq fois dans une longueur égale à q fois B: et si on retranche cette dernière de A, le reste R contiendra L un nombre de fois exprimé par m-nq. Donc R contiendra L un nombre entier de fois. Il est prouvé ainsi que toute longueur L, commune mesure de A et de B, est aussi commune mesure de B et de R.

On prouverait de la même manière que toute commune mesure de B et de R est aussi une commune mesure de A et de B. On voit donc que les longueurs qui entrent exactement un certain nombre de fois dans A et B, sont toutes les mêmes que celles qui entrent exactement un certain nombre de fois dans B et R ; et, en particulier, la plus grande longueur qui entre exactement dans A et B, est identique à la plus grande longueur qui entre exactement dans B et R. En d'autres termes, la plus grande commune mesure de A et de B est la même que la plus grande commune mesure de B et de R.

Si R était nul, B entrerait exactement un certain nombre de fois dans A, et serait la plus grande commune mesure cherchée. Quand R n'est pas nul, la question est ramenée à chercher la plus grande commune mesure de B et de R. On cherchera donc combien de fois R est contenu dans B ; en

admettant qu'il y soit contenu un nombre de fois égal à q_1, avec un reste R_1, on aura

$$B = q_1 \text{ fois } R + R_1,$$

et la plus grande commune mesure de B et R sera la même que celle de R et R_1.

Si R_1 est nul, R sera la plus grande commune mesure cherchée; sinon, on cherchera combien de fois R_1 est contenu dans R, et ainsi de suite.

On voit que, les opérations étant continuées indéfiniment, si l'un des restes, R_{n+1}, est égal à zéro, de telle sorte qu'on ait

$$R_{n-1} = q_{n+1} \text{ fois } R_n, \quad R_{n+1} = 0,$$

le reste R_n, qui précède le reste nul, sera la plus grande commune mesure cherchée.

90. Il est aisé de prouver aussi que, réciproquement, quand on opère comme on vient de l'indiquer sur deux longueurs A et B qui ont une commune mesure, on finira par trouver un reste nul.

En effet, soit λ la plus grande longueur qui entre exactement dans A et B. Admettons qu'elle entre a fois dans A et b fois dans B; les nombres a et b seront nécessairement premiers entre eux; car s'ils avaient un commun diviseur, si l'on avait, par exemple, $a = a'd$ et $b = b'd$, on aurait aussi $A = a'd$ fois λ; et $B = b'd$ fois λ ou encore, $A = a'$ fois une longueur égale à d fois λ et $B = b'$ fois une longueur égale à d fois λ. Une longueur égale à d fois λ entrerait donc exactement a' fois dans A, et b' fois dans B; elle serait par conséquent une commune mesure de A et de B, plus grande que λ, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Désignons par $r, r_1, r_2, \ldots r_n$, les restes successifs auxquels on est conduit quand on cherche le plus grand commun diviseur de a et de b. L'avant-dernier reste r_n sera l'unité puisque a et b sont premiers entre eux et l'on aura

$$a = bq + r; \quad b = rq_1 + r_1; \quad \ldots; \quad r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, (r_n = 1).$$

De la première égalité on conclut a fois $\lambda = bq$ fois $\lambda + r$ fois λ.

Mais A vaut a fois λ et B vaut b fois λ; soit de plus R une longueur égale à r fois λ; on aura $A = q$ fois $B + R$. La plus grande commune mesure de A et B est donc la même que celle de B et de R.

De même, à cause de l'égalité $b = rq_1 + r_1$, on voit que si l'on désigne par R_1 une longueur égale à r_1 fois λ, la plus grande commune

mesure de B et de R est la même que celle de R et de R_1. En continuant ainsi on trouvera que la plus grande commune mesure cherchée est la même que celle de R_{n-1} et de R_n. Or, R_{n-1} vaut r_{n-1} fois λ et R_n vaut une fois λ, puisque $r_n = 1$. Donc la longueur λ ou R_n est contenue exactement r_{n-1} fois dans R_{n-1}, et le reste R_{n+1} est nul.

Puisque les opérations ont nécessairement une fin quand les longueurs A et B ont une commune mesure, on peut affirmer que dans les cas où il serait impossible qu'aucun des restes successifs fût exactement contenu un certain nombre de fois dans le précédent, aucune commune mesure entre A et B ne saurait exister. Nous en donnerons un exemple.

91. Proposons-nous de trouver la plus grande commune mesure entre la diagonale AC, et le côté AB du carré ABCD (fig. 2).

Le côté AB étant moindre que la diagonale AC, et plus grand que la moitié AO de cette diagonale, on voit que si l'on prend sur AC une longueur AE, égale à AB, le reste EC sera moindre que AB. Ce reste devra être porté autant de fois que possible sur AB.

Menons EF perpendiculaire à AC et par conséquent parallèle à BD. Joignons AF. Les deux triangles rectangles ABF, AFE ont l'hypoténuse commune et un côté égal, à savoir AB = AE. Ils sont donc égaux, et on a BF = EF.

Le triangle rectangle CEF est isoscèle; car chacun de ses angles aigus vaut la moitié d'un angle droit. Donc EC = EF = BF; et, par conséquent, si l'on porte EC autant de fois que possible sur AB, ou sur son égale BC, on trouvera qu'elle y est contenue deux fois; une fois de B en F et encore une fois de F en G avec un deuxième reste CG, moindre que le premier EC. Ce second reste doit être porté autant de fois que possible sur le premier.

Menons FH parallèle à AC, et CH parallèle à BD. Nous formons ainsi un nouveau carré CEFH, dont FC est la diagonale et EC le côté. Donc GC est ce qui reste de la diagonale du carré CEFH quand on en retranche le côté EC de ce carré.

Pour trouver combien de fois ce reste GC est contenu dans EC on pourra donc raisonner exactement de la même manière qu'on l'a fait pour trouver combien de fois EC est contenu dans AB; c'est-à-dire que le deuxième reste GC sera contenu deux fois dans le premier reste EC, et laissera un troisième reste moindre que CG. On peut de nouveau

raisonner sur ce troisième reste comme sur le précédent, et continuer ainsi indéfiniment.

Donc le premier reste est contenu deux fois dans AB avec un deuxième reste. Le deuxième reste est contenu deux fois dans le premier, avec un troisième reste, et ainsi de suite à l'infini.

Il est donc évident qu'on peut pousser les opérations aussi loin qu'on le veut sans trouver un reste qui soit contenu exactement un certain nombre de fois dans le précédent; d'où il suit que les deux longueurs considérées n'ont pas de commune mesure. Ce sont deux longueurs *incommensurables.*

Cet exemple est tiré de la géométrie; mais dans un enseignement méthodique rien n'oblige à parler des incommensurables avant que la nécessité ne commence à s'en faire sentir en géométrie. Il nous semble, au contraire, que la marche inverse mérite la préférence.

92. Il existe une foule de cas analogues à celui que nous venons d'examiner et où l'on doit comparer deux grandeurs A et B, incommensurables entre elles; si bien que, pour certains choix de l'unité, A pourrait être exprimé par un nombre entier ou fractionnaire, tandis que B ne saurait l'être, et réciproquement.

De là cette conséquence que, si l'on s'en tenait aux idées admises jusqu'ici sur la génération des nombres, on aurait souvent à comparer des grandeurs dont quelques-unes seraient exprimables en nombres, tandis que les autres ne le seraient pas.

Examinons s'il n'y aurait pas moyen de faire disparaître ce grave inconvénient, et s'il ne serait pas possible de concevoir des nombres d'une autre nature que ceux dont nous nous sommes occupé jusqu'à présent, mais ayant une signification bien définie, et susceptibles de représenter les grandeurs qui n'ont pas de commune mesure avec l'unité.

Soit A une telle grandeur; l'unité qu'on a choisie ne permet de la représenter exactement par aucun nombre entier ou fractionnaire; toutefois il est facile de trouver, d'une infinité de manières, une série de nombres fractionnaires représentant des grandeurs toutes moindres que A, mais indéfiniment croissantes, et ayant A pour limite.

Pour le montrer, divisons l'unité en n parties égales, et désignons par α l'une de ces parties. Admettons qu'elle soit contenue dans A un nombre m de fois avec un reste r moindre que α, et convenons de désigner par $\alpha \times m$ une grandeur qui contient m fois α; nous aurons alors

$$A = \alpha \times m + r.$$

Puisque α est la $n^{\text{ième}}$ partie de l'unité, et que $\alpha \times m$ contient m fois l'une de ces parties, on voit que la grandeur $\alpha \times m$ a pour mesure la fraction $\frac{m}{n}$. Donc $\frac{m}{n}$ représente une grandeur moindre que A, mais telle que la différence r est plus petite que α, c'est-à-dire que la fraction $\frac{1}{n}$ de l'unité.

Divisons maintenant l'unité en un nombre n' de parties égales plus petites que r, et soit α' l'une de ces parties. Supposons que α' soit contenue m' fois dans A, avec un reste r' moindre que α', et par conséquent aussi moindre que r. On aura donc

$$A = \alpha' \times m' + r', \quad r' < \alpha' < r.$$

Observons ensuite que α' vaut la fraction $\frac{1}{n'}$ de l'unité ; d'où il suit qu'une grandeur égale à m' fois α' aura pour mesure $\frac{m'}{n'}$. Cette fraction représente donc encore une grandeur moindre que A, mais telle que la différence r' est plus petite que r, et aussi que α' ou que la fraction $\frac{1}{n'}$ de l'unité.

En continuant ainsi on trouvera une série de fractions

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m'}{n'}, \quad \frac{m''}{n''}, \quad \ldots$$

représentant des grandeurs

$$\alpha \times m, \quad \alpha' \times m', \quad \alpha'' \times m'', \quad \ldots$$

toutes moindres que A, et qui différeront de A des quantités

$$r, \quad r', \quad r'', \quad \ldots$$

indéfiniment décroissantes, et pouvant devenir moindres que toute grandeur donnée.

Ces fractions rationnelles croissantes sont donc les expressions de la mesure d'une série de grandeurs croissantes dont la limite est A. Bien qu'elles augmentent incessamment, elles ne peuvent cependant dépasser une certaine limite; car elles restent inférieures à toute fraction rationnelle qui serait la mesure d'une grandeur quelconque commensurable avec l'unité, et surpassant A. Elles convergent donc vers une certaine limite qui ne sera jamais atteinte tant que les grandeurs qu'elles mesurent

n'auront par elles-mêmes atteint leur limite A, mais qui serait dépassée par le nombre mesurant une grandeur quelconque supérieure à A. On peut donc dire que cette dernière grandeur a pour mesure la limite vers laquelle convergent les fractions croissantes $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, ...

La limite en question ne peut s'exprimer exactement par aucun nombre entier ni fractionnaire. Néanmoins, par extension, on l'a appelée nombre, et on lui a donné le nom de *nombre irrationnel*; les nombres entiers et fractionnaires sont les *nombres rationnels*.

Un nombre irrationnel est donc la limite vers laquelle tend une fraction rationnelle variable, lorsque la grandeur variable que mesure cette fraction, a pour limite une grandeur fixe qui n'a pas de commune mesure avec l'unité.

L'admission des nombres irrationnels en arithmétique permet de considérer comme non interrompue la suite des nombres depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Sans eux, on ne pourrait considérer les nombres comme croissant d'une manière continue; car une grandeur qui croît d'une manière continue passe par une infinité de valeurs commensurables, et par une infinité de valeurs incommensurables avec l'unité. Les premières seules sont exprimées par des nombres rationnels. La série serait donc interrompue, si on ne considérait pas les grandeurs incommensurables comme représentées elles aussi par des nombres; ou, en d'autres termes, si l'on n'admettait pas l'existence des nombres irrationnels.

93. Les nombres irrationnels peuvent encore être engendrés autrement que par la mesure des grandeurs; par exemple, par les extractions de racines.

Nous avons prouvé que les nombres entiers compris entre deux carrés entiers consécutifs ne peuvent avoir pour racines carrées ni des nombres entiers ni des nombres fractionnaires. A moins de donner de l'extension au sens primitivement attaché au mot nombre, on devrait donc dire qu'il existe une multitude de nombres entiers dont la racine carrée ne peut être exprimée par un nombre. De même, une fraction ne pourrait avoir aucun nombre pour racine carrée, à moins que ses deux termes ne fussent des carrés parfaits.

Néanmoins on peut trouver des nombres fractionnaires sans cesse croissants et dont les carrés, tout en restant inférieurs au nombre

proposé, peuvent s'en rapprocher autant qu'on le veut. Ces carrés variables ont donc pour limite le nombre donné, et leurs racines carrées convergent vers une certaine limite fixe qui sera nécessairement un nombre irrationnel, et devra être considérée comme la racine carrée du nombre donné.

Au fond ce mode de génération des nombres irrationnels rentre dans le précédent, et l'on peut, dans ce second mode, aussi bien que dans le premier, les considérer comme exprimant la mesure de certaines grandeurs incommensurables avec l'unité. Il est clair, en effet, que les nombres rationnels variables qui ont pour limite un nombre irrationnel peuvent être considérés comme donnant la mesure d'une série de grandeurs croissantes, commensurables avec l'unité, et convergeant vers une limite fixe. Cette grandeur limite aura pour mesure le nombre irrationnel donné et par conséquent elle ne saurait avoir de commune mesure avec l'unité. Le nombre irrationnel devient ainsi l'expression de la mesure d'une certaine grandeur incommensurable.

Ce raisonnement s'applique à tout mode de génération des nombres irrationnels. Un nombre irrationnel quelconque peut donc être considéré comme la mesure d'une certaine grandeur incommensurable. Nous allons faire voir que, en particulier, les nombres irrationnels provenant des extractions de racines carrées peuvent être considérés comme exprimant la mesure des côtés de certains carrés de surface donnée.

Pour le montrer cherchons l'expression de la surface d'un carré dont le côté est donné en mètres.

Prenons successivement le côté égal à 1, 2, 3, 4, ... mètres; on verra par une construction fort simple que le carré contient 1, 4, 9, 16, ... fois le mètre carré. Prenons ensuite le côté égal à $2/3$ de mètre; on reconnaîtra encore aisément, par une figure, que le carré correspondant contient 4 fois celui qui a pour côté $1/3$ de mètre; et ce dernier étant lui-même contenu 9 fois dans le mètre carré, on en conclura que le carré donné vaut les $4/9$ du mètre carré. Ce raisonnement prouve que, dans tous les cas, le nombre qui représente la surface est le carré de celui qui représente le côté.

Admettons maintenant qu'on veuille résoudre le problème inverse : Étant donnée la surface d'un carré, trouver le côté.

Si la surface a pour expression un carré parfait, tel que $4/9$, on en prendra la racine carrée, $2/3$, et l'on aura le côté. Mais si le nombre qui

exprime la surface n'est pas un carré parfait, l'extraction de la racine carrée ne peut se faire exactement ; elle conduit à un nombre irrationnel qui mesure le côté cherché, et celui-ci est incommensurable avec l'unité.

C'est ainsi que le côté du carré dont la surface est 2 ne peut être exprimé par un nombre rationnel. Il est cependant facile, un carré quelconque étant donné, de trouver celui dont la surface est double. En effet, soit ABCD un carré quelconque (fig. 3) et BDEF le carré qui a pour côté la diagonale du premier. Celui-ci contient deux fois le triangle ABD, tandis que l'autre contient ce même triangle quatre fois. Donc le grand carré est double du petit ; et, par conséquent, étant donné un carré quelconque, on en obtiendra un autre de surface double en construisant le carré qui a pour côté la diagonale du premier. Le côté du petit carré étant pris pour unité, celui du grand carré devrait donc être représenté par $\sqrt{2}$. Et comme la racine carrée de 2 ne peut être un nombre rationnel, on devrait dire que le côté du grand carré ne peut être exprimé par aucun nombre, à moins que l'on n'admette l'existence d'un nombre irrationnel égal à $\sqrt{2}$.

La valeur de ce nombre irrationnel, nous l'avons déjà fait remarquer d'une manière générale, peut être calculée avec tel degré d'approximation qu'on le veut ; car il est possible de trouver des carrés parfaits s'approchant autant qu'on le veut du nombre 2, et dont les racines convergent par conséquent vers une limite fixe, laquelle n'est autre que le nombre irrationnel $\sqrt{2}$. On a vu d'ailleurs que, pour chacune de ces racines, on connaît la fraction qui marque le degré d'approximation.

Dans la question qui vient d'être résolue le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est engendré par l'extraction d'une racine carrée ; mais on a été conduit à chercher cette racine pour trouver la mesure d'une longueur ; de sorte qu'on peut dire aussi que c'est par la mesure d'une grandeur qu'est engendré ce nombre irrationnel.

Remarquons en passant que nous avons ici une seconde démonstration de cette proposition que la diagonale d'un carré est incommensurable avec le côté.

94. *Rapports incommensurables.* — L'extension qui vient d'être donnée au sens du mot nombre entraîne une extension du sens attaché au mot *rapport*.

On appelle rapport de la grandeur B à une autre de même espèce A,

le nombre qui exprime combien de fois B contient A. Si A et B sont incommensurables, le rapport de ces grandeurs sera donc un nombre irrationnel, et on devra le regarder comme la limite vers laquelle convergent les fractions rationnelles $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, ... qui représentent les rapports d'une grandeur variable dont la limite est B, à la grandeur A.

D'après cette définition, *deux rapports incommensurables sont égaux quand les limites par lesquelles nous venons de les définir sont égales.*

Tous les auteurs ne regardent pas comme suffisante la définition que nous venons de donner de l'égalité de deux rapports incommensurables. C'est notamment l'opinion de Duhamel, et voici ce qu'il dit à ce sujet :

« On a étendu la dénomination de nombre *à la manière d'être relative, au rapport*, de deux grandeurs quelconques, ayant ou n'ayant pas de commune mesure. Mais il ne suffit pas que l'on convienne de dire que deux grandeurs incommensurables ont entre elles un rapport que l'on désignera sous le nom de nombre incommensurable ; il faudra définir rigoureusement l'égalité des rapports incommensurables.

« Observons d'abord que quand on partagera l'une des grandeurs en parties égales suffisamment petites, pour les porter dans l'autre autant de fois que possible, le reste, qui sera moindre que l'une des parties, pourra être rendu moindre que toute grandeur donnée ; de sorte qu'il existera un rapport commensurable entre l'une quelconque de ces grandeurs, et une autre qui différera aussi peu qu'on voudra de la seconde.

« Cela posé, considérons deux grandeurs incommensurables l'une par rapport à l'autre ; divisons l'une d'elles, par exemple la plus petite, en parties égales, et portons-les dans la plus grande autant de fois que possible : il y aura un reste moindre que l'une d'elles. Concevons que le nombre des subdivisions égales de la plus petite augmente indéfiniment ; pour chacune de ces valeurs le reste de la plus grande diminuera, et deviendra moindre que toute grandeur donnée(*). La plus grande quantité

(*) Bien qu'il soit vrai que le reste finira par être moindre que toute grandeur donnée, on ne peut cependant pas affirmer, comme le fait DUHAMEL, que le reste va sans cesse en diminuant. Pour certaines lois des subdivisions il peut arriver que quelques restes soient moindres que d'autres qui les suivent, mais cela est impossible quand on a soin de prendre pour chaque subdivision de l'unité une quantité moindre que le reste de l'opération précédente.

diminuée de ce reste aura une commune mesure avec la plus petite; elle aura donc avec elle un rapport qui sera le même que celui des nombres de fois qu'elles contiendront cette mesure commune, et sera par conséquent exprimable par une fraction à termes entiers. On aura donc ainsi une suite indéfinie de rapports en nombres commensurables, correspondant à la plus petite des deux grandeurs et à d'autres qui diffèrent de la plus grande de quantités qui peuvent devenir moindres que toute grandeur désignée.

« Concevons d'une autre part deux autres grandeurs incommensurables entre elles, et d'une même espèce quelconque; partageons la plus petite dans les mêmes nombres de parties égales que nous l'avons fait successivement dans le premier cas, et portons-les de même dans la plus grande; il en résultera une nouvelle suite de rapports commensurables; et si ceux qui correspondent de part et d'autre au même nombre de divisions de la plus petite sont toujours égaux, quelque loin qu'on pousse cette division, on dit que les deux premières grandeurs incommensurables ont entre elles le *même rapport* ou la *même raison* que les deux autres.

« Cette définition de l'égalité des rapports incommensurables ne diffère pas au fond de celle qui se trouve dans les éléments d'Euclide.

« Mais pour qu'il y ait lieu de l'adopter, il est nécessaire de démontrer que l'égalité des rapports commensurables respectifs, est indépendante de la loi suivant laquelle les subdivisions décroissent indéfiniment; c'est-à-dire que si cette égalité a lieu pour une certaine loi, elle aura lieu pour toute autre. Cette proposition ne se trouve pas dans Euclide. »

Voici avec de légères modifications, la démonstration qu'en donne Duhamel.

Soient A et B deux grandeurs incommensurables d'une même espèce quelconque; A′ et B′ deux autres grandeurs incommensurables aussi d'une même espèce quelconque qui peut être différente de la première. Admettons que si l'on subdivise A et A′ dans un même nombre de parties égales, qui croisse d'après une loi déterminée, on trouve constamment le même nombre de ces parties respectivement dans B et B′. Il s'agit de démontrer que si l'on partage A et A′ en un nombre quelconque de parties égales non renfermé dans la loi donnée, il se trouvera toujours un nombre égal de ces subdivisions respectivement dans B et B′.

Supposons, s'il est possible, que cela ne soit pas. Désignons par a et a'

des subdivisions respectivement égales au m^e de A et au m^e de A′, de sorte que l'on ait

$$A = a \times m, \quad A' = a' \times m,$$

et admettons que a soit contenu k fois dans B, et que a' soit contenu plus de k fois dans B′ de sorte que

$$B < a(k+1) \quad \text{et} \quad B' > a'(k+1)\,;$$

soit encore

$$a(k+1) = B + R.$$

Divisions A en μ parties égales comprises dans la loi donnée, et telles que l'une d'elles, que nous désignerons par α, soit moindre que R. Divisons A′ dans le même nombre μ de parties égales et soit α' l'une de ces parties. D'après l'hypothèse, α sera contenu dans B autant de fois que α' dans B′.

D'autre part, je dis que α sera contenu autant de fois dans $a(k+1)$ que α' dans $a'(k+1)$. Car on a

$$\alpha\mu = A = a \times m \quad \text{et} \quad \alpha'\mu = A' = a' \times m,$$

d'où

$$a = \alpha \times \frac{\mu}{m} \quad \text{et} \quad a' = \alpha' \times \frac{\mu}{m}\,;$$

et, par conséquent,

$$a \times (k+1) = \alpha \times \frac{\mu(k+1)}{m}, \quad a'(k+1) = \alpha' \times \frac{\mu(k+1)}{m}.$$

Le nombre $\frac{\mu(k+1)}{m}$ exprime donc combien de fois α est contenu dans $a(k+1)$, et aussi combien de fois α' est contenu dans $a'(k+1)$; et si E est le plus grand entier contenu dans ce nombre $\frac{\mu(k+1)}{m}$ on voit que α entrera E fois dans $a(k+1)$ avec un reste moindre que α; et que α' entrera aussi E fois dans $a'(k+1)$ avec un reste moindre que α'.

Or $a(k+1) = B + R$. Donc α est contenu E fois dans $B + R$; et puisque R est plus grand que α par hypothèse, α sera contenu au moins une fois de plus dans $B + R$ que dans B; donc B contiendra tout au plus $E - 1$ fois α.

Au contraire B′, étant plus grand que $a'(k+1)$, contiendra α' au moins autant de fois que $a'(k+1)$; donc au moins E fois; par conséquent B′

contiendrait α' au moins une fois de plus que B ne contient α, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, si l'on divise A et A′ en un même nombre quelconque m de parties égales, il est impossible que l'une des divisions de A soit contenue dans B un nombre moindre de fois que la division correspondante de A′ dans B′.

On démontrerait de même que l'une des divisions de A′ ne peut être contenue dans B′ un nombre moindre de fois que la division correspondante de A dans B. Donc toute subdivision de A est contenue dans B autant de fois que la subdivision correspondante de A′ dans B′.

C. Q. F. D.

La démonstration de cette proposition est-elle indispensable? Ne voit-on pas clairement qu'en prenant les subdivisions suivant deux lois différentes, les deux séries de fractions rationnelles qui tendent vers l'un des rapports incommensurables que l'on considère, ne peuvent tendre vers deux limites différentes? Et si l'on admet ce principe, n'est-il pas évident que, puisque la limite en question est indépendante de la loi des subdivisions pour chacun des deux rapports incommensurables, on doit trouver des limites égales quelle que soit la loi des subdivisions, dès que ces limites sont égales pour une certaine loi en particulier? On peut d'ailleurs donner de ce dernier principe la démonstration suivante, bien plus facile à saisir, nous semble-t-il, que celle de la proposition de Duhamel :

Si l'on divise A *en n parties égales et que l'on porte autant de fois que possible l'une de ces divisions sur* B, *ce qui donne un rapport commensurable $\frac{m}{n}$; si ensuite on considère le nombre n comme indéfiniment croissant, la limite vers laquelle tend la fraction $\frac{m}{n}$ est indépendante de la loi suivant laquelle croît le nombre n des subdivisions de* A.

D'abord il est clair que le rapport $\frac{m}{n}$ tend vers une certaine limite; cela résulte des considérations dont nous avons fait usage au n° 92 pour définir les nombres incommensurables.

Si on supposait maintenant que deux lois des subdivisions de A pourraient conduire à des limites différentes, la première donnant une limite moindre que la seconde, il en résulterait que certains nombres commensurables ne pourraient être atteints par la première loi, tandis qu'on pourrait les dépasser par la seconde loi. Soit, s'il est possible, N′ un

nombre satisfaisant à cette condition, et soit B′ la grandeur que ce nombre commensurable représente. Alors, puisque N′ est un nombre qu'on ne peut atteindre quand on cherche la mesure de B par la première loi des subdivisions, on doit avoir $B' > B$; et, d'autre part, puisque N′ est un nombre qu'on peut dépasser quand on cherche la mesure de B par la seconde loi, il est clair qu'on doit avoir aussi $B > B'$, ce qui est contradictoire.

Il est donc démontré que la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{m}{n}$ est indépendante de la loi suivant laquelle on fait croître n ; la proposition de Duhamel devient donc inutile.

95. En résumé, si deux grandeurs A et B n'ont pas de commune mesure, le rapport incommensurable de B à A est la limite vers laquelle tend la fraction rationnelle $\frac{m}{n}$ quand n croît indéfiniment : n étant le nombre qui indique en combien de parties égales on a divisé A et m le plus grand nombre entier de fois que l'une de ces parties est contenue dans B.

On peut regarder comme évident que cette fraction $\frac{m}{n}$ ne peut tendre vers deux limites différentes quand on change la loi suivant laquelle croît le nombre n; ou, si on le préfère, on peut démontrer cette proposition comme nous l'avons fait plus haut.

S'agit-il ensuite de prouver que le rapport de deux grandeurs incommensurables A et B est égal à celui de deux autres grandeurs incommensurables A′ et B′? Il suffira de diviser A et A′ en un même nombre quelconque n de parties égales et de montrer que le nombre m des subdivisions de A contenues dans B est toujours le même que le nombre des subdivisions de A′ contenues dans B′. Car ces deux rapports seront alors égaux à la limite vers laquelle tend la fraction $\frac{m}{n}$ quand le nombre n croît indéfiniment. Cette remarque est importante parce qu'elle permet de simplifier beaucoup la démonstration de plusieurs propositions de géométrie.

96. Dedekind a donné une définition purement arithmétique du nombre incommensurable (*). Elle est fondée sur la distinction des nom-

---

(*) Voir à ce sujet *Mathesis*, mars 1885, p. 49.

bres commensurables en deux groupes, séparés ou non par un nombre commensurable.

Remarquons qu'un nombre commensurable quelconque, par exemple $2/3$, sépare tous les nombres commensurables plus petits que $2/3$, de tous ceux qui sont plus grands.

On peut aussi diviser l'ensemble des nombres commensurables en deux groupes tels que les nombres du premier soient tous supérieurs à ceux du second, sans qu'aucun nombre commensurable sépare ces deux groupes. Ainsi, aucun nombre entier ou fractionnaire ne sépare les nombres commensurables dont les carrés sont inférieurs à $2/3$ de ceux dont les carrés sont supérieurs à $2/3$; car aucune fraction $\frac{p}{q}$ n'est telle que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2/3$; et, par suite, pour toutes les valeurs entières de p et q on a

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 < \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{p}{q}\right)^2 > \frac{2}{3}.$$

Cela posé, on démontre le théorème suivant : *Entre deux nombres a et A appartenant, le premier au premier groupe, le second au second groupe, on peut assigner une suite indéfinie*

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots \quad a_m,$$

de nombres du premier groupe de plus en plus grands, et une suite indéfinie

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \ldots \quad A_n,$$

de nombres du second groupe, de plus en plus petits, et tels que la différence $A_n - a_m$ tende vers zéro. Il existe donc entre ces deux groupes une limite commune.

Admettons maintenant que, par un procédé quelconque, on parvienne à distinguer tous les nombres commensurables en deux groupes, l'un de nombres plus petits, l'autre de nombres plus grands, sans qu'aucun nombre commensurable sépare ces deux groupes ; on dit alors qu'ils sont séparés par un *nombre incommensurable*; c'est la limite commune dont il vient d'être question.

Par exemple, on peut distinguer tous les nombres commensurables en deux groupes, l'un comprenant ceux dont le carré est inférieur à $2/3$, l'autre ceux dont le carré est supérieur à $2/3$. Ces deux groupes ne sont séparés par aucun nombre commensurable, mais on dit, *par convention*, qu'ils sont séparés par un nombre incommensurable, représenté par le symbole $\sqrt{2/3}$.

Cette manière d'envisager les nombres incommensurables est plus abstraite que celle que nous avons exposée plus haut. Celle-ci nous semble montrer plus clairement les motifs pour lesquels on doit admettre les nombres incommensurables en arithmétique. Elle tient mieux compte de l'ordre de génération des idées parce que les nombres n'ont par eux-mêmes aucune signification, n'étant autre chose que les symboles dont on fait usage pour représenter les grandeurs. Déjà les fractions rationnelles ne se conçoivent que par l'idée de partage en parties égales de la grandeur prise pour l'unité, ce qui implique une idée de comparaison, et par conséquent de mesure; c'est par extension de cette idée que l'on parvient à la notion du nombre incommensurable, et c'est pour ce motif que nous préférons en faire usage comme point de départ d'une définition.

97. L'extension du sens attaché au mot nombre oblige à revenir sur les propositions et les règles établies antérieurement, afin de les étendre autant que possible aux nombres irrationnels. Il faut pour cela examiner ce qui arrive quand on substitue à ces derniers les fractions variables dont ils sont les limites.

Exemple. — Un produit dont quelques facteurs sont irrationnels ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs.

Car cette proposition est vraie pour le produit qu'on obtient en substituant aux facteurs irrationnels les fractions rationnelles variables dont ils sont les limites. Et ce dernier produit ne change pas, quel que soit l'ordre de ses facteurs, tandis que ceux-ci convergent vers leurs limites respectives; on peut en conclure que le produit qu'on obtient à la limite, c'est-à-dire le produit qui contient les facteurs irrationnels, est lui même indépendant de l'ordre de ses facteurs.

CHAPITRE III.

ALGÈBRE.

§ 1. — Objet de l'algèbre.

98. Il est très difficile de donner une bonne définition de l'algèbre. On dit souvent qu'elle n'est que l'arithmétique généralisée, ou arithmétique universelle; ou encore « qu'elle est la science du calcul des grandeurs considérées généralement » (D'Alembert).

Mais, comme l'a fait très bien observer Poinsot, c'est l'envisager sous un point de vue trop restreint et il y a dans l'algèbre deux parties distinctes.

Une première partie pourrait être désignée sous le nom d'arithmétique universelle; elle n'est autre chose qu'une arithmétique étendue de nombres particuliers à des nombres quelconques ; elle a pour objet non pas d'effectuer immédiatement les opérations auxquelles conduisent les problèmes qu'on résout par l'arithmétique, mais d'en tracer le tableau à l'aide de signes qui lui sont propres.

Une autre partie de l'algèbre repose sur la théorie des combinaisons et de l'ordre; elle s'occupe de la composition des formules considérées en elles-mêmes, comme purs symboles. Les opérations algébriques y sont envisagées à un point de vue purement abstrait et pourraient même, à l'inverse de ce qui a lieu pour celles de l'arithmétique, ne pas être regardées comme ayant pour objet le calcul de certaines grandeurs. Il y a plus ; il est des cas où elles seraient absurdes si on voulait les interpréter de cette façon. C'est ce qui a lieu, par exemple, quand les formules

contiennent des quantités négatives isolées ou des quantités imaginaires. Selon Poinsot cette seconde partie, qu'il appelle la science des combinaisons et de l'ordre, est même la seule qui mérite à proprement parler le nom d'algèbre; parce que c'est à elle qu'on doit rapporter la théorie profonde des équations et tout l'art des transformations algébriques.

Si on veut embrasser l'algèbre dans son ensemble, on ne peut pas dire que ce soit une arithmétique généralisée; néanmoins il ne serait pas plus exact de la considérer comme la science des combinaisons et de l'ordre. L'algèbre emprunte à cette dernière toutes les règles nécessaires pour constituer un mécanisme applicable au calcul des grandeurs; mais ces règles subsistent alors même que, pour s'élever à un plus haut degré d'abstraction, on les dépouille complètement de l'idée de calcul numérique ; et elles deviennent ainsi une partie de la théorie des combinaisons et de l'ordre.

Il serait impossible de faire comprendre ce double objet de l'algèbre dès le début. Ce n'est que par des extensions successives d'idées, à mesure qu'il avance, que l'élève s'en rendra compte. On pourra donner la définition suivante, en avertissant que le sens n'en deviendra complètement intelligible que pour celui qui aura déjà fait certains progrès :

L'algèbre a pour objet de généraliser les solutions des problèmes relatifs au calcul des grandeurs, et d'étudier la composition et les transformations des formules auxquelles conduit cette généralisation.

99. L'esprit ne peut se familiariser que graduellement avec les vérités si abstraites de l'algèbre. Aussi n'est-il peut-être pas de science pour l'exposition didactique de laquelle il soit plus à propos d'adopter la méthode qu'on pourrait appeler *méthode de l'inventeur*, et qui consiste à développer les théories à peu près dans l'ordre où elles ont été imaginées.

Cette méthode serait toujours la plus convenable dans l'enseignement si elle n'entraînait parfois des longueurs et des répétitions fatigantes. Dans les sciences naturelles, c'est souvent par de longs tâtonnements, et après avoir pendant des siècles versé dans l'erreur, que les hommes sont parvenus à la connaissance de la vérité. Quand on n'a pas à faire l'histoire de la science, on ne peut suivre ces détours. Mais si l'on peut, sans s'éloigner du but, passer d'une idée à une autre dans l'ordre où elles se sont engendrées naturellement, il ne faut pas hésiter à adopter cette

marche; car elle déroule pour ainsi dire le tableau des progrès de la science et dispose l'esprit à entrer dans la voie des découvertes, en lui donnant l'habitude de faire sortir de certaines idées fondamentales celles qui s'y trouvent contenues en germe.

Elle n'exige pas, d'ailleurs, qu'on suive l'ordre d'invention dans tous ses détails. Il suffit qu'on pose d'abord les principes les plus simples et qui ont dû se présenter les premiers; puis qu'on fasse voir comment ils se sont successivement développés et étendus.

L'algèbre est, jusqu'à un certain point, une science d'observation ainsi qu'on le verra bientôt, et elle se prête bien à un tel mode d'exposition. L'une des grandes difficultés qu'y rencontrent les commençants, est l'interprétation du calcul des quantités négatives isolées. Beaucoup d'auteurs, dans l'exposé didactique des théories de l'algèbre, s'en occupent dès le début, et établissent à cet effet des définitions et des démonstrations spéciales. Cette méthode paraît cependant offrir un inconvénient grave. Elle rend les premières notions obscures. L'élève ne peut entrevoir le but des opérations abstraites dont on lui parle, et elles doivent lui sembler incompréhensibles ou vides de sens. Il se heurte ainsi, dès les premiers pas qu'il fait en algèbre, à des difficultés presque invincibles, et il est à craindre qu'il ne soit pris de dégoût. Mieux vaut, selon nous, suivre une autre marche, que nous allons indiquer.

100. C'est par une généralisation de l'arithmétique que l'algèbre a pris naissance. On le montrera en faisant remarquer d'abord que, dans l'arithmétique la plus élémentaire, il peut être utile de faire usage de certains signes, par exemple des signes + et —, pour abréger le langage et l'écriture. On peut voir que les signes présentent en outre l'avantage de simplifier dans certains cas les calculs. C'est ce qui arrive quand ils indiquent deux opérations contraires à effectuer successivement sur un même nombre. On fera observer également qu'ils permettent quelquefois de représenter par une expression exacte le résultat d'une opération qui ne peut s'effectuer que par approximation. Telle est l'extraction de la racine carrée d'un nombre qui n'est pas carré parfait, et c'est pour ce motif que le signe $\sqrt{}$ est l'un des premiers dont on ait fait usage.

L'emploi des signes ne fait pas encore sortir de l'arithmétique pure;

mais il conduit directement à l'emploi des lettres, qui donne déjà aux formules un caractère beaucoup plus abstrait.

On résout en arithmétique des questions dans lesquelles certaines grandeurs sont liées les unes aux autres suivant une loi déterminée ; or la nature des opérations à faire pour trouver la solution, ne dépend pas des valeurs absolues des données, mais bien des relations qui existent entre elles. Les calculs à effectuer dans toutes les questions d'un même genre diffèrent, il est vrai, par les valeurs numériques des données; mais ils sont toujours de même espèce. On conçoit dès lors la possibilité de représenter par des signes généraux les valeurs particulières des grandeurs qu'on envisage. Ces symboles sont les lettres de l'alphabet. A l'aide des autres signes déjà introduits on peut indiquer toutes les opérations à effectuer sur les grandeurs dont elles tiennent la place. On obtient ainsi des formules où les lettres doivent être remplacées par des nombres quand on veut passer aux applications.

L'arithmétique ainsi généralisée, est ce que Newton a appelé l'arithmétique universelle, et ce que les anciens auteurs ont aussi désigné sous le nom de *logistique*. Elle contient en germe toute l'algèbre.

Quand on aura, par la résolution de quelques problèmes faciles, fait envisager les opérations de l'algèbre comme une généralisation de celles de l'arithmétique, on pourra passer aux démonstrations des quatre opérations fondamentales. Elles seront aisément comprises puisqu'elles seront fondées sur les principes généraux de l'arithmétique, et que les polynômes algébriques seront regardés comme représentant les résultats qu'on obtiendrait en combinant certaines grandeurs par voie d'addition, de soustraction, de multiplication, etc.

Mais il arrive un moment (après la résolution des équations du premier degré) où il est nécessaire d'interpréter les solutions négatives de certains problèmes. Il faut y préparer les élèves. A cet effet, après la démonstration de chacune des règles fondamentales, il faut leur faire observer les lois de composition des formules qui en dépendent, et leur montrer comment, par de simples extensions, on a établi les règles du calcul des quantités négatives.

De même, après la résolution des équations du premier degré, il faut faire voir qu'on peut envisager cette résolution sous un point de vue purement abstrait; c'est-à-dire qu'on peut la considérer comme ayant simplement pour objet de trouver une expression qui, mise à la place de

l'inconnue, rende les deux membres identiques. Nous allons indiquer comment il convient, selon nous, de démontrer les règles auxquelles conduisent les opérations fondamentales, et de les étendre ensuite pour leur donner tout le degré de généralité qu'elles comportent.

§ 2. Opérations fondamentales.

101. *Calcul des valeurs numériques des polynômes algébriques. Réduction des termes semblables.* — On exercera d'abord les élèves à trouver la valeur numérique que prend un polynôme algébrique quand on y remplace toutes les lettres par des nombres. Il sera nécessaire de faire observer qu'on peut intervertir l'ordre des termes, à cause de ce caractère général de l'addition et de la soustraction, que les résultats de ces opérations sont indépendants de l'ordre dans lequel les grandeurs que l'on considère sont ajoutées ou soustraites, pourvu qu'il n'y ait ni omission, ni double emploi.

Il en résulte que le calcul peut se faire d'un assez grand nombre de manières; que l'on peut, par exemple, faire séparément la somme de tous les termes positifs, puis celle de tous les termes négatifs, et retrancher la seconde somme de la première.

On peut aussi calculer les divers termes dans l'ordre où ils se présentent, et ajouter successivement chacun d'eux au résultat déjà obtenu, ou l'en retrancher suivant qu'il s'agit d'un terme positif ou négatif.

On voit également que si l'on écrit les termes dans un ordre quelconque, et qu'on les calcule successivement dans l'ordre où ils se présentent, il peut arriver qu'un terme négatif l'emporte sur la somme déjà obtenue au moyen des termes qui précèdent ; la soustraction ne serait alors possible qu'après avoir tenu compte de quelques-uns des termes positifs suivants; mais il est clair qu'on trouvera le même résultat si l'on retranche du terme négatif la somme positive déjà trouvée, et si on donne à ce résultat le signe —, pour indiquer qu'il devra être retranché dès que la soustraction sera possible.

La remarque qui précède permet d'envisager des polynômes dont le premier terme serait négatif.

Il pourra même arriver que le calcul de la valeur numérique d'un polynôme donne un résultat négatif. On pourra faire observer dans ce

cas, qu'il serait possible de concevoir des polynômes qui, à la suite des termes du polynôme proposé, en contiendraient d'autres dont l'ensemble serait positif et numériquement plus grand que la valeur négative du polynôme donné. De sorte que celle-ci pourra être regardée comme un des résultats partiels auxquels conduit le calcul des valeurs numériques de certains autres polynômes. Elle n'aura besoin, pour le moment, d'aucune autre interprétation.

La remarque qu'on peut intervertir l'ordre des termes conduit aussi immédiatement à la *réduction des termes semblables.*

102. *Addition et soustraction.* — La règle de l'addition se démontrera sans difficulté parce que nous attachons à l'opération le même sens qu'en arithmétique.

En effet, supposons qu'à un polynôme donné on veuille en ajouter un autre. Si à la suite du premier on écrivait tous les termes positifs du second, on aurait évidemment un résultat trop grand ; et pour le rectifier, il suffirait d'écrire à sa suite tous les termes négatifs du second polynôme. Or l'ordre des termes est indifférent. On peut donc aussi écrire à la suite du premier polynôme tous les termes du second pris avec leurs signes.

Il résulte de cette démonstration que la somme de plusieurs polynômes se compose de tous les termes de ceux-ci, pris avec leurs signes respectifs.

On pourrait aussi considérer l'un quelconque des polynômes comme décomposé en deux ou plusieurs groupes de termes formant autant de polynômes distincts et alors l'addition de ce polynôme reviendrait à une série d'additions partielles. Or, comme on peut faire ces opérations sans se préoccuper des valeurs numériques, il se pourrait qu'en remplaçant les lettres par des nombres, quelques-unes des parties dans lesquelles un polynôme a été décomposé divinssent négatives. On aurait donc alors donné le nom d'addition à des opérations partielles qui équivaudraient à des soustractions. Néanmoins le résultat final serait exact.

On peut donc, en algèbre, donner au mot addition un sens plus étendu qu'en arithmétique. *On appelle addition algébrique l'opération qui consiste à écrire à la suite d'un polynôme donné tous les termes d'un autre polynôme, chacun de ceux-ci étant pris avec son signe ;* et cette opération peut être décomposée en opérations partielles de même

nature qui toutes sont des additions algébriques, bien que certaines d'entre elles puissent être équivalentes à des soustractions. *On est donc conduit à généraliser cette extension et à nommer addition l'opération partielle qui consiste à écrire un terme quelconque, pris avec son signe, à la suite de ceux qui précèdent.* De là dérive la règle de l'addition des monômes. Il n'est pas possible de l'établir d'une manière plus simple et plus naturelle, ni de la démontrer avec plus de rigueur.

On pourra suivre la même marche pour la soustraction algébrique.

103. *Multiplication.* — La règle de la multiplication des monômes, en ne considérant d'abord que des monômes positifs, découle immédiatement de la définition des coefficients et des exposants.

Quand il s'agit de deux polynômes algébriques, on peut considérer successivement deux cas.

1° Supposons d'abord que ces deux polynômes aient tous leurs termes positifs. Le produit s'obtiendra, d'après les principes généraux de l'arithmétique, en multipliant toutes les parties dont se compose le multiplicande, par chacune de celles qui entrent au multiplicateur, et en faisant la somme de tous ces produits partiels. Donc le produit contiendra la somme des produits partiels qu'on obtient en multipliant chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur.

2° Considérons maintenant deux facteurs ayant des termes positifs et des termes négatifs. On pourra les écrire sous la forme $(M - N)$ et $(P - Q)$, M et P représentant des sommes de termes positifs, $-N$ et $-Q$ des sommes de termes négatifs ; le produit sera donc $(M - N)(P - Q)$.

Or, si l'on se bornait à prendre le produit de $M - N$ par P, on aurait en trop le produit de $M - N$ par Q ; donc

$$(M - N)(P - Q) = (M - N)P - (M - N)Q\,.$$

Pour former le produit $(M - N)P$, multiplions d'abord M par P ; on aura ainsi pris en trop le produit de N par P, et par conséquent on a

$$(M - N)P = MP - NP\,;$$

on a de même

$$(M - N)Q = MQ - NQ\,.$$

Donc, d'après la règle de la soustraction,

$$(M - N)(P - Q) = MP - NP - MQ + NQ\,.$$

Les produits MP, NP, ... se forment d'après la règle établie plus

haut. De là on déduit la règle générale de la multiplication des polynômes en faisant remarquer que le produit contient les produits partiels de tous les termes du multiplicande par tous ceux du multiplicateur ; et que ces produits partiels sont précédés du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que les deux termes qui ont servi à les former ont le même signe, ou des signes contraires.

Il résulte de cette loi que si l'on considère chacun des deux facteurs comme la somme de plusieurs polynômes, le produit se compose de la somme des produits partiels que l'on obtient en multipliant chacune des parties du multiplicande par chacune de celles du multiplicateur. Or, si l'on donnait ensuite aux lettres des valeurs numériques, quelques-uns de ces polynômes partiels pourraient devenir négatifs, et l'on aurait par conséquent étendu le nom de multiplication à des opérations partielles qui n'auraient plus le même sens que celles auxquelles on donne le nom de multiplication en arithmétique. Néanmoins le résultat final serait exact.

A raison de cette circonstance on peut donc dire que le produit est égal à la somme des produits partiels que l'on obtient en multipliant toutes les parties du multiplicande par toutes celles du multiplicateur, de quelque manière qu'ait été faite la décomposition de ces deux facteurs. Or, si l'on pousse cette décomposition aussi loin que possible, on devra faire la somme des produits partiels de chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur; et *alors on devra entendre par multiplication algébrique d'un terme par un autre l'opération qui consiste à former le produit de ces monômes, abstraction faite des signes, et à l'affecter du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que les deux termes que l'on multiplie ont le même signe ou des signes opposés*. De là la règle de la multiplication des monômes.

La loi de composition du produit de deux polynômes, est donc un fait algébrique que l'on a constaté; et l'on a fait dériver de cette loi la règle des signes de la multiplication des monômes en étendant le nom de multiplication à l'opération qui consiste à multiplier un terme quelconque du multiplicande par un terme du multiplicateur, et à donner au produit partiel le signe convenable pour obtenir un des termes du produit des deux polynômes. La multiplication de deux monômes, en ayant égard à leurs signes, ne doit être regardée ici que comme une opération partielle; pour le moment on n'y attachera pas d'autre sens.

Il semble qu'il serait très difficile de donner une meilleure explication de la règle des signes; au moins les autres méthodes qui ont été essayées pour l'établir ne montrent pas aussi bien sa raison d'être. Plus tard nous aurons à revenir sur ce point (voir § 4).

104. On voit que, dès les premiers pas qu'on fait en algèbre, on observe certaines lois qui régissent la composition des formules; et *c'est en une série d'observations du genre de celles que nous venons de faire, que consiste la théorie de la composition des formules algébriques.*

Après avoir démontré la règle de la multiplication, on fera remarquer que si l'on formait le produit $(M - N)(Q - P)$, il serait composé de la même manière que le précédent aux signes près. D'où l'on conclut que le produit de deux polynômes change de signe quand on change les signes de tous les termes de l'un d'eux. Il est d'ailleurs évident qu'un monôme change également de signe quand on change le signe de l'un de ses facteurs.

Il résulte encore de là qu'un monôme change de signe quand on change les signes d'un nombre impair de ses facteurs; tandis qu'il ne varie pas quand on change les signes d'un nombre pair de ses facteurs. Donc, si on change le signe d'une lettre dans tous les termes d'un polynôme, les termes où cette lettre entre avec un exposant pair ne changent pas, tandis que les autres changent de signe.

105. Considérons maintenant le produit de plusieurs facteurs A.B.C.D...., et observons la loi de sa composition.

Si l'on forme d'abord le produit des deux premiers facteurs AB, ce produit contient tous les produits partiels de chacun des termes de A par chaque terme de B. En le multipliant ensuite par C, chaque terme de AB sera à son tour multiplié par chaque terme de C; et par conséquent le nouveau produit ABC renfermera tous les produits partiels que l'on peut former en prenant un terme dans chacun des facteurs A, B, C, et en multipliant ces termes l'un par l'autre. On peut continuer ce raisonnement quel que soit le nombre des facteurs A, B, C, D,... Donc, le produit d'un nombre quelconque n de polynômes, se compose de la somme de tous les produits partiels qu'il est possible de former en prenant un terme dans chaque facteur et en multipliant ces n termes entre eux.

De cette loi de composition d'un produit découlent plusieurs conséquences importantes :

1° Étant donné un produit de plusieurs facteurs algébriques, on peut

intervertir l'ordre de ces facteurs; car la loi de composition que nous venons de faire connaître ne dépend en aucune façon de cet ordre et, par conséquent, si on le change, le produit n'est pas altéré. Cette démonstration, comme on voit, ne repose nullement sur la signification que l'on attache en arithmétique à la multiplication.

2° La formule

$$(M - N)(P - Q) = MP + NQ - MQ - NP,$$

est une identité; c'est-à-dire que l'une quelconque des lettres qui entrent dans les polynômes M, N, P, Q peut être remplacée par une expression algébrique quelconque, un monôme ou un polynome, et qu'en effectuant ensuite les calculs indiqués dans les deux membres, ceux-ci deviennent identiquement les mêmes.

En effet, considérons dans le multiplicande un terme quelconque contenant une lettre x à la puissance α, et soit ce terme Rx^α. Dans le multiplicateur prenons un terme contenant cette même lettre à la puissance β, soit Sx^β; le produit des deux polynômes contiendra le produit partiel $RSx^{\alpha+\beta}$.

Or, si l'on remplace x par une expression algébrique quelconque, que pour plus de généralité nous supposerons un polynôme, le multiplicande contiendra au lieu du terme Rx^α, une série de termes qui seront le produit de R multiplié par la puissance α du polynôme substitué à x; le multiplicateur contiendra de même, au lieu du terme Sx^β, une série de termes qui seront le produit de S multiplié par la puissance β du polynôme qui remplace x; et le nouveau produit ne contiendra plus le terme $RSx^{\alpha+\beta}$; mais on y trouvera, à sa place, le produit des deux séries de termes dont il vient d'être question. Or, comme l'ordre dans lequel on multiplie plusieurs facteurs est indifférent, le produit de ces deux séries de termes équivaut à la série des termes obtenus en multipliant R par S; puis le produit RS par la puissance α du polynôme substitué à x, et ensuite par la puissance β de ce polynôme; mais cela revient à dire qu'il équivaut au résultat que l'on obtient en remplaçant x par le polynôme donné dans le terme $RSx^{\alpha+\beta}$ du produit primitif.

Ce raisonnement s'applique à tout autre terme du produit; donc au lieu de faire les substitutions dans les deux facteurs et de multiplier entre eux les résultats obtenus, on peut faire directement les substitutions dans le produit primitif.

L'identité de la formule en question dépend de ce caractère général de la multiplication algébrique, que le produit renferme tous les termes du multiplicande combinés par voie de multiplication avec tous ceux du multiplicateur, l'ordre dans lequel ces combinaisons ont été effectuées étant d'ailleurs indifférent, pourvu qu'il n'y ait ni omission ni double emploi.

Il sera bon de faire vérifier cette identité sur des exemples; on y trouvera le double avantage d'exercer les élèves au calcul, et de leur faire comprendre ce que l'on entend par identité et par formules générales.

3° Enfin il faut faire voir que dans tout produit il y a des termes qui ne peuvent se réduire avec aucun autre. Ce sont tous les produits partiels de deux termes qui contiennent une lettre quelconque avec le plus grand exposant au multiplicande et au multiplicateur respectivement ou qui la contiennent avec le plus petit exposant. Cette dernière remarque permet de déterminer sans tâtonnements le quotient d'une division.

106. *La division algébrique* étant l'opération inverse de la multiplication, la règle de la division n'est qu'une conséquence de celle de la multiplication, et les divers termes du quotient s'obtiennent sans tâtonnements en partant de la dernière remarque qui vient d'être faite ci-dessus.

Il n'y a pas ici de nouveaux faits algébriques à constater si ce n'est l'identité de la formule $A = BQ + R$, Q étant le quotient et R le reste de la division de A par B.

§ 3. Équations du premier degré à une inconnue. — Interprétation des solutions négatives.

107. Comme introduction à la théorie des équations on peut commencer par résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

On fera observer que, pour trouver la solution, on a dû égaler deux expressions algébriques renfermant une certaine inconnue x; que si l'on fait varier x dans ces deux expressions, elles prennent des valeurs variables, mais généralement inégales; de sorte qu'on ne peut les joindre par le signe de l'égalité, qu'en supposant que l'on attribue à x une valeur particulière pour laquelle elles deviennent égales.

Après ces remarques on pourra donner la définition d'une équation

en disant que *deux expressions algébriques renfermant une ou plusieurs inconnues et réunies par le signe d'égalité constituent une équation.*

Déterminer les valeurs qu'il faut attribuer aux inconnues pour que les deux membres de l'équation deviennent égaux, c'est ce qu'on appelle *résoudre* l'équation.

Les règles relatives à la résolution des équations du premier degré à une inconnue tirent leur origine des principes les plus élémentaires de l'arithmétique, savoir :

1° Qu'on peut ajouter deux quantités égales à deux autres quantités égales entre elles, ou les en retrancher, sans qu'il cesse d'y avoir égalité. De là la règle qu'un terme peut passer d'un membre de l'équation dans l'autre en changeant de signe. Si l'on fait subir à une équation une transformation de ce genre, la valeur de x qui rend égaux les deux membres de l'équation primitive rendra aussi égaux les deux membres de la transformée et réciproquement.

2° Qu'on peut multiplier ou diviser deux quantités égales par une même troisième, ou en général par deux quantités égales entre elles, sans altérer l'égalité. A l'aide de ce second principe on peut faire disparaître les dénominateurs, et dégager l'inconnue de son coefficient. Ici encore il y a réciprocité, c'est-à-dire, qu'une valeur de x qui vérifie l'équation donnée satisfait aussi à la nouvelle équation, et réciproquement. Toutefois il faut que les facteurs introduits ou supprimés soient différents de zéro.

Les principes qui précèdent conduisent sans difficulté à la résolution des équations du premier degré à une inconnue. Ils permettent de ramener toute équation de ce genre à la forme simple $ax = b$, d'où l'on tire $x = \frac{b}{a}\cdot$ Cette valeur de x non seulement résout l'équation proposée, mais elle en est la seule solution ; car chacune des équations par lesquelles on passe successivement est vérifiée par les solutions de la précédente et réciproquement.

108. Les règles relatives à la résolution des équations du premier degré étant établies, on peut proposer une équation telle qu'en les y appliquant on trouve pour l'inconnue une valeur négative. On fera alors remarquer que si l'on substitue cette valeur à x dans les deux membres de l'équation, ceux-ci deviennent identiques. On en conclura qu'il est des

équations auxquelles on ne peut satisfaire par aucune valeur positive de l'inconnue, mais dont les deux membres deviennent identiques lorsqu'on substitue à x une certaine valeur négative, et que l'on effectue ensuite, suivant les règles du calcul algébrique, toutes les opérations indiquées.

Cette remarque permettra de donner plus d'extension au sens que l'on attachait d'abord au mot résolution ; et l'on dira que *résoudre une équation c'est déterminer la valeur qu'il faut substituer à x dans les deux membres pour les rendre identiques.*

La résolution de l'équation entendue dans ce sens plus large, s'effectue d'ailleurs absolument de la même manière que précédemment; en effet :

1° Si les deux membres sont identiques pour une certaine valeur de x, ils le resteront lorsqu'on y ajoutera ou qu'on en retranchera une même expression algébrique ; de sorte que si l'on fait passer un terme d'un membre dans l'autre en changeant son signe, la nouvelle équation sera une conséquence de la première et réciproquement ; donc ces équations auront les mêmes solutions.

2° Si l'on multiplie ou que l'on divise les deux membres par une même expression qui ne soit pas égale à zéro, l'identité de la première équation entraîne celle de la seconde et réciproquement.

D'après cela, il est clair que l'on pourra ramener toute équation du premier degré à la forme $x = \frac{b}{a}$, et que la valeur $\frac{b}{a}$, quelle qu'elle soit, positive ou négative, sera la solution de l'équation proposée, et la seule solution ; car c'est la seule qui rende identiques les deux membres de la dernière équation $x = \frac{b}{a}$, et nous venons de voir que les solutions de celle-ci sont précisément les mêmes que celles de la proposée.

Remarque. — Il importe d'observer que si dans tous les termes d'une équation on change x en $-x$, l'équation transformée donnera pour x une valeur égale et de signe contraire à celle que donnait l'équation primitive ; car en opérant sur l'équation transformée comme on avait opéré sur l'équation primitive pour la résoudre, il est évident que toutes les équations que l'on trouvera successivement, y compris l'équation finale, ne différeront de celles que l'on avait obtenues auparavant, qu'en ce que x sera remplacé par $-x$; de sorte qu'on trouvera

$$-x = \frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{a}.$$

109. *Interprétation des solutions négatives.* — Jusqu'ici nous avons bien fait certaines remarques sur les transformations que subissent les formules algébriques quand on y change un symbole en un autre précédé d'un signe —; nous avons vu aussi que les quantités négatives isolées résolvent certaines équations lorsque l'on attache à cette résolution le sens le plus abstrait; nous n'avons eu qu'à constater ces faits; ils n'avaient pas besoin d'être autrement interprétés.

Mais en résolvant certains problèmes par l'algèbre, on trouve des solutions négatives qui exigent une interprétation convenable. C'est la conséquence de ce qu'au problème primitif on en substitue un autre qui est du domaine de l'algèbre pure, puisqu'il a pour objet de résoudre une équation. On le fait ordinairement sans se demander si les deux problèmes ont exactement les mêmes solutions. C'est pourquoi il est indispensable de discuter après coup celles que l'on trouve. Il est d'ailleurs impossible d'expliquer ceci autrement que par des exemples. Nous les choisirons très simples.

Premier exemple. — On connaît les âges a et b de deux personnes et on demande dans combien d'années l'âge de la première sera égal à n fois l'âge de la seconde.

L'équation du problème est

$$a + x = n(b + x); \quad \text{d'où} \quad x = \frac{nb - a}{1 - n}.$$

Si l'on suppose que la première personne soit âgée de 45 ans, la seconde de 15 ans et que l'on demande dans combien d'années l'âge de la première sera quadruple de celui de la seconde, cette formule donne $x = -5$.

Au point de vue de l'algèbre pure, $x = -5$ est une solution de l'équation du problème :

$$45 + x = 4(15 + x).$$

C'est même la seule solution de cette équation, puisque c'est la seule valeur de l'inconnue pour laquelle les deux membres deviennent identiques.

Mais, d'autre part, la valeur $x = -5$ ne peut être considérée comme une solution de la question proposée; à ce point de vue $x = -5$ n'aurait aucun sens, et il reste à chercher d'où résulte cette singularité.

En remontant à l'équation, on reconnaît qu'elle renferme une contra-

diction, lorsqu'on donne aux deux membres le *sens concret* qu'on leur a supposé lors de la mise en équation ; en effet, en ajoutant à 45 ans un certain nombre d'années, on ne peut jamais trouver le quadruple de la somme obtenue en ajoutant ce même nombre d'années à 15 ; puisque cela revient à dire que l'on devrait trouver la même somme en ajoutant un nombre à 45, qu'en ajoutant quatre fois ce nombre à 60. Remontant ensuite jusqu'à l'énoncé, on reconnaît qu'il demande une chose impossible. Car l'âge de A étant actuellement triple de celui de B, ne saurait devenir quadruple dans l'avenir ; il a été quadruple dans le passé et ce rapport ne peut plus que décroître indéfiniment. La solution négative est la forme sous laquelle l'algèbre manifeste l'absurdité de la question. Dans cet exemple la solution négative provient donc de l'absurdité de l'énoncé. On va voir qu'il n'en est pas toujours ainsi.

Deuxième exemple. — Deux courriers partant simultanément des points A et B vont à la rencontre l'un de l'autre. A fait m lieues à l'heure ; B, n lieues. Sachant que le point M, milieu de AB est à une distance d des points extrêmes, trouver la distance de ce point M au point de rencontre des deux courriers.

Plaçons le point de rencontre en C, et soit $CM = x$; l'équation du

Fig. 4.

C‴ A C M C′ B C″ M′

problème s'obtiendra en exprimant que les distances AC et BC sont franchies dans les temps égaux

$$\frac{d-x}{m} \quad \text{et} \quad \frac{d+x}{n}; \quad \text{d'où} \quad \frac{d-x}{m} = \frac{d+x}{n}; \quad x = \frac{d(n-m)}{m+n}.$$

Faisons $d = 50$, $m = 3$, $n = 2$; on aura $x = -10$.

Il est aisé de voir encore que cette solution négative résulte de ce que l'équation renferme une contradiction lorsque l'on donne aux deux membres la signification qu'on leur a attribuée pour la mise en équation ; car cette équation devient

$$\frac{50-x}{3} = \frac{50+x}{2}.$$

Et puisque $50/3$ est plus petit que $50/2$, il est impossible qu'en retranchant une certaine quantité de la première fraction on obtienne le même résultat qu'en ajoutant quelque chose à la seconde.

Si l'on remonte à l'énoncé on voit que A, courant plus vite que B, franchira plus de la moitié de la distance qui les sépare, et que par conséquent le point de rencontre ne se trouve pas entre A et M, mais bien entre M et B. Ici le problème est évidemment possible ; mais dans la mise en équation on a fait une fausse hypothèse en plaçant le point de rencontre en C.

Dans ces deux exemples l'équation contient donc une impossibilité, du moins lorsqu'on prend les deux membres dans le sens concret qu'on y a attaché, et qui ne permet pas de regarder x comme une valeur négative. Ce résultat peut se généraliser; on peut établir en principe que *dans tous les problèmes du premier degré où l'inconnue est une grandeur concrète, et non une valeur purement algébrique, une solution négative indique l'impossibilité de satisfaire à l'équation tant qu'on laisse aux deux membres le sens concret qu'on leur a attribué.*

Ce principe est en quelque sorte évident. En effet, quand x représente une grandeur concrète, une valeur négative attribuée à cette inconnue serait un non-sens. D'autre part, la résolution prouve qu'aucune valeur positive de x ne peut vérifier l'équation, et que, par conséquent, celle-ci exprime une impossibilité tant qu'on laisse aux deux membres leur sens concret.

Mais de ce que l'équation renferme une telle impossibilité, on ne peut pas conclure que le problème proposé est lui-même impossible ; c'est ce que prouve le second des exemples que nous venons de donner; il montre que, pour mettre le problème en équation, on fait parfois certaines hypothèses qu'on ne vérifie pas immédiatement et qui, par conséquent, peuvent ne pas être d'accord avec l'énoncé.

Si l'on n'a fait aucune hypothèse ou si l'on n'a fait que des hypothèses qui se trouvent implicitement ou explicitement contenues dans la question, l'équation est la traduction exacte de l'énoncé, et l'impossibilité de la résoudre dans le sens où elle a été établie, prouve l'impossibilité de résoudre le problème. Tel est le cas dans le premier exemple traité plus haut.

Si, au contraire, les hypothèses faites pour la mise en équation sont en contradiction avec les conditions de l'énoncé ou n'en sont pas des conséquences nécessaires, l'équation cesse d'être la traduction exacte de l'énoncé. Il se peut alors que le problème soit susceptible d'être résolu, et que l'algèbre nous avertisse, par une solution négative, de la faute commise dans la mise en équation.

110. Les solutions négatives peuvent servir à reconnaître si le problème est impossible ou s'il y a eu quelque erreur dans la mise en équation. Elles permettent dans ce dernier cas de redresser l'erreur et, dans le premier, de trouver l'énoncé d'un autre problème ayant avec le proposé une analogie plus ou moins grande, et ayant pour solution la valeur négative de x prise en signe contraire.

Remarquons, en effet, que si dans l'équation proposée on change x en $-x$, l'équation transformée donnera pour x une valeur positive égale, au signe près, à la solution négative trouvée d'abord. Si on rapproche donc la nouvelle équation de l'énoncé, et s'il suffit pour qu'ils s'accordent de modifier certaines hypothèses, que l'on a faites pour la mise en équation, mais qui ne sont pas des conséquences nécessaires de l'énoncé, la solution négative, prise en signe contraire, est la solution du problème.

Mais si cela n'a pas lieu, si l'on ne peut faire concorder l'équation transformée avec l'énoncé du problème, celui-ci est impossible. Et en général la solution de cette équation transformée est celle d'un autre problème dont l'énoncé diffère du premier en ce que certaines quantités, de positives qu'elles étaient, deviennent négatives et réciproquement.

Appliquons ceci aux deux exemples du n° 109.

Premier exemple. — Changeons x en $-x$ dans l'équation; celle-ci devient

$$a - x = n(b - x); \quad \text{ou} \quad 45 - x = 4(15 - x);$$

et on reconnaît qu'elle est la traduction de l'énoncé suivant :

Une personne A est âgée de 45 ans; B en a 15; à quelle époque l'âge de A a-t-il été quadruple de celui de B? En désignant par x le nombre d'années qui se sont écoulées depuis l'époque cherchée, on trouve l'équation ci-dessus; donc $x = 5$ est la solution.

Deuxième exemple. — L'équation transformée est ici

$$\frac{d + x}{m} = \frac{d - x}{n}; \quad \text{ou} \quad \frac{50 + x}{3} = \frac{50 - x}{2};$$

elle s'accorde avec l'énoncé du problème en mettant le point de rencontre en C′ entre M et B (fig. 4), et en prenant pour l'inconnue x la distance MC′. On trouve $x = 10$, ce qui nous apprend que la distance MC′ est de 10 lieues.

111. Il faut se garder de croire que toute fausse hypothèse que l'on ferait lors de la mise en équation serait redressée par une valeur négative de l'inconnue.

Ainsi, dans le second problème, supposons qu'on ait placé le point de rencontre en C″, et soit $MC'' = x$; d'où $BC'' = x - 50$, $AC'' = x + 50$.

L'équation deviendrait

$$\frac{50 + x}{3} = \frac{x - 50}{2}; \quad \text{d'où} \quad x = 250.$$

Cette solution positive de l'équation n'est pas la solution du problème parce que l'équation est en contradiction avec l'énoncé qui dit que les courriers vont en sens opposés, tandis qu'ils ne pourraient se rencontrer en C″ qu'en courant dans le même sens. Il est donc nécessaire, lors de la mise en équation, d'étudier attentivement la question, et de ne jamais faire d'hypothèse tellement contraire aux conditions de l'énoncé, qu'une solution positive serait elle-même inadmissible.

112. Après nous être occupé de l'interprétation des solutions négatives que l'algèbre fournit quelquefois, il nous reste à faire voir que, dans certaines questions, les quantités négatives isolées peuvent aussi être introduites à priori dans le calcul, auquel elles donnent dès lors un degré de généralité que l'on ne pourrait obtenir sans leur emploi.

Elles fournissent le moyen de réunir dans une seule formule différents cas d'une même question. Nous le ferons voir d'abord en supposant que dans notre second exemple on modifie l'énoncé en ce sens que les deux courriers se dirigent vers le point C″. L'équation du problème est alors, en faisant $x = MC''$ (fig. 4),

$$\frac{d + x}{m} = \frac{x - d}{n}.$$

Elle ne diffère de l'équation trouvée au n° 110, que par le signe du second membre; donc, si dans la seconde équation on change le signe de n, on trouve la première et, par conséquent, on peut la considérer comme applicable aux deux cas, pourvu que l'on y regarde la vitesse n comme positive ou négative suivant que le courrier B se dirige vers C″ ou vers C.

Il arrive fréquemment que l'on peut ainsi donner aux formules un caractère de grande généralité en y considérant certaines quantités

susceptibles d'être prises en deux sens opposés, comme positives ou négatives suivant qu'on les prend dans un sens ou dans l'autre.

113. On sait que les quantités négatives, employées de cette manière, se présentent surtout dans les applications de l'algèbre à la géométrie ; mais il existe d'autres classes très nombreuses de questions où l'on peut en faire un usage semblable. *Ce sont particulièrement celles où entre la considération de grandeurs continues, mesurées à partir d'une origine arbitraire, dans deux sens opposés et bien déterminés.*

Nous examinerons le cas où il s'agit du temps; et l'on verra sans peine que ce que nous en dirons s'appliquerait à une foule d'autres cas analogues, en particulier à celui où il s'agit de déterminer la position d'un point sur une droite fixe.

Pour exprimer en nombre la durée d'un phénomène, il faudra faire choix d'une unité de temps arbitraire. Veut-on fixer ensuite l'époque à laquelle un phènomène instantané a eu lieu? On choisira arbitrairement un point de départ, une origine, et l'on mesurera le temps écoulé entre l'instant pris pour origine, et celui dont on veut fixer l'époque. On pourra faire la même chose pour une multitude d'autres instants, en partant toujours de la même origine, ce qui donnera une suite de nombres destinés à fixer l'ordre des événements dans la série des temps, leur situation dans le temps ou leur chronologie.

Les événements dont il s'agit d'établir la chronologie peuvent être les uns antérieurs, les autres postérieurs à l'instant pris pour origine. Il faudra distinguer par un signe quelconque les dates des événements, suivant qu'elles se rapportent à l'un ou l'autre cas. Nous allons voir que la force des choses nous conduit à adopter les signes $+$ et $-$ pour caractères distinctifs.

Soient

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ k,\ l,\ m,\ n,\ o,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u,\ \ldots$$

les dates d'une suite d'événements

$$\mathrm{A, B, C, \ldots, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, \ldots}$$

les uns précédant, les autres suivant l'événement O, dont la date (zéro) est prise pour origine.

L'origine étant arbitraire, on pourra la déplacer. Supposons qu'on veuille la reporter à la date de l'événement R; les dates de S, T, U, ... deviendront alors : $s - r,\ t - r,\ u - r, \ldots$

Pour avoir la date d'un événement par rapport à la nouvelle origine, l faut donc, des dates rapportées à l'origine primitive, retrancher la date qu'avait d'abord la nouvelle origine. Mais, si l'on voulait généraliser cette règle et l'appliquer aux événements Q, P, ... compris entre l'ancienne origine et la nouvelle, on trouverait pour ces événements les dates $q - r$, $p - r$, ... Ces quantités seraient négatives, et auraient pour valeurs numériques respectives $r - q$, $r - p$, ...; c'est-à-dire les temps qui expriment de combien les événements correspondants sont antérieurs à l'origine nouvelle. Pour pouvoir étendre ainsi la règle, il faut donc admettre que les dates sont positives si elles sont postérieures à l'origine ou à *l'ère*, et négatives si elles lui sont antérieures. Moyennant cette interprétation des résultats négatifs, la règle précédente est générale ; nous venons de voir, en effet, qu'elle s'applique à tous les événements postérieurs à l'ancienne origine ; mais elle s'applique également à ceux qui lui sont antérieurs ; car les dates de ceux-ci étant maintenant supposées négatives, la série des dates par rapport à l'origine 0 sera :

$$-k, -l, -m, -n, o, +p, +q, +r, +s, +t, +u, \ldots$$

En retranchant r de toutes ces dates, on trouve

$$-k-r, -l-r, \ldots, -r, p-r, q-r, o, s-r, \ldots$$

Ces valeurs sont positives ou négatives selon que les événements correspondants suivent ou précèdent l'origine R, et, abstraction faite du signe, elles sont égales aux temps écoulés entre chacun d'eux et l'événement R pris pour nouvelle origine, ce qui s'accorde avec la manière dont les dates doivent être désignées.

Nous avons déplacé l'origine en la reportant à une époque plus moderne. Il est facile de s'assurer que la règle reste d'ailleurs applicable au déplacement de l'origine vers une époque plus ancienne.

Les raisonnements que nous venons de faire ne dépendent évidemment pas de la nature des grandeurs auxquelles nous les avons appliqués ; ils seraient vrais notamment, si l'on considérait les positions relatives de points situés sur une droite fixe. Il en serait de même des températures évaluées en degrés positifs ou négatifs, mesurés de part et d'autre d'un zéro arbitraire et l'on pourrait citer beaucoup d'autres exemples.

On voit donc qu'on peut énoncer cette règle générale : *Pour effectuer un déplacement de l'origine arbitraire, il faut de toutes les quantités algé-*

briques représentant les situations relatives à l'ancienne origine, soustraire la quantité algébrique représentant la situation de la nouvelle origine par rapport à l'ancienne; et par situation il faut entendre ici situation soit dans le temps, dans l'espace, dans l'état thermométrique, etc.

Cela posé, il est aisé de reconnaître que *lorsque des quantités à origine arbitraire entrent comme inconnues dans un problème, les solutions négatives fournies par l'algèbre sont, en général, des solutions de la question proposée, pourvu qu'on les interprète comme indiquant une situation, par rapport à l'origine, opposée à celle où l'on suppose les quantités positives.*

En effet, admettons que l'on ait trouvé pour l'inconnue x, qui avait été supposée d'un côté de l'origine, une valeur négative $x = -p$. L'origine étant arbitraire, nous pourrons la reculer d'une quantité k plus grande que p; alors la nouvelle origine sera déterminée par rapport à l'origine primitive par la quantité $x' = -k$; et les situations par rapport à cette nouvelle origine s'obtiendront en retranchant $-k$ des quantités qui se rapportaient à l'origine primitive.

Soit y l'inconnue du problème, comptée à partir de l'origine nouvelle. On aura donc

$$y = x - (-k) = x + k \quad \text{d'où} \quad x = y - k;$$

d'ailleurs les raisonnements sur lesquels est fondée la mise en équation sont indépendants du choix de l'origine, laquelle est, par hypothèse, entièrement arbitraire; donc en substituant dans toutes les équations $y - k$ à x, nous aurons sans autre changement, les équations relatives à l'hypothèse actuelle; on trouvera donc finalement $y - k = -p$, ou $y = k - p$. Cette valeur est positive puisque $k > p$. Donc, quand on adopte la nouvelle origine, on ne trouve plus une solution négative; on trouve la solution positive $y = k - p$. Or, une distance $k - p$ de l'origine nouvelle, correspond à la distance p de l'origine primitive, mais prise en sens inverse. Donc on aura la solution en se plaçant à la distance p de l'origine primitive, mais du côté opposé à celui où l'on aurait dû se placer si la solution avait été positive.

Remarque. — Pour que la démonstration soit valable, la solution positive $y = k - p$ doit être effectivement une réponse à la question. Or nous avons vu qu'une solution positive peut ne pas résoudre le problème si, pour le mettre en équation, on a fait des hypothèses contraires à l'énoncé. C'est ce qui arriverait si l'on plaçait en C''' le point de rencontre de deux courriers se dirigeant l'un vers l'autre en partant de

A et de B (fig. 4), avec des vitesses respectives de 3 lieues et de 2 lieues à l'heure. Car en prenant pour inconnue $x = MC'''$ on aurait l'équation

$$\frac{x-50}{3} = \frac{x+50}{2}; \quad \text{d'où} \quad x = -250.$$

On ne saurait prétendre que cette valeur doit être portée de M en C'', puisque si l'on transportait l'origine de M en M', au delà de C'', la valeur positive, $y = M'C''$, que l'on obtiendrait après ce déplacement, ne donnerait pas la solution de la question, le point de rencontre étant en C' et non pas en C''.

114. Il est encore un autre cas où les solutions négatives sont, en général, d'une interprétation facile. En effet, il est des grandeurs qui ont entre elles de telles relations de symétrie que la soustraction de l'une équivaut à l'addition de l'autre et inversement; en sorte qu'elles peuvent être évaluées numériquement au moyen de la même unité quoique d'ailleurs ni l'une ni l'autre n'aient à proprement parler, un zéro ou une origine arbitraire.

Ainsi, à propos du problème des courriers, nous avons déjà vu que deux vitesses opposées peuvent être considérées comme de signes contraires, bien qu'il n'y ait pas ici d'origine arbitraire, et que le zéro corresponde à un état bien déterminé. celui où le mobile reste en repos.

De même, dans la théorie des deux fluides électriques l'addition d'une certaine quantité de fluide positif équivaut à la soustration d'une quantité de fluide négatif capable de neutraliser la première. Si la quantité de fluide positif est exprimée par le nombre a, la quantité correspondante de fluide négatif sera convenablement exprimée par $-a$. Il ne s'agit pas ici de grandeurs à origine arbitraire; le zéro électrique correspond à l'état d'un corps qui n'est chargé que de fluide neutre ou, si l'on veut, qui n'est chargé ni de fluide positif, ni de fluide négatif.

Ainsi encore, dans le bilan d'un négociant, les créances et les dettes, mesurables au moyen de la même unité monétaire, seront convenablement distinguées par les signes $+$ et $-$, à cause de la propriété qu'elles ont de se compenser, de telle sorte qu'une diminution du passif équivaut à un accroissement égal de l'actif et réciproquement. Toutes les fois qu'un problème a pour objet de déterminer une grandeur de ce genre, une solution négative est, en général, facile à interpréter. Néanmoins il ne faut jamais négliger la discussion par laquelle on vérifie cette interprétation.

§ 4. Considérations générales sur la théorie des quantités négatives, et objections que l'on y a opposées.

115. Nous avons établi toutes les règles du calcul des quantités négatives par de simples extensions de celles que nous avons démontrées en attachant aux opérations le même sens qu'en arithmétique. La théorie de ces quantités, telle que nous l'avons exposée se compose de deux parties.

1° D'observations relatives aux lois de composition de certaines formules algébriques, observations qui nous ont permis de généraliser et d'étendre aux quantités négatives toutes les règles de l'algèbre, en y attachant un sens purement abstrait.

2° De l'interprétation et de l'emploi des quantités négatives isolées dans des questions relatives au calcul des grandeurs.

C'est parce que l'on n'a généralement pas fait cette distinction que la théorie des quantités négatives a été l'objet de tant de controverses. Les objections que l'on y oppose proviennent de la confusion que l'on fait entre ce qui appartient à l'algèbre pure, où l'on considère les formules au point de vue le plus abstrait, et ce qui appartient aux applications que l'on peut en faire au calcul des grandeurs.

Les opérations de l'algèbre se réduisent à combiner des symboles suivant des règles invariables, faciles à démontrer quand on regarde les lettres comme signes représentatifs de grandeurs; chacune des opérations fondamentales donne lieu à certaines lois de composition des formules, que l'observation fait connaître, et dont il est aisé d'établir le caractère de généralité. Nous avons tâché de faire ressortir ce qu'il faut entendre quand on dit que les lois de composition des formules sont générales et indépendantes de l'idée de grandeur attachée aux symboles. Cela veut dire qu'une lettre pourrait dans ces formules être remplacée par une expression algébrique quelconque; et qu'en faisant les calculs d'après les règles établies, les formules ainsi modifiées se vérifieraient nécessairement. Le calcul est alors complètement abstrait, et on peut l'effectuer sans se préoccuper de savoir quel sens il faut y attacher. On pourrait même lui donner une signification toute autre qu'en arithmétique. Mais comme les opérations de l'algèbre tirent leur origine de celles de l'arithmétique, elles restent applicables au calcul des grandeurs, alors même qu'en les effectuant on les considère sous le point de vue le plus

abstrait. C'est ainsi que l'algèbre peut être appliquée à la résolution de nombreux problèmes. Dans chaque application, à la question primitive on en substitue une autre qui a pour objet de résoudre une ou plusieurs équations.

Quand on fait cette substitution sans s'assurer préalablement que les conditions des deux problèmes sont réciproques, ou même sans examiner si quelques hypothèses que renferme le second ne sont pas en contradiction avec l'énoncé du premier, faut-il s'étonner de ce que certaines solutions fournies par l'algèbre ne correspondent pas, ou ne correspondent qu'imparfaitement à celles du problème primitif?

L'algébriste doit donc interpréter les résultats auquels il est conduit. Les interprétations varient d'ailleurs suivant les cas; et c'est pour avoir voulu trop généraliser quelques-unes d'entre elles, particulièrement celle qui se rapporte aux grandeurs à origine arbitraire, que l'on est tombé dans beaucoup de difficultés et de contradictions. Plus loin nous en examinerons quelques-unes.

116. Il est beaucoup d'auteurs qui établissent à priori les règles du calcul des quantités négatives. La première notion qu'ils en donnent consiste à les regarder comme le résultat d'une soustraction impossible. Afin de faire comprendre jusqu'à un certain point les avantages qu'elles procurent dans les applications, ils choisissent quelques exemples où des grandeurs entrent dans deux acceptions contraires qui permettent de les distinguer par les signes $+$ et $-$. Puis ils adoptent comme une convention cette manière de les représenter.

Les quantités négatives étant ainsi introduites, ils expliquent comment on effectue sur elles les opérations fondamentales; et comme les définitions que l'on donne de celles-ci en arithmétique n'auraient pas de sens dans bien des cas, ils les modifient chaque fois que cela est nécessaire. A cet effet ils se bornent ordinairement à *énoncer la règle à suivre dans chaque opération en la regardant comme une simple convention; et cette règle n'est alors que la définition même de l'opération.*

Quand on suit cette marche il est indispensable de faire observer que les conventions établies pour le calcul des quantités négatives, conduisent à des règles qui sont absolument les mêmes que dans le cas où l'on opère sur des quantités positives et où, par conséquent, les opérations pourraient être considérées comme effectuées sur des nombres. Cette remarque, que

trop souvent on néglige de faire d'une manière explicite, est cependant importante ; car elle montre qu'il est inutile, quand on fait un calcul algébrique, de vérifier si les quantités sur lesquelles on l'effectue sont positives ou négatives, et si par conséquent on peut attacher aux opérations le même sens qu'en arithmétique.

La démonstration de chaque règle exige d'ailleurs aussi, dans cette méthode, que l'on examine successivement toute une série de cas particuliers, et ce mode d'exposition rend les premiers éléments fort compliqués sans aucune compensation. Nous citerons comme exemple l'algèbre de Lefébure de Fourcy.

117. On a essayé plusieurs manières de présenter à priori la théorie des quantités négatives ; mais toutes conduisent aux mêmes difficultés. Au fond elles reviennent à considérer cette théorie comme de pure convention. Or cela paraît d'autant moins rationnel que, même si on ne voulait pas l'accepter comme une partie intégrante de l'algèbre, on finirait presque sûrement, sans même s'en douter, par introduire des quantités négatives dans les calculs auxquels conduiraient les applications. C'est ce qui arriverait dans les questions où l'algèbre fournit des solutions négatives ; et, même dans les autres cas, il se pourrait que, dans quelques-unes des équations dont on aurait fait usage, les deux membres fussent négatifs sans que l'on s'en fût aperçu. On aurait alors étendu à des polynômes purement symboliques les règles de calcul qu'on n'aurait démontrées qu'en se fondant sur les propriétés générales des grandeurs.

On peut dire par conséquent qu'il vient un moment où l'extension des règles du calcul algébrique aux quantités négatives se présente pour ainsi dire forcément ; et qu'après s'être ainsi imposée, elle procure des ressources auxquelles on n'avait pas songé d'abord, soit pour reconnaître quelque vice d'un énoncé, ou quelque erreur commise en mettant un problème en équation, soit enfin pour réunir dans une même formule les solutions des divers cas particuliers que comportent certaines questions. *Il est donc naturel de généraliser cette extension de la manière la plus complète : telle est la véritable origine des règles du calcul des quantités négatives.*

Si l'on voulait regarder toute cette théorie comme une simple convention, on pourrait dire en faveur de cette manière de voir, qu'il est permis de regarder comme des conventions des procédés dont on pourrait,

à la rigueur, se passer. Cependant il faut observer que ce serait se priver d'une des ressources les plus précieuses de l'algèbre et que l'on dénaturerait ainsi le caractère de cette science. En résolvant une question quelconque au moyen d'équations algébriques, on serait astreint à vérifier que dans les transformations successives de celles-ci, il ne se présenterait pas de quantités négatives isolées. En fait cela reviendrait à supprimer les avantages que présente le mécanisme de l'algèbre, et à résoudre toutes les questions par les seuls moyens dont dispose l'arithmétique ; dans une foule de cas on se trouverait en présence de difficultés que l'algèbre parvient à vaincre et qui, sans elle, seraient insurmontables.

118. Ainsi que le fait remarquer Cournot (*), il y a une certaine analogie entre l'extension des règles du calcul algébrique aux quantités négatives isolées et l'extension du sens donné au mot multiplication en arithmétique, lorsqu'on passe à la théorie des fractions.

Dire qu'on ajoute la valeur négative — 3, au lieu de dire qu'on retranche 3 est une locution analogue à celle dont on se sert quand on dit qu'on multiplie par la fraction $1/3$, au lieu de dire qu'on divise par 3. Toutes deux sont amenées par le besoin d'exprimer les vraies relations des grandeurs. Pour fixer la situation de certaines grandeurs continues on part d'une origine ou d'un zéro arbitraire ; l'unité de mesure de ces grandeurs est arbitraire également. On peut déplacer l'origine, comme on peut changer l'unité. Or, un déplacement de l'origine suffirait pour changer certaines additions en soustractions, et un changement d'unité, pour changer certaines multiplications en divisions. Cependant il existe entre les grandeurs que l'on considère des relations générales qui ne dépendent pas du choix du zéro ou de l'unité. Il faut pouvoir les exprimer indépendamment de ces données arbitraires, sans quoi l'expression ne serait qu'imparfaitement adaptée à l'idée qu'elle doit rendre. On y parvient par l'addition et la soustraction des quantités négatives d'une part; et par la multiplication et la division des fractions d'autre part. Si l'on change le zéro ou l'unité, les valeurs particulières des grandeurs que l'on envisage changent également et peuvent devenir négatives ou fractionnaires. Mais la nature de la relation qui les lie n'étant pas modifiée, il convient de la désigner dans tous les cas sous le même nom.

(*) COURNOT. — *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie.*

119. *Des principales difficultés qui ont été présentées sous forme d'objections contre la théorie des quantités négatives.* — Carnot(*) a écrit un ouvrage considérable pour exposer les difficultés auxquelles donne lieu la considération des quantités négatives isolées, et pour établir le vrai sens qu'il faut, d'après lui, attacher à ces quantités. Voici comment s'exprime Carnot :

« Les notions que l'on a données jusqu'ici des quantités négatives isolées se réduisent à deux ; savoir que ce sont des quantités moindres que zéro, ou que ce sont des quantités de même nature que les quantités positives, mais prises dans un sens contraire. D'Alembert détruit l'une et l'autre de ces notions ; il repousse d'abord la première par un argument qui me paraît sans réplique.

« Soit, dit-il, cette proportion : $1 : -1 = -1 : 1$. Si -1 était moindre que zéro, à plus forte raison il serait moindre que 1, donc le second terme de cette proportion serait moindre que le premier ; donc le quatrième, (1), devrait être moindre que le troisième, (-1), ce qui est contradictoire.

« Quant à la seconde, des notions données ci-dessus, d'Alembert l'attaque avec le même succès ; et cependant, comme il n'a rien à mettre à la place, il semble adopter cette notion pour le fond, et vouloir montrer seulement qu'elle est sujette à diverses exceptions. *Il est*, dit-il, *d'autant plus nécessaire de démontrer cette position* (des quantités négatives en sens contraire des positives) *qu'elle n'a pas toujours lieu.* Mais d'Alembert ne donne pas le moyen de distinguer les cas où l'application de cette règle peut être exacte ; et d'après les raisons et les exemples qu'il donne, il est clair qu'elle est tout à fait vague, ou plutôt absolument fausse. Voici un de ces exemples.

« D'un point K, pris hors d'un cercle donné (fig. 5), soit proposé de mener une droite KMM′, telle que la portion MM′ interceptée dans le cercle soit égale à une droite donnée.

« Du point K, et par le centre du cercle, menons une droite KAB, qui rencontre la circonférence en A et B. Supposons

$$\mathrm{KA} = a,\ \mathrm{KB} = b,\ \mathrm{MM}' = c,\ \mathrm{KM} = x.$$

On aura par les propriétés du cercle

$$ab = x\,(c + x) = cx + x^2\,;$$

(*) CARNOT, *Géométrie de position.*

d'où

$$x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}.$$

Donc x a deux valeurs; la première, qui est positive, satisfait sans difficulté à la question; mais que signifie la seconde, qui est négative? Il paraît qu'elle ne peut répondre qu'au point M' qui est le second de ceux où KM coupe la circonférence; et, en effet, si l'on cherche directement KM' en prenant cette droite pour l'inconnue x, on aura

$$x(x - c) = ab, \quad \text{ou} \quad x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + ab},$$

dont la valeur positive est précisément la même que celle qui s'était présentée dans le premier cas avec le signe négatif.

« Donc, quoique les deux racines de l'équation

$$x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$$

soient l'une positive et l'autre négative, elles doivent être prises toutes les deux dans le même sens par rapport au point fixe K. Ainsi la règle qui veut que ces racines soient prises en sens opposés porte à faux. Si, au contraire, le point fixe K était pris sur le diamètre même AB, et non sur le prolongement, on trouverait pour x deux valeurs positives, et cependant elles devraient être prises en sens contraire l'une de l'autre. La règle est donc encore fausse pour ce cas.

« Si l'on dit que ce n'est pas ainsi qu'il faut entendre le principe que les racines positives et négatives doivent être prises en sens opposés, je demanderai comment il faut l'entendre? Et j'en conclurai que, par là même qu'il faut une explication pour empêcher qu'il ne soit pris dans l'acception la plus naturelle, il suit que ce principe est obscur et vague ».

Carnot, aux objections de d'Alembert, en ajoute quelques autres qu'il présente ainsi :

« Je dis d'abord que la première de ces notions est absurde; et, pour la détruire, il suffit de remarquer qu'étant en droit dans un calcul de négliger les quantités nulles par comparaison à celles qui ne le sont pas, à plus forte raison devrait-on être en droit de négliger celles qui se trouveraient moindres que zéro, c'est-à-dire les quantités négatives, ce qui est évidemment faux. Donc les quantités négatives ne sont pas moindres que zéro.

« Une multitude de paradoxes ou plutôt d'absurdités palpables résulteraient de la même notion ; par exemple, — 3 serait moindre que 2 ; cependant $(-3)^2$ serait plus grand que 2^2, c'est-à-dire qu'entre deux quantités inégales le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité.

« Passons à la seconde notion, qui consiste à dire que les quantités négatives ne diffèrent des quantités positives qu'en ce qu'elles sont prises dans un sens opposé. Cette idée est ingénieuse ; mais elle n'est pas plus juste que la précédente. En effet, si deux quantités, l'une positive, l'autre négative, étaient aussi réelles l'une que l'autre et ne différaient que par leurs positions, pourquoi la racine de l'une serait-elle une quantité imaginaire, tandis que celle de l'autre serait effective ? Pourquoi $\sqrt{-a}$ ne serait-elle pas aussi réelle que $\sqrt{+a}$? Conçoit-on une quantité effective dont on ne puisse extraire la racine carrée? Et d'où viendrait le privilège que la première, $-a$, aurait de donner son signe au produit $-a \times +a$? Cette expression de quantités prises en sens contraires l'une de l'autre est donc au moins déjà très vague et mène à une confusion d'idées inextricable. Mais je vais plus loin ; je démontre que la notion est complètement fausse, et que de son admission résulteraient les plus grandes absurdités.

« Soit une courbe quelconque, par exemple un cercle ARBS (fig. 6), dans le plan duquel sont placés deux axes AB, RS, perpendiculaires entre eux, et se coupant au centre K, pris pour origine des abscisses.

« D'un point quelconque C de cette courbe, soit menée l'appliquée Cp, et prolongeons-la jusqu'en D. Cela posé, d'après la notion précédente pD, par exemple, étant regardée comme positive, Cp sera négative et l'on devrait avoir $Cp = -pD$. D'où je tire $Cp + pD = CD = 0$; résultat absurde..... Par la même raison $CF = 0$ ... L'aire du rectangle $CDEF = 0$, ... »

120. Carnot, après avoir fait toutes ces objections, établit le sens qu'il faut, selon lui, attacher à la théorie des quantités négatives et que nous essaierons de faire connaître en résumé.

Supposons que l'on ait une relation algébrique entre un système quelconque de grandeurs, a, b, c, d, ... et que l'on modifie ce système par degrés insensibles de manière que a, b, c, d, ... deviennent respectivement

égaux à a', b', c', d', ... Il peut alors se présenter deux cas; il se peut que a', b', c', d',... soient liés par la même relation que a, b, c, d,...; ou bien il se peut que la première équation ne soit pas immédiatement applicable au second système, mais le devienne après qu'on aura changé les signes d'une ou plusieurs des quantités a, b, c, d, ... Ces quantités qui doivent prendre dans la seconde équation le signe —, alors qu'elles avaient dans la première le signe +, Carnot les appelle *inverses*, par rapport aux autres qu'il appelle *directes;* ces quantités inverses ne sont donc autre chose que ce que nous appelons valeurs numériques des quantités négatives. La dénomination de quantité négative, Carnot la repousse, mais il admet l'expression *valeur négative;* ainsi il ne veut pas que l'on appelle $-a'$ une quantité négative, parce que selon lui c'est a' qui représente la quantité, tandis que $-a'$ représente la valeur négative de cette quantité, si celle-ci est inverse de sa corrélative a dans le système choisi pour type primitif. *Pour lui les valeurs négatives sont donc celles des quantités, affectées du signe —, qu'il faut introduire dans des équations qui s'appliquent à un système autre que celui que l'on considère.*

Partant de là, Carnot conclut que, si l'on trouve une valeur négative comme solution d'une question, c'est que l'on est parti d'une équation qui n'est pas applicable immédiatement au système que l'on envisage; dans celui-ci, dit-il, l'inconnue est une grandeur inverse de sa corrélative dans le système pour lequel les formules seraient possibles.

Cette doctrine de Carnot n'est pas admissible dans tous les cas. En effet, comment faudrait-il l'entendre si, l'équation étant d'un degré supérieur au premier, on trouvait à la fois des solutions positives et des solutions négatives? Selon Carnot les racines positives indiqueraient que les quantités sur lesquelles le raisonnement a été établi satisfont réellement aux conditions énoncées et seraient des solutions de la question; tandis que les racines négatives, n'étant pas de véritables quantités, ne sauraient satisfaire aux conditions données sans que celles-ci fussent modifiées, ou sans qu'on modifiât les hypothèses sur lesquelles on aurait établi le raisonnement.

Cette explication manque de clarté et d'exactitude. On ne peut affirmer à priori que toute racine positive satisfait aux conditions énoncées; car on a vu qu'il y a lieu parfois de rejeter même des racines positives, et nous en donnerons encore des exemples. La discussion est donc toujours

indispensable. La méthode de Carnot se réduit, d'ailleurs, à discuter la question dans chaque cas spécial, comme on pourra s'en convaincre par la lecture de son ouvrage.

Il a fait voir, il est vrai, que l'interprétation des solutions négatives est facile quand il s'agit de trouver, sur une droite déterminée de position, la distance d'un point cherché à un point donné ; et il a prouvé qu'en général les racines négatives doivent alors être portées en sens opposé aux racines positives. Mais il ne s'agit ici que d'un cas très particulier, et Carnot n'a pas même étendu sa proposition, comme l'a fait Cournot, à toutes les grandeurs à origine arbitraire. D'ailleurs, cette interprétation, ainsi que nous l'avons montré, ne peut pas toujours être admise et Carnot n'a pas remarqué que toutes les difficultés dont il s'occupait s'expliquent par le fait que l'algèbre doit être considérée comme une science abstraite, indépendante des applications que l'on peut en faire. Cette science a ses procédés à elle que nous ne pouvons pas modifier ; et ce que l'on n'a jamais fait observer, c'est que quand nous l'appliquons à la résolution d'un problème, nous substituons à celui-ci un autre problème ayant pour objet de résoudre une équation algébrique et qu'il y a lieu par conséquent d'examiner si les conditions de ces deux problèmes sont réciproques ; car dans le cas où la réciprocité n'existe pas, il peut y avoir des solutions étrangères ou des solutions perdues, ce que doit nous apprendre la discussion.

Carnot paraît avoir été frappé surtout de l'absurdité apparente du langage algébrique, et c'est sans doute ce qui l'a conduit à adopter des dénominations nouvelles. Mais celles-ci n'ont pas été admises, et ne doivent pas l'être parce que le langage de l'algèbre ne serait absurde que si l'on voulait y attacher le même sens qu'en arithmétique. Or il faut le considérer comme purement symbolique et il suffit de l'interpréter d'une manière convenable pour renverser les arguments que l'on en tire contre la théorie des quantités négatives.

121. *Réponses aux objections résumées dans le n° 119.* — Pour répondre à ces objections il suffit de remarquer qu'elles proviennent en partie de ce que l'on fausse le sens de quelques propositions qui ne sont établies en algèbre pure que pour donner aux termes du langage et aux règles du calcul toute la généralité possible ; et aussi en partie de ce que dans les applications on veut trop généraliser certaines interprétations des solutions négatives fournies par l'algèbre.

122. *Première notion.* — Considérons d'abord la notion qu'une quantité négative est plus petite que zéro et demandons-nous ce qu'elle signifie. Évidemment on ne peut entendre par là qu'une quantité est effectivement moindre que rien ; la raison nous dit suffisamment qu'il ne peut exister de grandeur moindre que le néant.

Pour nous rendre compte du sens de la formule algébrique $-a < 0$, remarquons que $-a$ n'est pas seulement le signe représentatif d'une grandeur; mais bien un symbole dans lequel a est une grandeur, et — le signe de la soustraction. Ce qui serait absurde, ce serait de dire que a est moindre que le néant; mais la formule $-a < 0$ n'exprime rien de semblable ; elle est admise pour la généralité du langage algébrique. Car si deux quantités inégales sont ajoutées à une troisième, la moindre somme est celle qui répond à la plus petite quantité ajoutée. Or, si l'on ajoute $-a$ à une quantité positive, celle-ci est diminuée, c'est-à-dire que la somme est moindre que si l'on ajoutait zéro. Une quantité négative peut, pour ce motif, être regardée comme plus petite que zéro.

La formule $-a < 0$ n'est donc pas plus absurde que $b + (-a) = b - a$; l'une et l'autre doivent être admises au même titre, comme servant à généraliser les règles de l'algèbre.

Cette remarque suffit pour renverser toutes les objections soulevées par Carnot contre cette notion que les quantités négatives sont plus petites que zéro. Ainsi :

1° Les quantités négatives ne peuvent pas être négligées parce que ce serait altérer les règles du calcul algébrique. Ces quantités ne sont pas nulles, et nous avons vu ce qu'il faut entendre quand on dit qu'elles sont moindres que zéro.

2° De ce que -3 est plus petit que 2 on ne peut pas conclure, à priori, que le carré de -3 doit aussi être plus petit que le carré de 2. Car on n'est parvenu à la règle de la multiplication des quantités négatives que par extension. Or on sait que chaque fois que l'on donne de l'extension au sens d'un mot ou à une règle, il faut examiner si les propositions antérieurement vérifiées restent vraies. C'est ainsi qu'il est impossible de donner aux règles du calcul des inégalités des extensions qui seraient en opposition avec ce qui a été établi antérieurement. Si l'on élève au carré les deux membres de l'inégalité $2 < 3$, on a une nouvelle inégalité, qui subsiste dans le même sens. Mais *on ne peut étendre cette proposition*

à l'inégalité $-3 < 2$, puisque, vérification faite, on trouve qu'il faut renverser le sens de cette dernière quand on en élève les deux membres au carré.

3° La réponse est la même en ce qui concerne l'objection tirée de la proportion $1 : -1 = -1 : 1$. Car d'après la règle de la division algébrique les deux rapports qui s'y trouvent sont égaux; mais de ce que le second terme est ici plus petit que le premier, il n'est pas permis de conclure que le quatrième doit être moindre que le troisième. Cette conclusion serait légitime dans le cas où la proportion ne contiendrait que des quantités positives, mais on ne peut l'appliquer, *par extension*, au cas où certains termes sont négatifs.

123. *Deuxième notion.* — Examinons la seconde série d'objections, celles que l'on a opposées à la notion que les quantités négatives sont de même nature que les quantités positives, mais doivent être prises en sens contraire.

1° Exemple de d'Alembert : Comme on l'a vu plus haut, il est des cas nombreux où les quantités négatives doivent être prises en sens opposé aux quantités positives; mais ce que nous avons dit à ce sujet prouve qu'il n'est pas permis de généraliser complètement cette notion pour en faire la base d'une théorie des quantités négatives.

En général, quand l'inconnue est une grandeur mesurée à partir d'une origine arbitraire, et qui ne peut être portée à partir de cette origine que dans deux sens bien déterminés et opposés, une solution négative indique que la valeur trouvée, abstraction faite de son signe, doit être portée dans le sens opposé à celui où l'eût été une valeur positive. Mais on ne peut étendre cette interprétation à d'autres cas ; et il est à remarquer que l'exemple choisi par d'Alembert ne remplit pas les conditions requises pour qu'on puisse lui appliquer ce mode d'interprétation.

En effet, la longueur KM (fig. 5), fixe la distance du point M au point K; mais le signe ne saurait indiquer sa situation; car il faudrait pour cela connaître d'avance la position de la droite KM; de façon que, la longueur KM étant donnée, il ne pût y avoir doute qu'entre deux positions de M équidistantes de K, et opposées l'une à l'autre. Or c'est ce qui n'a pas lieu dans le cas actuel; et nous ferons voir plus loin que, si l'on commence par déterminer la direction de la sécante, la règle relative aux grandeurs à origine arbitraire cesse d'être en défaut. Mais, d'abord, examinons de plus près la solution de d'Alembert.

Dans cette solution, au problème primitif on en substitue un autre qui est le suivant : *Trouver le plus petit segment d'une sécante* KM, *menée par le point* K *de telle façon que la corde* MM′ *soit égale à une longueur donnée.* Il est clair que si ce second problème était résolu, on connaîtrait immédiatement la solution du premier.

A ce second problème on en a ensuite substitué un troisième, qui est du domaine de l'algèbre pure, à savoir : *Trouver les racines de l'équation* $x(x+c)=ab$. Or les conditions de ce dernier ne sont pas réciproques de celles du précédent. En désignant par x la longueur du segment cherché, celle-ci doit vérifier l'équation, et on peut par conséquent affirmer qu'il n'y aura pas de solution perdue. Mais cela ne suffit pas pour qu'il soit permis d'affirmer que toute solution de l'équation satisfait aussi aux conditions du problème ; en d'autres termes il peut y avoir des solutions étrangères, et c'est, en effet, comme telle qu'il faut regarder la valeur négative de l'inconnue.

Nous ferons voir maintenant qu'on peut, en traitant la question d'une manière convenable, faire cadrer parfaitement les racines de l'équation du problème avec la règle relative aux grandeurs à origine arbitraire.

Soit ω l'angle que la droite KM fait avec KO (fig. 5); si cet angle était connu, on ne pourrait porter une longueur sur la droite KM à partir de K, qu'en deux sens opposés et déterminés; d'après cette remarque, nous prendrons comme inconnues les coordonnées polaires des points M et M′, en plaçant le pôle en O et en comptant les angles de position à partir de la droite fixe KO. Le rayon vecteur du point M est $\rho=\text{KM}$ et son angle de position $\omega=\text{OKM}$; ce sont des grandeurs à origine arbitraire, et le signe dont elles seront affectées indiquera dans quel sens il faut les porter.

Désignons par r le rayon OA, et par a la distance KO ; on aura l'équation

$$r^2=\rho^2+a^2-2a\rho\cos\omega,$$

d'où

$$\rho=a\cos\omega\pm\sqrt{r^2-a^2\sin^2\omega}.$$

Ces deux valeurs de ρ représentent, en grandeur et en signe, les deux rayons vecteurs qui correspondent à un angle de position quelconque ω. En retranchant le plus petit du plus grand, la différence donnera la corde MM′, que nous désignerons par c. On aura donc

$$2\sqrt{r^2-a^2\sin^2\omega}=c;$$

et par conséquent

$$\sin \omega = \pm \frac{1}{a} \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

On trouve ainsi que la corde peut occuper les deux positions symétriques KM et KN, l'angle de position ω pouvant être positif ou négatif.

On a ensuite

$$\rho = a \cos \omega \pm \frac{c}{2} = \mathrm{KP} \pm \frac{c}{2}.$$

Or, le point K étant par hypothèse extérieur au cercle, on a $\frac{c}{2} < \mathrm{KP}$; les deux valeurs de ρ sont donc alors positives; on voit que la question ayant été ramenée à trouver une grandeur ρ qui ne pouvait plus être portée qu'en deux sens opposés sur une droite KP de position déterminée, la règle qui veut que les racines positives soient prises dans le même sens est devenue applicable.

En résolvant la question d'une manière analogue dans le cas où l'on a $r > a$, on trouverait pour ρ deux valeurs de signes contraires, ce qui s'accorde encore avec la règle établie pour les grandeurs à origine arbitraire.

2° Pour réfuter cette notion que les quantités négatives doivent être prises en sens opposé aux quantités positives, Carnot se demande encore pourquoi, si les quantités négatives étaient de même nature que les quantités positives, il serait impossible d'extraire les racines carrées de ces quantités. Dans cette objection il y a confusion évidente entre la quantité négative et sa valeur numérique ; $-a$ n'est pas le signe représentatif d'une grandeur, mais de l'idée complexe d'une grandeur et d'une soustraction ; il n'est donc pas étonnant que l'on ne puisse en extraire la racine carrée à la manière des quantités positives. Puisqu'en multipliant d'après les règles de l'algèbre une quantité quelconque, positive ou négative, par elle-même, le résultat est toujours positif, il est évident que, tant qu'on n'introduit pas la notion des quantités imaginaires, on ne saurait extraire la racine carrée d'une quantité négative, c'est-à-dire trouver une quantité qui, multipliée par elle-même, donne un résultat négatif. Et quand on dit qu'une quantité négative doit être portée en sens inverse des quantités positives, la grandeur portée à partir de l'origine est positive, mais sa valeur numérique, précédée du signe $-$ est la quantité négative qui fixe sa position.

3° La même remarque s'applique à l'exemple où Carnot considère une courbe rapportée à deux axes rectangulaires (fig. 6). On ne peut certainement pas affirmer que Cp soit une quantité négative; Cp est une grandeur aussi positive que pD; mais la quantité que l'on appelle négative est celle qui doit, dans les calculs algébriques, servir à fixer la situation du point C sur la droite indéfinie Cp. Cette quantité est la grandeur Cp affectée du signe —; si on lui donne le nom d'abscisse et que l'on désigne par x l'abscisse de C, l'on a $x = -Cp$; tandis que l'abscisse de D est $x' = p\mathrm{D}$; d'où

$$x + x' = -\mathrm{C}p + p\mathrm{D} = 0\,;$$

et il n'y a là aucune absurdité.

4° Enfin quant au privilège des quantités négatives de donner leur signe au produit de leur multiplication par une quantité positive, ce n'est pas aux grandeurs représentées par les valeurs numériques qu'il appartient, mais au signe — que contiennent ces symboles.

En résumé donc, la théorie des quantités négatives ne peut donner lieu à aucune difficulté quand on se place au point de vue de l'algèbre pure; et, dans les applications, il faut toujours discuter les solutions négatives pour savoir si elles répondent à la question qu'on se propose de résoudre, et comment elles y répondent.

§ 5. Équations du second degré. — Règles du calcul des imaginaires.

124. La résolution des équations du second degré ne présente aucune difficulté, mais elle introduit en algèbre un symbole nouveau, à savoir, le symbole $\sqrt{-1}$. Elle conduit donc aux règles du calcul des imaginaires, dont nous allons nous occuper.

Équations du second degré à deux termes. — Les équations les plus simples du second degré sont les équations à deux termes, c'est-à-dire celles qui ne renferment que le carré de l'inconnue et des termes connus. Par des transpositions de termes, et des réductions de termes semblables, elles se ramènent à la forme

$$ax^2 = b\,,\quad \text{ou}\quad x^2 = \frac{b}{a}\,,$$

a et b étant des expressions algébriques quelconques; et on a vu que ces transformations n'altèrent pas les solutions; de sorte que toute

valeur de x qui satisfait à l'équation proposée, satisfera à l'équation transformée et réciproquement.

Observons maintenant que cette dernière est vérifiée pour les deux valeurs $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, et qu'elle ne peut être vérifiée pour aucune autre. *Ces valeurs sont donc aussi les seules racines de l'équation proposée.*

125. *Expressions imaginaires.* — Si l'on a résolu de cette manière une équation dans laquelle a et b sont des polynômes algébriques, et si l'on donne ensuite des valeurs numériques aux lettres qui y entrent, la fraction $\frac{b}{a}$ peut devenir négative ; les expressions $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$. peuvent alors être représentées par $\pm\sqrt{-m}$, m ayant une valeur numérique.

Le symbole $\sqrt{-m}$ indique qu'il faut extraire la racine carrée d'une quantité négative. Or cela est impossible, puisqu'en élevant au carré une quantité quelconque, positive ou négative, on ne peut, d'après les règles du calcul algébrique jusqu'ici établies, trouver un résultat négatif. Le symbole $\pm\sqrt{-m}$ est donc le signe représentatif d'une opération inexécutable. Il nous apprend que l'équation proposée n'aurait pas de racine si l'on s'en tenait aux notions acquises jusqu'ici sur les quantités algébriques.

Pour se rendre compte de la manière dont s'est introduit ce symbole nouveau on remarquera que, les signes de l'algèbre servant simplement à indiquer les opérations sans les effectuer, il est possible qu'on ne s'aperçoive de l'impossibilité de les réaliser que quand on veut faire les calculs numériques. C'est ainsi qu'on trouve le symbole $\sqrt{-m}$ en indiquant, par le signe usuel, l'extraction de la racine carrée d'une quantité négative.

L'introduction de ce symbole est donc en quelque sorte inévitable en algèbre, parce que l'on y effectue les opérations sans se préoccuper des valeurs numériques. De plus on a observé un fait qui donne une grande importance à ce symbole nouveau. On va voir qu'il peut être soumis au calcul algébrique, et qu'en conséquence on doit le regarder comme une racine de l'équation d'où on l'a déduit.

126. *Règles du calcul des imaginaires.* — Supposons que, n'ayant pas fait les calculs numériques, on ne remarque pas que $\frac{b}{a}$ est

négatif, et qu'on veuille vérifier si $\sqrt{\frac{b}{a}}$ satisfait à l'équation. Pour substituer cette expression à x, on l'élèverait au carré et l'on ferait

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = \frac{b}{a}.$$

Donc, sans en avoir conscience, on étendrait à ce symbole la règle que l'on suit dans le cas où la quantité placée sous le radical est positive. Cette extension étant admise, la substitution de $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ à l'inconnue x, rend identiques les deux membres de l'équation $ax^2 = b$. Or, toute expression qui vérifie cette dernière, satisfait aussi à l'équation proposée. On en conclurait donc que celle-ci admet les racines $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, et n'en admet pas d'autres.

Le symbole $\sqrt{-m}$ étant ainsi introduit en algèbre, on lui a donné par extension le nom de quantité. On l'a appelée *quantité imaginaire* par opposition aux quantités que nous avons considérées jusqu'à présent, et qui ont reçu le nom de *quantités réelles*.

Il est clair que les quantités imaginaires n'ont plus la même signification que les quantités réelles; elles ne sont pas susceptibles d'augmentation et de diminution et l'on ne peut pas dire d'une quantité imaginaire qu'elle est plus grande ou plus petite qu'une autre. C'est une simple forme algébrique qu'on peut soumettre au calcul.

Comme on a en général $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, on admet par extension, que $\sqrt{-k^2} = k\sqrt{-1}$; de sorte que $\sqrt{-1}$ est le seul symbole imaginaire à considérer. Il peut entrer comme facteur une ou plusieurs fois dans un monôme, et ses puissances successives sont faciles à obtenir; car d'après la règle déjà établie, on a $(\sqrt{-1})^2 = -1$; d'où l'on conclura successivement

$$(\sqrt{-1})^3 = -1 \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1};$$
$$(\sqrt{-1})^4 = -\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -(\sqrt{-1})^2 = +1,$$

et ainsi de suite.

On appliquera maintenant sans peine au symbole nouveau toutes les règles du calcul algébrique. Car on peut, dans un polynôme quelconque, simplifier les termes qui contiennent $\sqrt{-1}$ à la seconde puissance ou

à des puissances supérieures ; les puissances paires de $\sqrt{-1}$ se réduisent, en effet, à $+1$ ou à -1 et les puissances impaires à $+\sqrt{-1}$ ou à $-\sqrt{-1}$; on n'a donc à considérer que deux espèces de termes, ceux qui contiennent le facteur $\sqrt{-1}$ à la première puissance et ceux qui sont indépendants de ce symbole ; et deux termes quelconques ne sauraient être semblables ni se détruire, à moins que tous deux ne renferment $\sqrt{-1}$ comme facteur, ou qu'ils n'en soient indépendants tous les deux. Toute expression, réelle ou imaginaire, peut donc être ramenée à la forme $a+b\sqrt{-1}$, et par conséquent le calcul des imaginaires n'offre aucune difficulté.

On ne saurait attacher à ces opérations le même sens qu'en arithmétique ; les règles suivant lesquelles on les effectue sont simplement une extension de celles que l'on démontre dans le cas où il s'agit de valeurs réelles ; et il ne serait guère possible de les démontrer autrement.

127. L'introduction des imaginaires donnant une extension nouvelle aux opérations algébriques, il est nécessaire d'examiner si les théorèmes généraux précédemment établis leur restent applicables. Nous nous bornerons aux deux exemples suivants :

Le produit de plusieurs facteurs dont quelques-uns sont imaginaires, ne change pas quand on intervertit l'ordre de ces facteurs.

En effet, la *composition* d'un produit est indépendante de l'ordre des facteurs, même quand quelques-uns sont imaginaires.

Le produit de plusieurs facteurs dont quelques-uns sont imaginaires ne peut être nul que si l'un de ces facteurs est nul.

Remarquons d'abord que l'expression $a+b\sqrt{-1}$, ne peut devenir égale à zéro que si on a séparément $a=0$ et $b=0$; car il ne peut y avoir aucune réduction entre des termes réels et des termes imaginaires.

Considérons maintenant un produit de deux facteurs

$$(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1}) = aa'-bb'+(ab'+ba')\sqrt{-1}.$$

Ce produit ne peut être nul que si

$$aa'-bb'=0 \quad \text{et} \quad ab'+ba'=0.$$

On tire de ces égalités

$$\frac{a'}{b'}=\frac{b}{a}, \quad \text{et} \quad \frac{a'}{b'}=-\frac{a}{b}.$$

Si l'on a $a'=0$ et $b'=0$, l'un des deux facteurs que l'on considère

est égal à zéro. Si au contraire a' et b' ne sont pas nuls à la fois, les égalités ci-dessus donnent nécessairement

$$\frac{b}{a} = -\frac{a}{b}; \quad \text{d'où} \quad b^2 + a^2 = 0, \quad \text{et enfin} \quad a = b = 0;$$

c'est-à-dire que le second facteur est nul si le premier ne l'est pas.

Le théorème étant démontré pour un produit de deux facteurs, on l'étend sans peine au cas d'un nombre quelconque de facteurs.

128. *Équations complètes du second degré.* — On sait qu'on donne ce nom à toute équation qui contient le carré et la première puissance de l'inconnue x, ainsi que des termes indépendants de x. Cette équation peut toujours se ramener à la forme $x^2 + px + q = 0$, par des transformations qui n'altèrent pas les solutions; de sorte que cette dernière a les mêmes racines que la proposée. Or, on a identiquement

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2$$

$$= \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right);$$

et puisqu'il faut, pour qu'un produit soit nul, que l'un de ses facteurs soit nul, l'équation a deux racines, à savoir :

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

et ne peut en avoir d'autres.

§ 6. Problèmes d'un degré supérieur au premier. — Multiplicité et altération des solutions. — Solutions imaginaires.

129. Quand la solution d'un problème dépend d'une équation d'un degré supérieur au premier, les racines négatives peuvent généralement recevoir des interprétations analogues à celles dont sont susceptibles les solutions négatives des problèmes du premier degré. Toutefois la question est ici plus complexe, à cause de l'altération possible des solutions par le fait de la résolution des équations.

Lorsque nous voulons résoudre un problème par l'algèbre, celle-ci ne peut pas toujours en traduire toutes les conditions, et répondre directement et uniquement à la question proposée. La marche qu'elle impose est

la suivante : on déduit d'abord de l'énoncé une certaine équation ; puis au problème proposé on en substitue un autre qui est du domaine de l'algèbre pure, savoir : Trouver une valeur qui rende identiques les deux membres de l'équation.

L'algèbre résout cette dernière question par un mécanisme indépendant de la nature du problème mis en équation. Rien ne permet d'affirmer à priori que les conditions des deux problèmes que l'on substitue ainsi l'un à l'autre sont réciproques. Il faut donc discuter les solutions pour s'assurer s'il n'y en a pas d'étrangères, et s'il n'y a pas de solutions perdues.

Des problèmes assez divers peuvent, d'ailleurs, conduire à une même équation, et il se peut que certaines racines de celle-ci conviennent à un problème, et d'autres racines à un problème différent. L'algèbre peut donc associer dans une même équation, les solutions de questions diverses. La manière dont elle les groupe ne dépend pas, d'ailleurs, de la nature physique de ces questions. C'est ce que Cournot a très bien mis en lumière, dans l'ouvrage cité, au moyen de l'exemple qu'on trouvera ci-dessous.

130. Problème. — *Proposons-nous de calculer la profondeur à laquelle un corps est tombé, d'après le temps écoulé entre l'instant où il est abandonné à lui-même sans vitesse initiale, et celui où l'oreille a perçu, au point de départ, le bruit causé par le choc du corps au terme de sa chute, en supposant d'ailleurs qu'on fasse abstraction de la résistance de l'air.*

Si l'on désigne par t ce temps exprimé en secondes, par g le double de l'espace que décrit un corps en tombant librement dans le vide pendant la première seconde de sa chute, par h la vitesse uniforme du son, ou l'espace qu'il décrit en chaque seconde, par x la profondeur inconnue, on a pour l'équation du problème

$$(1) \qquad \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{h} = t\,;$$

d'où l'on tire, en faisant disparaître le radical,

$$(2) \qquad x^2 - 2\left(\frac{h^2}{g} + ht\right)x + h^2t^2 = 0\,;$$

et en résolvant

$$x = \frac{h}{g}(h + gt) \pm \frac{h}{g}\sqrt{h(h + 2gt)}.$$

Les deux racines sont positives, à cause que h, g et t désignent, d'après l'énoncé, des nombres positifs; mais il n'y a que la plus petite qui satisfasse à la question, puisque d'après l'énoncé on doit avoir $\frac{x}{h} < t$ ou $x < ht$; or, il est aisé de voir que l'une des racines est plus grande et l'autre plus petite que ht.

Au fond il n'y a non plus que cette racine qui satisfasse à la véritable équation du problème, savoir à l'équation (1); l'autre satisfait à une équation de forme distincte, quoique analogue,

$$(3) \qquad -\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{h} = t\,;$$

et si les deux racines satisfont à l'équation (2), c'est que l'équation (3), aussi bien que l'équation (1), conduit à l'équation (2) lorsqu'on élève ses deux membres au carré pour faire disparaître le radical et amener la résolution algébrique : ce qui est nécessité par la nature de l'algèbre, et non par celle de la question.

L'équation (3) répond à un second problème, analogue au premier, et qu'on peut énoncer en ces termes :

Déterminer, en faisant abstraction de la résistance de l'air, la hauteur d'où est tombé un corps pesant dépourvu de vitesse initiale, d'après le temps qui s'est écoulé entre l'instant où le corps est arrivé au point le plus bas de sa course, et l'instant où l'oreille a perçu en ce point le bruit d'une explosion ou d'un signal quelconque, qui se faisait au lieu et au moment où le corps a commencé de tomber, lorsque d'ailleurs on suppose que l'arrivée du corps précède l'audition du signal. La plus grande racine de l'équation (2) résout ce problème qui se trouve ainsi algébriquement associé ou conjugué avec le précédent.

Si l'on voulait résoudre une troisième question, ne différant de la seconde qu'en ce que l'audition du signal précéderait l'arrivée du corps, toutes les autres données restant les mêmes, l'équation du problème deviendrait

$$(4) \qquad \sqrt{\frac{2x}{g}} - \frac{x}{h} = t\,;$$

et par la disparition du radical,

$$x^2 - 2\left(\frac{h^2}{g} - ht\right)x + h^2t^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{h}{g}(h - gt) \pm \frac{h}{g}\sqrt{h(h - 2gt)}.$$

Ces deux racines sont imaginaires si l'on a $h < 2gt$; dans le cas contraire elles sont toutes deux réelles et positives ; or il est aisé de voir qu'en effet, dans ce cas, le problème n'a pas de solution ou qu'il en comporte deux. Car il est évident que le son, ayant à l'origine une vitesse plus grande que le corps, doit le précéder. Mais son mouvement étant uniforme et celui du corps accéléré, il y aura un point où le corps arrivera en même temps que le son, et où il dépassera ce dernier pour prendre une avance sans cesse croissante. Il y a donc un point sur la verticale, autre que le point de départ, où le corps arrive en même temps que le son. Entre ces deux points le son précède le corps. Il y en a un où le temps qui s'écoule entre l'audition du signal et l'arrivée du corps est un maximum. Si le temps donné dépasse ce maximum, le problème dont il s'agit ici est impossible. Dans le cas contraire il y a deux solutions, puisque de part et d'autre du point qui répond au maximum, le temps observé passe par les mêmes valeurs jusqu'à zéro.

Pour tous les points de la verticale placés au-dessous de la partie qui vient de nous occuper, l'arrivée du corps précède l'audition du son d'un temps d'autant plus long que le point considéré est plus bas. Le second problème a donc toujours une seule solution, qui est donnée par l'équation (3).

On peut remarquer que le second problème, algébriquement associé au premier, ne l'est pas au troisième, avec lequel il a pourtant une analogie bien plus étroite. Évidemment l'algèbre associe les uns et disjoint les autres, sans que la séparation ni la réunion tiennent à la nature de la question. Il résulte de cette remarque que, dans le cas où l'on ne saurait pas d'avance si l'audition du son précède ou suit l'arrivée du corps, l'algèbre ne saurait nous avertir, par une solution négative, d'une fausse hypothèse faite à cet égard.

131. Pour montrer encore mieux que la nature physique de la question n'est pour rien dans la manière dont l'algèbre associe divers problèmes dans une même équation, supposons maintenant que le corps soit soumis dans sa chute à des forces ou à des résistances telles que le

radical $\sqrt{\frac{2x}{g}}$ doive être remplacé dans les formules précédentes par $\sqrt[3]{\frac{3x}{g}}$. C'est une hypothèse permise, au même titre que celle de la suppression de la résistance de l'air.

Si alors nous revenons au premier énoncé, nous aurons

$$\sqrt[3]{\frac{3x}{g}}+\frac{x}{h}=t, \tag{5}$$

ce qui nous conduira à l'équation

$$\frac{x^3}{h^3}-3t\frac{x^2}{h^2}+3\left(t^2+\frac{h}{g}\right)\frac{x}{h}-t^3=0. \tag{6}$$

On peut la mettre sous la forme

$$\left(\frac{x}{h}-t\right)^3+3\frac{h}{g}\left(\frac{x}{h}-t\right)+3\frac{h}{g}t=0; \tag{7}$$

et on reconnaîtra sans difficulté qu'elle n'a qu'une seule racine réelle essentiellement positive (*). Ainsi déjà, dans cette nouvelle hypothèse, le premier problème que nous venons de résoudre se trouvera algébriquement disjoint du second, avec lequel il était précédemment associé.

L'énoncé du second problème mènera, dans l'hypothèse actuelle, à l'équation

$$-\sqrt[3]{\frac{3x}{g}}+\frac{x}{h}=t, \tag{8}$$

laquelle devient, après la disparition du radical,

$$\frac{x^3}{h^3}-3t\frac{x^2}{h^2}+3\left(t^2-\frac{h}{g}\right)\frac{x}{h}-t^3=0, \tag{9}$$

ou

$$\left(\frac{x}{h}-t\right)^3-3\frac{h}{g}\left(\frac{x}{h}-t\right)-3\frac{h}{g}t=0. \tag{10}$$

(*) Si l'on fait

$$\frac{x}{h}-t=x',$$

l'équation (7) devient

$$x'^3+3\frac{h}{g}x'+3\frac{h}{g}t=0;$$

et la règle des signes de Descartes montre que cette dernière n'a pas de racine positive et n'a qu'une racine négative. Il y a donc dans l'équation (6) une seule racine réelle qui doit être de signe contraire au dernier terme, $-t^3$, et par conséquent positive.

L'équation (9) a toujours une racine positive. De plus en l'écrivant sous la forme (10) on voit qu'elle a deux racines imaginaires, et par suite elle n'admet qu'une racine réelle, quand on a $t^2 > \frac{4h}{9g}\cdot$ Pour rendre réelles les trois racines, il faut supposer l'inégalité inverse $t^2 < \frac{4h}{9g}$, d'où à fortiori $t^2 < \frac{h}{g}$; de façon que l'équation (9), n'ayant qu'une variation de signes, n'admettra toujours qu'une racine positive et deux racines négatives.

L'énoncé du troisième problème fournirait l'équation

$$(11) \qquad \sqrt[3]{\frac{3x}{g}} - \frac{x}{h} = t,$$

qui ne diffère de (8) que par le changement de x en $-x$. Ainsi, suivant qu'on aura $t^2 >$ ou $< \frac{4h}{9g}$, l'équation (11) n'admettra qu'une racine réelle négative, numériquement égale à la racine positive de l'équation (8), et le troisième problème n'admettra pas de solution; ou bien il en admettra deux, l'équation (11) acquérant deux racines réelles positives et une racine réelle négative, respectivement égales, quant aux valeurs numériques, aux racines négatives et à la racine positive que l'équation (8) acquiert alors.

Il résulte de cette discussion que dans la nouvelle hypothèse sur la forme particulière de la loi d'accélération du mouvement, il n'y a rien de changé quant au nombre de solutions que chacun des trois problèmes comporte, parce qu'en effet cela ne dépend ni du degré des radicaux auxquels conduit l'expression algébrique de la loi, ni même de la circonstance que la loi d'accélération est susceptible de s'exprimer algébriquement; circonstance qui peut ne pas se présenter, et qui notamment ne se présenterait plus si l'on tenait un compte exact des effets de la résistance de l'air. Mais on voit en même temps que, suivant le degré du radical auquel conduit l'expression algébrique de la loi d'accélération, des problèmes foncièrement identiques se trouvent associés algébriquement de diverses manières. Dans notre nouvelle hypothèse ce sont le second et le troisième problème qui, jusqu'à un certain point, se trouvent algébriquement associés, et qui, en effet, ont plus d'affinité entre eux qu'ils n'en ont avec le premier, maintenant algébriquement disjoint de l'un et de l'autre; tandis que, dans la première hypothèse, qui est celle que la

nature réalise pour les corps pesants tombant dans le vide, le premier problème est, au contraire, algébriquement groupé avec le second, et celui-ci se trouve algébriquement disjoint de son analogue, ou du troisième.

Cet exemple suffit pour faire comprendre ce qu'il y a d'accidentel dans le groupement algébrique des solutions appartenant à divers problèmes.

132. Aux remarques intéressantes présentées par Cournot sur la question qui précède, on peut ajouter la suivante.

Dans la première hypothèse sur la loi d'accélération du mouvement, le premier et le second problème conduisent respectivement aux équations (1) et (3); chacune de celles-ci n'a qu'une racine; mais pour les résoudre on doit faire disparaître le radical qu'elles contiennent, en l'élevant au carré; c'est ainsi qu'elles conduisent à l'équation (2). Cette dernière est une conséquence de chacune des deux autres, mais sans réciprocité; elle a deux racines positives, dont la plus grande doit être rejetée quand il s'agit du premier problème, et la plus petite quand il s'agit du second. Dans les deux cas une solution étrangère positive est introduite par l'élévation au carré.

Il n'en est pas de même dans la seconde hypothèse relative à la loi d'accélération. Quand les trois racines de l'équation (9) sont réelles, elles satisfont toutes à l'équation (8). Les deux racines négatives étrangères à la question, ne se sont donc pas introduites ici par l'élévation au cube.

Et en effet, l'équation du troisième degré revient à

$$\left(\frac{x}{h} - t\right)^3 = \frac{3x}{g}$$

et ses racines doivent satisfaire à l'une des équations

$$\frac{x}{h} - t = \sqrt[3]{\frac{3x}{g}}, \quad \frac{x}{h} - t = \alpha\sqrt[3]{\frac{3x}{g}}, \quad \frac{x}{h} - t = \alpha^2\sqrt[3]{\frac{3x}{g}},$$

α étant une racine cubique imaginaire de l'unité. Or, aucune valeur réelle de x ne peut vérifier les deux dernières. Les trois racines réelles de l'équation (9) satisfont donc toutes les trois à l'équation (8). La même remarque s'applique à l'équation (11).

133. Nous venons de voir que dans certains cas la nécessité où l'on se trouve d'élever à une même puissance les deux membres d'une équation

a pour conséquence l'introduction de solutions étrangères. Celles-ci résultent aussi parfois de la multiplication par un facteur renfermant l'inconnue.

Prenons comme exemple le problème des lumières; désignons par a^2 et b^2 les intensités respectives, à l'unité de distance, de deux lumières placées l'une au point A, l'autre au point B, et proposons-nous de trouver sur la droite AB, le point qu'elles éclairent également.

Soit ce point en C entre A et B; représentons la distance AB par d, et AC par x; l'équation du problème sera

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{(d-x)^2};$$

d'où l'on tire, en posant $\frac{b}{a} = m$, les deux valeurs de x, $x = \frac{d}{1 \pm m}$, et il est aisé de voir qu'elles déterminent deux points placés l'un entre A et B, l'autre sur un des prolongements de AB, et répondant tous deux à la question.

Pour résoudre l'équation on a dû multiplier les deux membres par $x(d-x)$. Dans la discussion il faut avoir égard à cette circonstance afin d'éviter l'erreur dans laquelle est tombé un auteur très estimé. Examinant l'hypothèse où $d = 0$ et $m \gtrless 1$, il trouve $x = 0$; d'où il résulterait, selon cet auteur, que deux lumières d'intensités inégales, placées en un même point, éclaireraient celui-ci également, ce qui est évidemment absurde.

L'absurdité résulte de ce qu'on a altéré les solutions de ce cas en chassant les dénominateurs. En effet, si l'on reprend l'équation sous la forme

$$\frac{1}{x} = \pm \frac{m}{d-x},$$

et si l'on fait $d = 0$, il vient

$$\frac{1}{x} = \pm \frac{m}{x}.$$

Il est alors manifeste qu'elle ne peut être vérifiée pour $x = 0$; car la différence des deux membres, $\frac{1 \pm m}{x}$, peut croître au-delà de toute limite quand x décroît indéfiniment. Au contraire, en faisant croître indéfiniment x, soit positivement, soit négativement, la différence des

deux membres converge vers zéro ; ainsi la vraie solution, dans ce cas, est $x = \pm \infty$.

Une remarque du même genre s'applique à un raisonnement employé par certains auteurs pour faire voir que quand on fait $a = 0$ dans l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

on peut regarder $x = \infty$ comme une solution. Ils divisent par x^2 tous les termes, et l'équation prenant alors la forme

$$a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0,$$

ils en concluent qu'en supposant $a = 0$, elle est vérifiée pour $x = \infty$. Mais ce raisonnement est vicieux; en effet, on pourrait ainsi démontrer que toute équation est vérifiée pour $x = \infty$; car en divisant par x^{m+1} le premier membre de l'équation

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \cdots = 0,$$

on trouverait une équation où x entrerait en dénominateur dans tous les termes, et qui aurait par conséquent pour racine $x = \infty$.

Pour prouver qu'une racine de l'équation

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots = 0,$$

croît indéfiniment quand a tend vers zéro, remarquons que si $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont ces racines, on a l'identité

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)\ldots$$

Or, si aucune des valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ne tendait vers l'infini quand a tend vers zéro, le second membre tendrait lui-même vers zéro, et on aurait l'identité

$$bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots = 0;$$

ce qui est impossible à moins que l'on n'ait aussi $b = c = \ldots = 0$, auquel cas l'équation serait indéterminée.

134. *Solutions imaginaires.* — Au point de vue de l'algèbre pure, ces solutions doivent être admises comme les solutions réelles, puisqu'elles vérifient l'équation dont elles sont les racines. Mais dans les applications elles peuvent provenir de circonstances assez diverses. Elles indiquent le plus souvent une impossibilité, qui peut être une conséquence de l'énoncé même de la question, ou de fausses hypothèses que l'on a faites pour la mise en équation. Il est aussi des cas où le problème

peut être résolu par une ou plusieurs racines réelles, l'équation admettant en outre des racines imaginaires.

Quand on ne trouve que des racines imaginaires comme solutions d'un problème, il suffit d'un changement de signe de certains termes de l'équation qui les fournit pour qu'on obtienne des racines réelles. Il peut alors arriver, comme lorsqu'il s'agit d'interpréter des solutions négatives, que l'examen de l'équation transformée fasse découvrir une fausse hypothèse, ou montre que, le problème proposé étant impossible, il en existe un autre, ayant avec lui un rapport plus ou moins éloigné et qui se résout par l'équation transformée.

Exemple. — Trouver sur AB *un point tel que sa distance au point* A *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* B *et la longueur* AB.

Fig. 7.

Soit C le point cherché (fig. 7); faisons

$$AB = a, \quad AC = x, \quad BC = x - a;$$

on aura

$$(1) \qquad x^2 = a(x - a) \quad \text{ou} \quad x^2 = ax - a^2.$$

On tire de là

$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{-3}.$$

Il est aisé de voir qu'il suffit de changer le signe du terme $-a^2$ dans l'équation (1) pour qu'elle ait ses racines réelles ; or la transformée

$$(2) \qquad x^2 = a(a + x)$$

est la traduction de l'énoncé du problème, pourvu qu'on place le point cherché non pas en C, mais en C″ de l'autre côté de B. Les racines imaginaires résultaient donc ici de ce qu'on avait fait une fausse hypothèse pour la mise en équation. On peut encore remarquer que l'équation (2) a une racine positive et une racine négative. A cette dernière correspond une deuxième solution. Il existe, en effet, entre A et B un point C′ qui satisfait à la question et dont la distance au point A prise avec le signe —, est égale à la racine négative de l'équation (2).

§ 7. De l'emploi des imaginaires dans les démonstrations algébriques.

135. Les quantités imaginaires peuvent, nous l'avons vu, être soumises au calcul algébrique par de simples extensions de règles, et on tire souvent de là un grand avantage pour simplifier certaines démonstrations. En effet, il peut arriver qu'après avoir fait transitoirement usage d'imaginaires, on parvienne à les éliminer. Les équations finales expriment alors des relations entre grandeurs réelles et celles-ci se trouvent démontrées par un procédé qui appartient essentiellement à l'algèbre pure, puisque les opérations par lesquelles on les a obtenues ne sont que symboliques, et qu'elles seraient absurdes si l'on voulait y attacher le même sens qu'en arithmétique.

Beaucoup de démonstrations peuvent se faire ainsi par une voie plus courte que ne le serait toute autre ; mais on leur a quelquefois reproché de manquer de rigueur. Cependant il est aisé de voir qu'elles ne laissent rien à désirer, pourvu qu'elles reposent uniquement sur les lois de composition des formules algébriques, sans impliquer la considération d'attributs qui n'appartiennent qu'aux grandeurs réelles.

En voici un exemple : si l'on pose

(1) $$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1}) = \mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1},$$

on aura nécessairement

(2) $$(a-b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1}) = \mathrm{A}-\mathrm{B}\sqrt{-1}.$$

Multiplions ces deux relations membre à membre ; il viendra

(3) $$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2;$$

or, si a, b, c, d sont des nombres entiers, A et B le seront aussi, d'après les règles de la multiplication algébrique. On conclut de là le théorème suivant qui appartient à la théorie des nombres :

Quand on multiplie l'un par l'autre deux nombres dont chacun est une somme de deux carrés, le produit est aussi une somme de deux carrés.

On étendra aisément ce théorème au cas d'un nombre quelconque de facteurs dont chacun est une somme de deux carrés, en prouvant que s'il est vrai pour le produit de m facteurs, il le sera également pour celui de $m+1$ facteurs.

L'emploi des imaginaires dans la démonstration qui précède est

légitime, parce que les relations établies sont indépendantes des propriétés des grandeurs. D'abord les équations (1) et (2) signifient simplement que si on multiplie d'après les règles de l'algèbre

$$a + b\sqrt{-1} \text{ par } c + d\sqrt{-1}, \text{ et } a - b\sqrt{-1} \text{ par } c - d\sqrt{-1},$$

les produits auront la même composition, sauf le changement de signe des termes qui contiennent en facteur le symbole $\sqrt{-1}$. Quand on passe ensuite des équations (1) et (2) à l'équation (3), on ne s'appuie nullement sur le principe que deux quantités égales multipliées respectivement par deux autres quantités égales donnent des produits égaux, mais bien sur ce fait qu'un produit algébrique offre une composition indépendante de l'ordre dans lequel les facteurs sont multipliés entre eux ; de sorte que si on multiplie d'abord

$$a + b\sqrt{-1} \text{ par } c + d\sqrt{-1}, \text{ et } a - b\sqrt{-1} \text{ par } c - d\sqrt{-1},$$

et qu'on multiplie ensuite l'un par l'autre les deux produits, le résultat de l'opération est identique à celui que l'on obtient en multipliant d'abord

$$a + b\sqrt{-1} \text{ par } a - b\sqrt{-1}, \text{ et } c + d\sqrt{-1} \text{ par } c - d\sqrt{-1},$$

et en multipliant ensuite ces deux produits l'un par l'autre.

On voit donc que pour parvenir à l'équation (3) on s'est uniquement fondé sur les lois de composition des formules algébriques, et par conséquent qu'elle est rigoureusement établie, et doit être admise avec toutes ses conséquences. Or, l'une de celles-ci est précisément le théorème sur les nombres que nous avons voulu démontrer.

La démonstration dont il s'agit est donc rigoureuse. Mais il n'en serait plus de même si, tout en employant les symboles imaginaires, on faisait des raisonnements qui n'ont un sens qu'en tant qu'ils s'appliquent à des grandeurs réelles. L'emploi des imaginaires ne pourrait plus alors être considéré que comme une méthode d'induction propre à faire découvrir certaines propositions; et celles qu'on trouverait par cette voie devraient ensuite être démontrées d'une autre manière.

136. Un procédé qu'on emploie fréquemment pour établir des relations entre grandeurs réelles à l'aide des imaginaires, est le suivant :

Supposons que le calcul ait conduit à quelque relation de la forme

(1) $$a + b\sqrt{-1} = A + B\sqrt{-1},$$

a, b, A, B étant des quantités réelles. On en tire

$$a - A + (b - B)\sqrt{-1} = 0\,.$$

Or le premier membre de cette égalité ne peut devenir nul que si

$$a = A\,, \quad b = B\,. \tag{2}$$

En réalité l'équation (1) n'a d'autre sens que les équations (2) elles-mêmes, et ces relations entre grandeurs réelles sont ainsi démontrées par le calcul algébrique qui conduit à l'équation (1).

Pour en donner un exemple effectuons le produit

$$\begin{aligned}&(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)\\ &= \cos x\cos y - \sin x\sin y + \sqrt{-1}(\sin x\cos y + \sin y\cos x)\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)\\ &= \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y).\end{aligned}$$

On a donc, quel que soit le nombre des facteurs,

$$\begin{aligned}&(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos u + \sqrt{-1}\sin u)\ldots\\ &= \cos(x + y + u + \cdots) + \sqrt{-1}\sin(x + y + u + \cdots);\end{aligned}$$

et, en posant $x = y = u = \ldots$, on a

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx,$$

m étant un nombre entier quelconque.

On déduit de là les développements de $\sin mx$ et $\cos mx$ en fonction des puissances de $\sin x$ et $\cos x$; on trouve, en effet,

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2} x\sin^2 x + \cdots$$

$$\sin mx = m\cos^{m-1} x.\sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3} x\sin^3 x + \cdots$$

Pour trouver par la même méthode les développements de $\cos^m x$ et $\sin^m x$ en fonction des sinus et cosinus des arcs multiples de x, m étant un nombre entier, posons

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = u \quad \text{et} \quad \cos x - \sqrt{-1}\sin x = v\,;$$

d'où

$$2\cos x = u + v\,;$$

et, par suite,

$$2^m \cos^m x = u^m + v^m + muv\,(u^{m-2} + v^{m-2})$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} u^2v^2 (u^{m-4} + v^{m-4}) + \cdots.$$

Or, à cause des relations

$$uv = \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

et

$$u^k + v^k = \cos kx + \sqrt{-1} \sin kx + (\cos kx - \sqrt{-1} \sin kx)$$
$$= 2 \cos kx,$$

cette formule devient

$$2^m \cos^m x = 2 \cos mx + 2m \cos (m-2)x$$
$$+ 2\frac{m(m-1)}{1.2} \cos (m-4)x + \cdots.$$

Si m est pair, le développement de $(u+v)^m$ contient un terme moyen, savoir :

$$\frac{m(m-1)\cdots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\cdots\frac{m}{2}} u^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}}.$$

Ce sera le dernier terme du développement de $2^m \cos^m x$, en remplaçant, d'ailleurs, $u^{\frac{m}{2}} v^{\frac{m}{2}}$ par l'unité.

Si m est impair, les deux termes du milieu ont des coefficients égaux multipliés respectivement par

$$u^{\frac{m+1}{2}} v^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{et} \quad u^{\frac{m-1}{2}} v^{\frac{m+1}{2}};$$

ou simplement par u et v, à cause de $uv = 1$. En tenant compte de la relation $u + v = 2 \cos x$, le dernier terme du développement de $2^m \cos^m x$ est donc alors

$$\frac{2m(m-1)\cdots\frac{m+3}{2}}{1\cdot 2\cdots\frac{m-1}{2}} \cos x.$$

Pour développer $\sin^m x$, observons que

$$2\sqrt{-1} \sin x = u - v;$$

d'où

$$2^m (\sqrt{-1})^m \sin^m x = u^m - mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2} u^{m-2}v^2 + \cdots.$$

Supposons d'abord m pair; les termes à égale distance des extrêmes seront de même signe, et on aura

$$2^m (-1)^{\frac{m}{2}} \sin^m x =$$

$$= 2 \cos mx - 2m \cos (m-2) x + 2 \frac{m(m-1)}{1.2} \cos (m-4) x - \cdots$$

Le dernier terme sera

$$\pm \frac{m(m-1)\cdots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\cdots\frac{m}{2}},$$

le signe $+$ correspondant au cas où $\frac{m}{2}$ est pair, et le signe $-$ au cas où $\frac{m}{2}$ est impair.

Supposons ensuite m impair; les termes à égale distance des extrêmes seront de signes contraires, et le développement deviendra, en remarquant que $uv = 1$,

$$2^m (\sqrt{-1})^m \sin^m x = u^m - v^m - m(u^{m-2} - v^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-4} - v^{m-4}) - \cdots$$

Or, on a

$$u^k - v^k = 2\sqrt{-1} \sin kx;$$

et en supprimant le facteur $\sqrt{-1}$ des deux membres de l'identité ci-dessus, on aura donc

$$2^m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin^m x =$$

$$= 2 \sin mx - 2m \sin (m-2) x + 2 \frac{m(m-1)}{1.2} \sin (m-4) x - \cdots;$$

le dernier terme sera

$$\pm 2 \frac{m(m-1)\cdots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2\cdots\left(\frac{m-1}{2}\right)} \sin x,$$

le signe $+$ convenant au cas où $\frac{m-1}{2}$ est pair, et le signe $-$ au cas où ce nombre est impair.

137. Nous avons fait voir pourquoi l'emploi transitoire de quantités imaginaires est permis dans des démonstrations de ce genre. Il est possible de le montrer plus clairement encore en prouvant, comme l'a fait Duhamel(*), que le symbole $\sqrt{-1}$ joue ici le même rôle qu'une indéterminée que l'on introduirait dans le calcul, et à laquelle on donnerait ensuite une valeur propre à conduire aux résultats cherchés.

A cet effet, remarquons que dans la recherche des développements de $\cos^m x$ et de $\sin^m x$, nous avons remplacé $2 \cos x$ par la somme

$$\cos x + \sqrt{-1} \sin x + \cos x - \sqrt{-1} \sin x$$

qui lui est identique. Or, on peut de même remplacer $2 \cos x$ par

$$\cos x + \lambda \sin x + \cos x - \lambda \sin x,$$

λ étant une indéterminée. Et si l'on effectue ensuite un calcul quelconque sur cette expression, le résultat sera nécessairement indépendant de λ. Les puissances d'un même degré quelconque de cette lettre auront donc zéro pour coefficient.

Cela posé, négligeons d'abord tous les termes du développement qui contiennent des puissances impaires de λ, ce qui est permis puisque le coefficient de chacune de ces puissances est nul.

Puis dans les termes qui restent, remplaçons λ^2 par -1, ce qui est permis pour le même motif. Il pourra alors y avoir des réductions entre les termes correspondant à des puissances différentes de λ^2, et notamment avec ceux qui ne renferment pas λ, et qui sont précisément ceux que l'on trouverait en ne transformant pas d'abord $2 \cos x$. Il peut donc résulter de là de nouvelles combinaisons qui, sans altérer la valeur du résultat, lui donnent une forme plus commode. Cela revient à y ajouter des quantités qui se détruisent, artifice qu'à chaque instant on emploie en algèbre pour faciliter certaines transformations.

Reprenons encore l'exemple du n° 135, et remplaçons $\sqrt{-1}$ par λ; nous aurons les identités

$$(a + b\lambda)(c + d\lambda) = ac + bd\lambda^2 + (ad + bc)\lambda,$$
$$(a - b\lambda)(c - d\lambda) = ac + bd\lambda^2 - (ad + bc)\lambda;$$

multiplions les membre à membre, il viendra

$$(a^2 - b^2\lambda^2)(c^2 - d^2\lambda^2) = (ac + bd\lambda^2)^2 - (ad + bc)^2 \lambda^2.$$

(*) DUHAMEL, *Éléments de calcul infinitésimal*, 3e éd., t. 1, note I.

Observons maintenant que ces formules doivent se vérifier pour toute valeur de λ, de sorte qu'on peut remplacer λ^2 par -1 ; on trouve alors

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2,$$

ce qui conduit au théorème démontré précédemment.

En faisant $\lambda = 1$, on trouve de même

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2,$$

ce qui pouve que le théorème s'étend au produit de deux différences de carrés.

138. On vient de voir que l'emploi des imaginaires dans les démonstrations est légitime quand les raisonnements permettent de considérer les opérations comme dépouillées de la signification qu'elles avaient originairement en arithmétique. Si, au contraire, ils sont fondés sur des considérations qui, évidentes pour des grandeurs réelles, ne le sont plus quand on passe à des quantités imaginaires, les résultats obtenus ne peuvent pas être considérés comme rigoureusement établis et il faut les vérifier d'une autre manière. En voici un exemple :

Soit une conique à centre rapportée à deux axes coordonnés Ox, Oy (fig. 8) qui font entre eux un angle θ, et soit l'équation de cette courbe.

$$\varphi(x,y) \equiv Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Désignons par a et b les cordonnées du centre C, et proposons-nous de calculer la longueur d'un demi-diamètre quelconque CA, faisant avec l'axe des x un angle donné α.

A cet effet, remarquons que les équations de CA peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{y-b}{\sin\alpha} = \frac{x-a}{\sin(\theta-\alpha)} = \frac{\rho}{\sin\theta},$$

ρ étant la distance du point (x, y) au point C, prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$, suivant que le point (x, y) tombe sur Cx' ou sur son prolongement.

Nous tirons de là, en posant

$$l = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}, \quad k = \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta},$$

$$y = b + l\rho, \quad x = a + k\rho.$$

Si l'on remplace x et y par ces valeurs dans l'équation de la courbe, il vient

$$\varphi(a, b) + \rho\,[l\varphi'(b) + k\varphi'(a)] + \rho^2(Al^2 + Blk + Ck^2) = 0,$$

formule dans laquelle $\varphi'(a)$ et $\varphi'(b)$ désignent les dérivées de la fonction $\varphi(x, y)$ prises respectivement par rapport à x et à y et dans lesquelles on a remplacé x par a et y par b.

Or le point (a, b) étant le centre, on a

$$\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0\,, \quad \text{d'où} \quad \rho^2 = \frac{-\varphi(a, b)}{Al^2 + Blk + Ck^2}\,.$$

Quand cette valeur est positive, elle représente le carré du demi-diamètre ; mais quand elle est négative représente-t-elle encore, abstraction faite du signe, ce qu'on appelle le carré du demi-diamètre imaginaire ?

On peut le prévoir par induction ; néanmoins il est à remarquer que ce qu'on nomme le carré du demi-diamètre imaginaire, c'est, au signe près, la valeur trouvée pour x'^2, lorsqu'on fait $y' = 0$ dans l'équation de la courbe rapportée à deux diamètres conjugués dont l'un, CA, est pris pour axe des x', l'autre pour axe des y'. Or il n'est pas évident à priori, que cette valeur de x'^2 est la même que celle de ρ^2.

Quand le diamètre est réel, il est clair que l'expression de sa longueur ne peut varier de quelque manière qu'on y parvienne ; mais quand il est imaginaire, on ne peut affirmer que dans l'expression à laquelle conduit le calcul, le coefficient de $\sqrt{-1}$ est indépendant du choix des axes, qu'après l'avoir constaté par un moyen quelconque. On peut le faire de diverses manières, notamment comme il suit.

Pour rapporter la courbe aux deux axes Cx', Cy', on a les formules de transformation

$$x = x'\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta} + y'\frac{\sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta} + a = kx' + a',$$

$$y = x'\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} + y'\frac{\sin\alpha'}{\sin\theta} + b = lx' + b',$$

dans lesquelles on a fait

$$a' = y'\frac{\sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta} + a, \quad b' = y'\frac{\sin\alpha'}{\sin\theta} + b$$

et qui conduisent à l'équation transformée suivante :

$$\varphi(a', b') + x'\,[k\varphi'(a') + l\varphi'(b')] + x'^2(Al^2 + Bkl + Ck^2) = 0\,.$$

Dans cette équation de la courbe rapportée aux deux diamètres conjugués Cx', Cy', faisons $y'=0$, ce qui entraîne les égalités $a'=a$ et $b'=b$; et remarquons aussi que, a et b étant les coordonnées du centre, on a $\varphi'(a)=0$ et $\varphi'(b)=0$; on trouvera alors

$$x'^2 = -\frac{\varphi(a, b)}{Al^2 + Blk + Ck^2}$$

et par, conséquent, $x'^2 = \rho^2$. C. Q. F. D.

Nous verrons plus tard qu'il est utile dans un grand nombre de cas d'étendre à des systèmes imaginaires certaines formules établies en géométrie analytique pour des systèmes réels (n° 282).

139. L'emploi des symboles imaginaires a aussi l'avantage de permettre, dans certains cas, d'exprimer par la somme algébrique d'un nombre fini de termes, des grandeurs réelles qui, sans leur secours, ne pourraient s'exprimer algébriquement que par une suite de termes en nombre infini. Il en est ainsi des racines d'une équation du troisième degré dans le cas irréductible. La formule connue sous le nom de formule de Cardan donne alors pour ces racines une expression algébrique sous forme finie, renfermant des imaginaires conjuguées ; et cela de telle façon que les termes qui contiennent le symbole $\sqrt{-1}$ se détruisent dans les développements en séries.

CHAPITRE IV.

GÉOMÉTRIE.

§ 1. Objet de la géométrie. — Définitions et axiomes.

140. Il y a plus de deux mille ans que les éléments de la géométrie ont été établis par Euclide sur des bases qui sont encore admises aujourd'hui. Toutefois, dans ces dernières années plusieurs savants se sont livrés sur les axiomes de la géométrie d'Euclide à des recherches qui les ont conduits à des découvertes importantes. Nous résumerons celles qui offrent le plus d'intérêt au point de vue de l'enseignement des mathématiques élémentaires.

La géométrie est la science de l'étendue; peut-être vaut-il mieux dire que c'est la science des figures. Quelques développements sont nécessaires pour bien faire comprendre cette définition.

Les corps qui nous entourent font naître en nous les idées de forme et d'étendue, et notre esprit ne tarde pas à concevoir ces idées indépendamment de la nature matérielle des corps; il s'habitue à ces abstractions, de même qu'il s'habitue à considérer la pluralité indépendamment de l'espèce des objets qui la constituent, ou en d'autres termes, à considérer les nombres abstraits.

« Pour bien connaître les propriétés des corps, » dit Laplace, « on a d'abord fait abstraction de leurs propriétés particulières et l'on n'a vu en eux qu'une étendue figurée, mobile et impénétrable. On a fait encore abstraction de ces deux dernières propriétés générales, en considérant l'étendue simplement comme figurée. Les nombreux rapports qu'elle présente sous ce dernier point de vue, sont l'objet de la géométrie. »

Quoique les corps que nous connaissons soient limités, on peut concevoir ces limites de plus en plus reculées et l'esprit ne peut même concevoir aucune borne qui s'opposerait à leur extension indéfinie ; de là vient l'idée de l'*espace indéfini*. On a beaucoup discuté la question de savoir si l'espace est un être réel ou non. Cette controverse est peu utile pour la science géométrique elle-même ; que l'on regarde l'espace comme une réalité ou comme une abstraction, cela importe peu, ce qui est certain, c'est que la conception de l'espace indéfini est inévitablement liée pour nous à celle de l'étendue simplement figurée.

141. *Définitions et axiomes.* — Rappelons d'abord que la définition d'une chose est l'expression de ses rapports avec des choses connues, et que par conséquent toutes les choses ne peuvent être définies, puisque pour en définir une, il faut en connaître au moins déjà une autre. On ne peut que ramener à celles que l'on admet par le sentiment de l'évidence.

De même que l'on ne peut tout définir, il est impossible de tout démontrer; car une démonstration a pour but de prouver qu'une vérité est la conséquence de certaines autres déjà connues ; de sorte que, remontant de proche en proche, on arrive à des axiomes ou vérités premières, évidentes pour tous, et qui doivent être admises comme points de départ.

Les choses qui ne peuvent se définir et les axiomes qui ne peuvent se démontrer devant être réduits au plus petit nombre possible, la première difficulté qui se rencontre dans l'enseignement de la géométrie élémentaire, consiste à décider quelles choses l'on ne doit pas définir, et quelles propositions l'on peut accepter comme des axiomes sans les démontrer.

L'auteur qui est entré le plus avant dans la voie de la réduction du nombre des notions premières est, pensons-nous, M. de Tilly, qui s'est proposé de les ramener toutes à la simple notion de la distance de deux points. Il définit d'abord la surface, qu'il considère comme la limite séparative de deux portions de l'espace ; puis la ligne, qui sépare deux portions de surface, et enfin le point qui limite une portion de ligne.

Il introduit ensuite la notion de la *distance* de deux points. Cette notion première, qu'il considère comme irréductible, est celle dont il fait découler toute la géométrie en montrant qu'il y a trois systèmes de géométrie possibles : ceux de Riemann, de Lobatchewsky et d'Euclide. Nous aurons à revenir plus tard sur ce sujet (voir n° 170). Mais tout

en appréciant hautement le mérite des savants travaux de M. de Tilly, notamment de ses deux mémoires principaux (*), il ne nous est pas possible de partager entièrement la manière de voir de cet auteur et nous pensons qu'il n'a pas atteint le but principal qu'il poursuivait; nous indiquerons plus loin quelles sont nos objections.

142. *Homogénéité de l'espace et invariabilité des figures.* — L'une des notions premières que l'on admet toujours, au moins tacitement, est celle de l'*homogénéité de l'espace*, laquelle consiste en ce qu'on suppose que toute figure existant dans une partie quelconque de l'espace, peut être reproduite sans modification aucune dans toute autre région. On attribue aussi à ces figures une *forme invariable*, c'est-à-dire qu'*on les considère comme des solides qu'on peut transporter dans l'espace sans y rien changer*. C'est sur cette notion que sont fondées les démonstrations où l'on fait usage de la superposition des figures; et c'est pour cela que l'idée de mouvement, de déplacement des figures, sans intervention de forces bien entendu, joue un rôle si important en géométrie.

143. *La ligne droite.* — Une notion qu'il est nécessaire d'introduire dès le début est celle de la ligne droite. On peut d'abord définir une surface, une ligne et un point comme il est dit ci-dessus. L'idée du mouvement permet ensuite de reprendre les choses en sens inverse et de considérer la ligne comme engendrée par le mouvement d'un point, la surface par le mouvement d'une ligne et le volume par le mouvement d'une surface.

Pour définir la ligne droite il s'agit maintenant de trouver un attribut de cette ligne qui la distingue de toutes les autres. Une première propriété consiste en ce que si l'on en considère une portion comprise entre deux points quelconques, on peut la faire coïncider, sans changement de forme, avec une autre portion de cette droite, partant d'un point pris sur elle à volonté; et qu'on peut de la même manière l'appliquer sur toute autre droite donnée. Toutefois cette propriété n'appartient pas à la ligne droite exclusivement; elle appartient aussi au cercle, dont un arc

---

(*) DE TILLY, *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique*. Mém. de la Soc. des sc. phys. et nat. de Bordeaux, t. III, 2e sér. — *Essai de Géométrie analytique Générale*, extrait du t. XLVII des Mém. cour. et autres, publiés par l'Acad. roy. de Belgique, 1892.

quelconque peut glisser sur ce cercle ou se placer sur tout autre cercle de même rayon.

Mais il est une autre propriété qui appartient exclusivement à la droite. Si l'on fixe deux points d'une ligne celle-ci peut en général se placer encore d'une infinité de manières en passant par ces deux points ; en d'autres termes, s'il s'agit d'une ligne quelconque, elle peut prendre une infinité de positions quand on la fait tourner autour de ces deux points ; et tandis que ceux-ci restent fixes, les autres se déplacent. Au contraire quand il s'agit d'une ligne droite, aucun de ses points ne change de position, et c'est là ce qui caractérise la ligne droite. Il résulte de ces explications que par deux points on peut toujours faire passer une ligne droite, et qu'on n'en peut faire passer qu'une.

A la vérité les considérations qui précèdent contiennent une proposition dont elles ne donnent pas la démonstration ; à savoir qu'il existe un système invariable qu'on peut faire tourner sur lui-même sans qu'aucun de ses points change de position dans l'espace ; mais nous croyons que la notion de ligne droite est une des conceptions géométriques qu'on ne peut ramener à d'autres plus simples, et qui entraîne avec elle la perception de toutes les propriétés de cette ligne.

Citons maintenant quelques-unes des définitions que l'on a données de la ligne droite.

D'après Euclide *la ligne droite est celle qui est tout également interposée entre ses points.* Cette définition manque de clarté ; mais il faut sans doute l'entendre en ce sens que si l'on considère deux points d'une droite, celle-ci ne saurait être placée sur eux de deux manières différentes, ce qui ramène à l'idée de rotation autour de deux points fixes. Duhamel dit qu'il croit être d'accord avec Euclide en appelant ligne droite *une ligne indéfinie telle que par deux points on n'en peut faire passer qu'une.* Il est cependant à observer qu'Euclide range parmi ses axiomes la proposition suivante : *Deux droites ne peuvent entourer un espace ;* or cela veut dire qu'entre deux points on ne peut mener qu'une droite ; il faut donc croire qu'Euclide ne considérait pas cet axiome comme identique à sa définition, mais comme une conséquence de celle-ci.

Dans un ouvrage qui a obtenu un immense succès, les *Éléments de Géométrie* de Legendre on trouve la définition suivante : *La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.* Or, contrairement à ce qu'exige une définition, au lieu de ramener par là la notion de ligne

droite à une autre plus simple, on la fait dépendre d'une idée plus complexe; et, en effet, on peut démontrer, comme l'a fait Euclide, qu'une ligne droite est plus courte qu'une ligne brisée terminée à ses extrémités (voir n° 148). Ainsi que l'a fait remarquer Houël(*), Legendre aurait dû, pour rester conséquent avec lui-même, définir la surface plane la plus petite de toutes celles qui sont terminées au même contour. Car cette proposition est pour le plan, l'analogue de celle dont s'est servi Legendre pour définir la ligne droite. L'une et l'autre furent posées comme des principes par Archimède, quand ce grand Géomètre aborda les problèmes de la rectification du cercle et de la quadrature de la sphère.

Toute ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites est courbe. — On a fait à cette définition le reproche qu'elle énonce deux négations qui ne peuvent mener à rien et qui n'ont aucun rapport avec la nature intime de la ligne courbe. Mais on peut répondre que la nature intime de la ligne courbe est précisément de n'être droite dans aucune de ses parties, et que définir autrement la ligne courbe serait aussi difficile que de définir la droite elle-même.

144. *Le plan.* — Ce que nous venons de dire de la difficulté de définir une droite s'applique également à la définition d'un plan.

D'après Euclide *la surface plane est celle qui est située semblablement par rapport aux lignes droites qu'elle contient.* Cette définition n'est pas plus claire que celle de la ligne droite. Elle doit sans doute être comprise en ce sens qu'un plan peut glisser sur les droites qu'il contient sans sortir du lieu qu'il occupe; mais il semble nécessaire d'ajouter qu'il peut aussi coïncider avec lui-même après renversement. Euclide sous-entend dans sa définition qu'une droite qui a deux points communs avec un plan s'y trouve tout entière.

Legendre se sert de cette dernière propriété pour définir le plan. D'après lui *le plan est une surface telle que si l'on fait passer une droite par deux quelconques de ses points, cette droite est tout entière dans la surface.* Mais cette définition exprime une infinité de conditions; et comment sait-on si ces conditions ne sont pas incompatibles ? Encore une fois, ne suppose-t-elle pas que l'on a le sentiment de la forme d'une

---

(*) *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie Élémentaire*, note IV.

surface plane; et cette vue de l'esprit qui nous fait concevoir le plan, ne nous fait-elle pas admettre comme évidente la propriété dont se sert Legendre pour le définir ; en sorte que cette propriété devrait être plutôt regardée comme un axiome rationnel que comme une définition?

Duhamel a cherché à ramener l'admission de la surface plane à quelque chose de plus évident que le simple énoncé qui précède (*).

Il introduit d'abord la notion d'*angle* ou d'inclinaison mutuelle de deux droites qui se coupent; il ne croit pas que l'on doive définir cette idée parce qu'elle ne saurait être ramenée à d'autres plus simples. Il fait remarquer que dans la recherche des rapports des grandeurs ou quantités quelconques, l'important est de définir clairement l'égalité et l'addition de ces choses, parce que cela est nécessaire et suffisant pour les comparaisons. Or il dit que *deux angles sont égaux quand on peut, en transportant l'un de ces deux systèmes de droites, sans y rien changer, faire coïncider les directions de ses deux lignes avec les directions de celles de l'autre.* L'auteur appelle ensuite l'attention sur un cas remarquable d'égalité de deux angles : c'est celui des angles qu'une droite qui en rencontre une autre forme avec les deux côtés de cette dernière; il regarde comme évidente la possibilité de cette position relative des deux lignes; il dit que dans ce cas la première est perpendiculaire sur la seconde, et qu'elle fait avec elle des *angles droits* ; partant de là il définit le plan et prouve que cette surface jouit de la propriété énoncée dans la définition de Legendre.

« Concevons, dit l'auteur, une ligne droite quelconque, et en un de ses points élevons une perpendiculaire ; supposons que cette seconde ligne prenne d'une manière continue toutes les positions possibles en passant toujours par le même point, et restant perpendiculaire à la première. Il est certainement plus facile de se représenter la surface lieu de toutes ces perpendiculaires, ou, par une image empruntée au mouvement, la surface engendrée par une droite perpendiculaire à la première et tournant autour d'elle en passant toujours par un même de ses points, que d'admettre à priori qu'il existe une surface telle que la droite qui passe par deux quelconques de ses points, y soit comprise tout entière ; or on peut facilement s'assurer que le lieu dont nous venons d'indiquer la génération jouira de cette propriété.

(*) *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, 2e partie, p. 12 et suivantes.

« Remarquons d'abord l'identité de la forme de la surface considérée de ses deux côtés. Si, en effet, on la retourne, et qu'on fasse coïncider chacune des directions de la première droite, transportée avec elle, avec la direction opposée à partir du point fixe, elle coïncidera avec sa première position, puisqu'elles seront l'une et l'autre le lieu des perpendiculaires à une même droite par un même point.

« Il est de plus évident que cette surface coïncidera toujours avec elle-même si on la déplace de manière que les perpendiculaires qui l'ont engendrée restent perpendiculaires à l'axe fixe. Cela posé, considérons deux points quelconques sur cette surface; faisons passer par ces points une droite indéfinie, et suivons-la à partir d'un de ces points en marchant vers l'autre; comme, par sa définition, elle est semblable de tous les côtés, et que le plan n'offre lui-même aucune dissemblance entre ses deux faces, de quel côté de la surface peut-on concevoir que passe d'abord la droite? Et elle ne peut passer des deux côtés à la fois, parce que alors, quand on serait arrivé au second point donné, on aurait deux lignes droites passant par les deux mêmes points, ce qui est impossible.

« Comment donc n'admettrait-on pas comme évident qu'entre ces deux points la droite est tout entière dans la surface? Et l'on admettra aussi qu'elle n'en peut sortir au delà; car, par les raisons déjà données, si elle passait d'un côté, on serait fondé à admettre qu'elle passe de l'autre, et l'on aurait encore deux droites différentes qui auraient deux points communs; ce qui est contraire à la définition. »

Duhamel prouve ensuite que réciproquement, toute surface telle que si l'on en joint deux points par une droite, cette droite est tout entière dans la surface, est le lieu des perpendiculaires à une droite menées par un de ses points. Mais sans suivre l'auteur dans cette dernière démonstration, examinons s'il a réellement réussi à ramener la propriété du plan, qui sert parfois à le définir et que d'autres regardent comme un axiome, à quelque chose de plus évident.

Pour en juger il conviendra d'observer que la démonstration repose uniquement sur cette propriété du plan d'être superposable à lui-même par renversement. Or cela ne suffit pas pour pouvoir conclure que la droite qui joint deux de ses points s'y trouve tout entière. Le plan, en effet, n'est pas la seule surface qui jouisse de cette propriété. Elle appartient aussi au cône de révolution. Si l'on ne connaissait la forme du plan par une intuition qui suffit pour faire admettre l'axiome fondamental

qui nous occupe, on ne pourrait affirmer que le lieu des perpendiculaires élevées sur une droite en un de ses points n'est pas une surface à plusieurs nappes, comme l'est le cône lui-même ; et si l'on peut se faire une telle idée de la surface en question, ne sera-t-il pas facile de se représenter une droite qui la coupe en deux points sans s'y trouver tout entière ?

D'autres démonstrations ont été essayées mais ne nous paraissent pas plus satisfaisantes(*). La difficulté consiste, nous semble-t-il, en ceci : Étant donné un point O sur une droite AB, si on fait tourner la demi-droite OA autour du point O pour l'amener sur OB, est-on sûr de pouvoir achever le mouvement sans passer par deux positions où la droite mobile est perpendiculaire à la droite fixe? On peut le considérer comme évident quand le mouvement a lieu dans un plan, mais non si on écarte la notion du plan. Dès lors, comment prouver que le lieu des perpendiculaires n'a pas deux nappes? Cette difficulté se retrouve sous une forme différente dans d'autres démonstrations.

Il nous paraît donc que l'on peut considérer l'idée que chacun se fait d'un plan comme entraînant avec évidence la propriété dont jouit cette surface de renfermer entièrement toute droite qui passe par deux de ses points.

Voici comment Laplace parle de la ligne droite et du plan dans l'une des séances de l'École normale :

« L'étendue figurée dont je me propose de vous entretenir ici, n'existe qu'avec trois dimensions; mais pour la considérer suivant la méthode analytique, on commence par la dépouiller de deux de ces dimensions et en la réduisant ainsi à une seule, on a l'idée de la *ligne*. Si dans cette idée on écarte tout rapport avec deux dimensions, on a l'idée de la ligne droite; car, quoiqu'une ligne courbe n'ait qu'une dimension, cependant l'idée de sa courbure suppose nécessairement la considération de deux dimensions. L'extrémité de la ligne forme le point, qui est la dernière abstraction de l'entendement dans la considération de l'étendue. La *surface* est l'étendue envisagée avec deux dimensions ; et si dans cette idée on fait entièrement abstraction de la troisième, on a l'idée du plan. Enfin l'étendue avec ses trois dimensions forme le *solide*. La ligne droite

(*) Voir notamment la note III de l'*Essai critique* de HOUËL, rédigée d'après un écrit de J. BOLYAÏ.

est la plus courte de toutes celles que l'on peut mener d'un point à un autre. »

Cette remarque est très profonde : La ligne droite peut seule exister dans un espace à une dimension et le plan dans un espace à deux dimensions. On ne peut cependant pas la considérer comme donnant les définitions de la droite et du plan.

145. *L'angle.* — Duhamel pense, avec raison selon nous, qu'il n'est pas à propos de définir l'idée d'angle. On peut, il est vrai, dire avec certains auteurs que c'est l'écartement ou l'inclinaison mutuelle de deux droites qui se coupent. Mais il doit être entendu que c'est une définition qui ne porte que sur le mot, comme celles qu'on trouve dans les dictionnaires, et qu'elle demande à être expliquée. Il faut montrer que quand une droite tourne dans un plan autour d'un point fixe pris sur une autre droite avec laquelle on suppose qu'elle coïncidait à l'origine du mouvement, la droite mobile s'écarte de plus en plus de la droite fixe, et qu'ainsi l'angle va sans cesse en augmentant. La droite peut, d'ailleurs, revenir à sa position primitive en faisant le tour entier du plan. Elle peut, si on la conçoit indéfiniment prolongée, atteindre un point quelconque du plan, et le dépasser ensuite. On dit alors que le *point est dans l'angle.* Enfin il faut faire observer que la droite mobile peut passer d'une position à une autre en tournant en deux sens opposés et que les angles ainsi décrits ne sont généralement pas superposables.

Il faut définir les angles égaux par la possibilité de les superposer et faire voir que la longueur des côtés est sans influence sur la grandeur de l'angle.

En suivant la marche qui vient d'être indiquée on se fait immédiatement une idée nette de ce qu'il faut entendre par angles égaux, ou par angle plus grand ou plus petit qu'un autre. Si l'on veut, au contraire, comme Duhamel, définir l'égalité des angles à priori et en déduire ensuite la notion du plan, il n'est pas possible de donner la définition d'un angle plus grand qu'un autre en même temps que celle de l'égalité. On ne peut le faire qu'en s'appuyant sur la considération du plan, qui permet de définir l'addition des angles.

Certains auteurs disent que l'*angle est la portion de plan comprise entre deux droites qui se coupent.* Cette définition a été donnée pour la première fois par Bertrand de Genève qui en a fait le point de départ d'une foule de démonstrations manquant de rigueur.

Il y a des auteurs, comme Catalan, qui, tout en adoptant la définition de Bertrand de Genève, ne s'en sont pas servis dans la théorie des parallèles, et ont eu simplement pour but de rendre la notion d'angle aussi claire que possible.

Toutefois on ne peut admettre l'infini en mathématiques qu'en y attachant l'idée de quantité susceptible de croître sans limite. L'angle serait donc alors une indéterminée. Or l'angle, en réalité, est un élément dont on se sert pour fixer une direction, en indiquant de combien elle s'éloigne d'une autre direction donnée. C'est un élément parfaitement déterminé et dans la conception duquel n'intervient pas la considération d'une portion plus ou moins étendue de la surface du plan.

146. *Parallèles.* — Deux droites situées dans un même plan et qui, prolongées indéfiniment de chaque côté, ne se rencontrent jamais, sont *parallèles.* Il faut avoir soin de dire que les deux droites sont dans un même plan, et montrer aux commençants que deux droites non dans un même plan peuvent ne pas se rencontrer quoique n'étant pas parallèles.

§ 2. Des premières propositions de la géométrie.

147. Le grand succès qu'ont obtenu les *Éléments* de Legendre doivent être attribués principalement aux qualités de style de cet ouvrage, écrit avec clarté, mais dans lequel se trouvent malheureusement plusieurs démonstrations défectueuses.

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, Legendre donne les définitions suivantes de la ligne droite et du plan : La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. Le plan est une surface dans laquelle, prenant deux points à volonté, et joignant ces deux points par une ligne droite, cette ligne est tout entière dans la surface.

Legendre admet comme un axiome que d'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite ; mais il ne regarde pas comme évident à priori que deux droites qui ont deux points communs, étant indéfiniment prolongées, ne peuvent se séparer au delà de ces points.

« La première proposition qu'il cherche à démontrer, » dit Duhamel, « est que tous les angles droits sont égaux entre eux. Il considère deux droites CD, GH (fig. 9), respectivement perpendiculaires sur les lignes LM, L'M', et il se propose de démontrer que les angles formés en C

sont égaux à ceux dont le sommet est en G. Pour cela, dit-il, prenez les quatre distances égales CA, CB, GE, GF ; la distance AB sera égale à la distance FE, et on pourra placer la ligne EF sur AB, de manière que le point E tombe en A, et le point F en B. Ces deux lignes ainsi posées coïncideront complètement l'une avec l'autre · car sans cela il y aurait deux lignes droites de A en B, ce qui est impossible. Donc le point G, milieu de EF, tombera sur le point C, milieu de AB.

« Il semble, au premier abord, qu'il n'y ait aucune difficulté à faire à ces constructions et aux conséquences qui en sont tirées ; mais, avec un peu de réflexion, on reconnaîtra que celui qui n'admet pas qu'une droite ne puisse avoir qu'un seul prolongement indéfini, ne pourrait admettre les coïncidences telles qu'elles viennent d'être indiquées. En effet, on prend quatre longueurs égales, c'est-à-dire quatre longueurs qui pourraient coïncider deux à deux. Cela étant accepté, AC et EG peuvent bien être appliquées l'une sur l'autre ; mais alors il reste douteux si le prolongement GF de EG coïncidera avec le prolongement CB de AC ; dès lors rien ne prouve que le point F coïncidera avec B et la démonstration ne subsiste pas.

« La seconde proposition consiste en ce que toute droite qui en rencontre une autre fait avec elle deux angles adjacents dont la somme est égale à deux angles droits. Elle est suivie de quelques corollaires sans difficulté.

« La troisième proposition consiste en ce que deux droites indéfinies dans les deux sens, qui ont deux points communs, coïncident dans toute leur étendue.

« Nous avons dit précédemment que Legendre admet bien que d'un point à un autre on ne peut mener qu'une ligne droite, mais non que deux droites qui coïncident dans une certaine étendue ne peuvent pas se séparer au delà. Il peut paraître étrange qu'il n'ait pas admis comme aussi évidente la coïncidence au delà qu'en deça des deux points communs. Mais le désir de demander le moins de concessions possible, ne fait-il pas naître des embarras d'un autre genre ? Il admet la notion du plan, et il suppose que toutes les lignes qu'il trace soient dans un même plan. Il a défini le plan : une surface telle, que si l'on joint deux de ses points par une droite, et qu'on la prolonge indéfiniment dans les deux sens, tous ses points seront sur cette surface ; et c'est sur cette définition qu'il se fonde au commencement de son

cinquième livre, pour prouver qu'une droite ne peut être en partie dans un plan et en partie en dehors.

« Or si l'idée qu'on a de la ligne droite autorise à penser que deux droites qui ont deux points communs ne coïncident pas au delà de ces points, comment se figurer une surface telle qu'en y prenant deux points quelconques, et faisant passer par ces points une droite pouvant donner lieu à un nombre indéfini de prolongements, tous ces prolongements seraient sur cette même surface, n'importe où l'on prendrait sur elle ces deux points? Personne n'accepterait la notion d'une surface d'après une telle définition ; et si on ne la repousse pas, c'est qu'on admet auparavant que, par deux points donnés, il ne peut passer deux droites indéfinies différentes. Or, la démonstration que Legendre cherche à donner de cette proposition suppose la notion du plan; il y aurait donc cercle vicieux.

« Ces raisons nous font conclure que Legendre aurait mieux fait d'admettre que deux lignes droites qui ont deux points communs, coïncident non seulement entre ces deux points, mais dans toute leur étendue. »

Alors la troisième proposition de Legendre disparaîtrait et, avec elle, la difficulté signalée par Duhamel dans la démonstration de la première; car si on applique la droite LM sur L'M' (fig. 9), de manière que le point C coïncide avec G, la perpendiculaire CD coïndera avec GH; autrement on aurait en G deux perpendiculaires à L'M', ce qui est impossible, puisque la position de la droite GH pour laquelle les deux angles adjacents L'GH, HGM' sont égaux est évidemment unique.

148. Nous avons déjà dit qu'Euclide démontre qu'une droite est plus courte qu'une ligne brisée qui aboutit aux mêmes extrémités. Nous allons indiquer la série des propositions qui conduisent à ce théorème; quelques-unes des démonstrations sont ici supprimées ou simplifiées comme le propose Duhamel.

1° *Tous les angles droits sont égaux.*

Cette proposition était regardée par Euclide comme évidente.

2° *La somme des angles formés d'un même côté d'une droite indéfinie, par une ou plusieurs droites partant d'un même point de la première est égale à deux droits.* — Lorsqu'il n'y a que deux angles, ils sont dits supplémentaires.

3° *Réciproquement si la somme des angles consécutifs qui ont un sommet commun est égale à deux droits, les côtés extérieurs sont en ligne droite.*

4° *Lorsque deux droites indéfinies se rencontrent, les angles opposés sont égaux.*

5° *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, ou un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

C'est ce que la superposition fait immédiatement reconnaître.

6° *Dans un triangle isoscèle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Soit le triangle ABC (fig. 10) dans lequel AB = AC ; concevons ce triangle retourné de manière que ces deux côtés se trouvent placés en sens inverse : On aura un triangle A′B′C′ qui aura un angle A′ égal à l'angle A du triangle ABC, compris entre les deux côtés A′C′, A′B′, égaux respectivement à AB et AC. Ces triangles seront donc superposables et l'angle A′B′C′ coïncidera avec ACB ; ce qui prouve que les deux angles du triangle ABC sont égaux.

7° *Si un triangle* ABC *a deux angles égaux* B *et* C, *les côtés opposés le seront aussi.*

Cela se prouvera encore en superposant le triangle ABC au même triangle retourné.

8° *Si l'on prolonge un côté d'un triangle, l'angle extérieur sera plus grand que chacun des intérieurs opposés.*

Soit le triangle ABC (fig. 11), BD le prolongement de AB; joignons le point A au point E milieu de BC, et prolongeons AE d'une quantité EF égale à AE; les triangles BEF, ACE seront égaux, comme ayant un angle égal en E compris entre côtés respectivement égaux; les angles C et CBF seront donc égaux. Mais le point F est dans l'angle CBD, vu que la ligne AE, prolongée indéfiniment ne peut venir couper une seconde fois la ligne AD, avec laquelle elle a déjà un point commun A ; donc l'angle CBF est plus petit que CBD ; donc aussi l'angle C est plus petit que l'angle extérieur CBD.

Quant au second angle intérieur BAC, qui est adjacent à la base, on fera une démonstration semblable en prolongeant le côté CB, auquel il est opposé et considérant l'angle extérieur ABH ; l'angle BAC sera donc plus petit que ABH, et par conséquent que CBD, qui lui est égal comme opposé au sommet.

9° *Si deux côtés d'un triangle sont inégaux, au plus grand côté sera opposé le plus grand angle.*

Soit AC > AB, (fig. 12); prenons AD = AB; le triangle ADB sera isoscèle, et par conséquent les angles ABD, ADB seront égaux. Mais l'angle ABC est plus grand que ABD; et ADB, comme extérieur au triangle BDC, est plus grand que C : donc à plus forte raison ABC > C.

C. Q. F. D.

10° *Si deux angles d'un triangle sont inégaux, au plus grand angle sera opposé le plus grand côté.*

Soit l'angle ABC plus grand que ACB ; je dis que le côté AC sera plus grand que le côté AB. En effet, on ne peut avoir AC = AB, puisque alors les angles ABC et ACB seraient égaux. On ne peut avoir non plus AC < AB, puisqu'il faudrait pour cela que l'angle ABC fût plus petit que ACB; donc on a AC > AB.

11° *Dans tout triangle un côté quelconque est plus petit que la somme des deux autres.*

Soit le triangle ABC, (fig. 13), BC l'un quelconque de ses côtés; prolongeons BA de AD = AC; le triangle CAD sera isoscèle, et les angles D et ACD seront égaux ; il en résultera BCD > D; et, par conséquent dans le triangle BCD, le côté BD sera plus grand que BC, comme étant opposé à un plus grand angle. Mais BD = BA + AC; donc la somme des deux côtés, BA, AC, du triangle ABC est plus grande que le troisième côté BC. C. Q. F. D.

Corollaire. — *Il résulte de là qu'une ligne droite est plus courte que toute ligne brisée ayant les mêmes extrémités.* Car soit la droite AB (fig. 14) et la ligne brisée AEDCB; on a

$$AB < AC + BC < AD + DC + BC < \cdots \text{ etc.}$$

La ligne droite est donc le plus court chemin d'un point à un autre, en ne considérant toutefois que les chemins composés de lignes droites en nombre quelconque.

§ 3. Théorie des parallèles. — Géométrie imaginaire.

149. Nous indiquerons quelques-uns des moyens qui ont été proposés pour démontrer, soit le postulatum d'Euclide, soit une autre proposition entraînant ce postulatum comme conséquence.

Il est très facile de prouver que si deux droites BA, CD (fig. 15), font

avec une troisième BC deux angles intérieurs DCB, CBA, dont la somme vaut deux droits, ces droites ne peuvent jamais se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge et que, par suite, elles sont parallèles; mais il n'en est pas de même de la proposition réciproque, à savoir que *si la somme des angles* ABC, BCD *est plus petite que deux droits, les droites* BA *et* CD *suffisamment prolongées se rencontrent nécessairement.* Cette dernière proposition est cependant indispensable, pour qu'il soit établi qu'on ne peut mener par un point qu'une seule parallèle à une droite. — Elle est connue sous le nom de *postulatum d'Euclide.*

On peut d'abord considérer un cas particulier du postulatum d'Euclide, d'où le cas général est facile à déduire :

Soit AB (fig. 16) *une perpendiculaire à* CB ; CD *une oblique faisant un angle aigu* DCB *avec* CB ; *l'oblique suffisamment prolongée devra rencontrer la perpendiculaire.*

On en a présenté la démonstration suivante : D'un point E pris sur CD, abaissons une perpendiculaire EP sur BC, et supposons que le point E se meuve de E vers D ; la perpendiculaire prendra successivement les positions EP, E'P', ..., ce qui prouve que quand par les points P,P',... pris sur BC à des distances croissantes de C, on élève des perpendiculaires à BC, celles-ci, dans un certain intervalle, rencontrent nécessairement l'oblique; donc si la perpendiculaire BA ne la rencontrait plus, le plan de la figure devrait comprendre deux régions : une région où les perpendiculaires rencontreraient l'oblique; une autre où elles ne la rencontreraient plus. Soit DQ la dernière perpendiculaire rencontrant l'oblique CD; celle-ci devrait alors se terminer brusquement en D sans pouvoir passer au-delà dans la région des non rencontres, ce qui est contre la nature de la ligne droite.

Cette démonstration est insuffisante parce qu'elle suppose l'existence d'une dernière perpendiculaire DQ rencontrant la droite CD. Or cela n'est pas une conséquence nécessaire de l'existence d'une région où il y a rencontre et d'une autre région où il n'y en a pas. En effet, soit AB une branche d'hyperbole ayant CD pour asymptote, et CA une perpendiculaire à CD ; dans la région à droite de CD, les perpendiculaires à CA rencontrent la courbe ; dans la région à gauche, elles ne la rencontrent plus. Il existe donc bien ici deux régions analogues à celles que l'on considère dans le cas précédent, et cependant il n'existe pas une *dernière perpendiculaire* rencontrant la courbe AB. Les deux régions sont séparées

par une perpendiculaire CD qui ne rencontre pas la courbe. A la vérité, comme on a le sentiment de la ligne droite, on voit bien que les choses ne peuvent se passer ainsi quand AB est une droite, oblique par rapport à CA ; mais considérer ceci comme évident reviendrait au fond à regarder comme évidente la proposition qu'il s'agit de démontrer.

150. Voici une démonstration du postulatum d'Euclide, fondée sur la considération de certaines grandeurs infinies (*).

« L'idée de l'angle se lie naturellement avec celle de l'espace infini compris entre ses côtés; cet espace a toujours un rapport déterminé avec la superficie entière du plan ; car les quatre angles droits formés par l'intersection des deux droites perpendiculaires entre elles, comprennent toute la superficie du plan.

« Donc un angle quelconque renferme entre ses côtés un espace qui est à la superficie du plan, comme l'angle lui même est à quatre angles droits.

« Le plan étant étendu à l'infini, tant en longueur qu'en largeur, sa superficie est considérée comme un infini du second ordre; ainsi un angle quelconque, s'il est mesuré par l'espace compris entre ses côtés, sera considéré comme un infini du second ordre.

« Or l'espace infini compris dans tout angle donné peut se diviser en une infinité de parties égales qui seront elles-mêmes infinies, mais du premier ordre seulement.

« En effet, soit A un angle donné (fig. 18). Si sur un de ses côtés, AP, on prend des parties égales AC, CE, EG, etc., en nombre quelconque, et que des points C, E, G, etc., on mène des parallèles CD, EF, GH, à l'autre côté AB, ou ce qui revient au même, des droites qui fassent avec AP des angles DCP, FEP, HGP, etc., égaux à l'angle A, on formera ainsi dans l'angle BAP, autant d'espaces qu'on voudra BACD, DCEF, FEGH, etc., qui sont tous égaux entre eux ; car il est visible qu'ils peuvent être superposés de la même manière que cela se fait pour deux triangles qui ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

« Nous appellerons *biangle* l'un de ces espaces formés par deux droites indéfinies AB, CD, qui, étant situées dans un même plan, font avec une

---

(*) LEGENDRE. *Réflexions sur la théorie des parallèles. Mémoires de l'Institut.* t. XII, après 1816.

troisième AC, deux angles intérieurs BAC, ACD, dont la somme est égale à deux angles droits. Il y a, comme on voit, une infinité de biangles égaux dans l'espace que contient un angle; c'est pourquoi un biangle est un infini du premier ordre seulement et l'angle un infini du second ordre, quand on convient de mesurer ces deux quantités par l'espace superficiel compris entre leurs côtés.

« Ces notions une fois établies, il est très facile de démontrer le postulatum d'Euclide.

« Soient CD, AX (fig. 19), deux droites qui font avec une troisième AC, deux angles intérieurs dont la somme est moindre que deux angles droits; je dis que ces deux droites prolongées suffisamment, de C vers D et de A vers X, devront se rencontrer.

« Par le point A menez la droite AB, de manière que la somme des deux angles intérieurs BAC + ACD soit égale à deux angles droits; puisque, par hypothèse, la somme des deux angles XAC + ACD est moindre que deux angles droits, il faut que l'angle CAX soit moindre que l'angle BAC.

« Mais l'angle BAX, mesuré par l'espace compris entre ses côtés, est un infini du second ordre, tandis que le biangle BACD, mesuré semblablement par l'espace compris entre ses côtés, n'est qu'un infini du premier ordre; il est donc impossible que le premier espace soit contenu dans le second; donc la droite AX prolongée suffisamment, devra rencontrer la droite CD également prolongée, afin que l'espace contenu dans l'angle CAX s'étende infiniment au delà du biangle terminé par les deux droites AB, CD. »

Bertrand de Genève est le premier qui ait donné cette démonstration laquelle, d'après Legendre, serait simple et rigoureuse. Néanmoins elle est fausse. Car on ne saurait entendre cette expression qu'un angle est infiniment plus grand qu'un biangle, qu'en ce sens que deux surfaces limitées prises l'une dans l'angle, l'autre dans le biangle, et indéfiniment croissantes, auraient entre elles un rapport qui pourrait croître sans limite; mais si l'on tentait de transformer la démonstration en y introduisant ces considérations rigoureuses, on serait arrêté par des difficultés insurmontables.

D'ailleurs, si l'on fait décroître indéfiniment l'angle XAC, avant de devenir nul cet infini du second ordre ne passera-t-il pas par une infinité de valeurs où il ne sera plus qu'un infini du premier ordre? Et que

devient la démonstration si l'on peut concevoir de telles valeurs de l'angle XAB?

151. Afin d'éviter l'inconvénient d'admettre des infinis de deux ordres différents, Legendre a essayé une démonstration se réduisant à la considération des seuls triangles.

Il veut prouver que si deux droites AC, BD (fig. 20), sont perpendiculaires à une troisième AB, et que l'on mène la droite MN perpendiculaire à AC, et terminée à sa parallèle BD; 1° la droite MN sera égale à AB; 2° cette même droite MN, perpendiculaire à AC, sera aussi perpendiculaire à sa parallèle BD. Mais sans entrer dans le détail de la démonstration, où il serait aisé de relever certaines suppositions gratuites, nous nous bornerons à dire qu'il s'en trouve une dans l'énoncé même de cette proposition; en effet, pour celui qui n'admet pas le postulatum d'Euclide, il n'est pas évident que MN rencontrera BD, tandis que toute la démonstration de Legendre suppose que le point de rencontre N existe.

152. Citons encore une démonstration du postulatum d'Euclide de E. Lamarle (*). On peut y objecter qu'elle repose sur la considération *d'une droite qui tourne autour d'un point mobile*, sans que l'auteur ait défini cette rotation; or il est aisé de voir que cette définition ne saurait être nettement établie à moins de supposer préablement connu le postulatum d'Euclide.

153. Au lieu de démontrer directement le postulatum d'Euclide, on peut se proposer de prouver que la somme des trois angles d'un triangle rectiligne vaut deux droits, proposition qui entraîne le postulatum comme conséquence.

Legendre a essayé plusieurs démonstrations de ce théorème (Mémoire cité). Il a d'abord voulu établir que la somme des trois angles d'un triangle ne peut être ni plus grande ni plus petite que deux droits. Il démontre assez facilement la première partie de ce théorème; et aussi que s'il existe un seul triangle rectiligne dans lequel la somme des angles vaut deux droits, cette somme sera aussi égale à deux angles droits dans tous les triangles rectilignes possibles; mais on ne peut aller au delà.

(*) *Notions fondamentales sur plusieurs points élémentaires de géométrie, de dynamique et d'analyse transcendante*, par E. LAMARLE. — Voir aussi : *Mém. de l'Acad. roy. des sc. de Belgique*, t. XXX.

1° Legendre prouve comme il suit que *la somme des trois angles d'un triangle ne peut surpasser deux angles droits :*

Désignons, pour abréger, par ΣABC (fig. 21) la somme des trois angles du triangle ABC, et soit, s'il est possible, $\Sigma ABC > 2$ droits; sur AC prolongé portons les longueurs

$$CE = EG = \cdots = AC,$$

et sur ces bases, construisons les triangles DCE, FEG, ... tous égaux à ABC; joignons BD, DF, FH, ... etc.

L'angle BCD, supplément de la somme des angles ACB et DCE = BAC, sera, d'après l'hypothèse admise, plus petit que ABC. Donc $BD < AC$.

On voit d'ailleurs que tous les triangles BCD, DEF, ... sont égaux entre eux; donc $BD = DF = FH = \cdots$

Soit maintenant δ la différence $AC - BD$. Si l'on construit n triangles consécutifs égaux à ABC, la différence entre la droite totale $AP = n \,.\, AC$ et la somme des droites

$$BD + DF + \cdots = nBD,$$

sera $n\delta$; et, en prenant n suffisamment grand, on pourra faire en sorte que $n\delta$ surpasse la longueur finie

$$AB + PQ = 2AB.$$

Mais on aurait alors

$$AP - (BDF \ldots Q) = n\delta > AB + PQ,$$

d'où il résulterait que le côté AP du polygone ABD ... QPA serait plus grand que la somme de tous les autres, ce qui est impossible. Il est donc impossible qu'il existe un triangle rectiligne dont les angles aient une somme plus grande que deux angles droits.

2° *S'il existe un seul triangle dans lequel la somme des angles soit égale à deux angles droits, cette somme sera égale aussi à deux angles droits pour tous les triangles rectilignes possibles.*

I. Soit ABC (fig. 22) un triangle rectiligne tel, que $\Sigma ABC = 2^{dr}$. Faisons le triangle $BCD = ABC$, en prenant l'angle $BCD = CBA$ et $CD = AB$; d'où

$$BDC = A, \quad CBD = BCA, \quad BD = AC.$$

Prolongeons AB, AC, de longueurs $BF = AB$, $CE = AC$; joignons DE, DF. Des égalités précédentes et de $\Sigma ABC = 2^{d}$, il résulte que

DBF = BAC = DCE; d'où l'on conclut que chacun des triangles DBF, DCE est égal à ABC. On en déduit ensuite aisément que la somme des angles en D est égale à deux droits, et que, par suite, EDF est une ligne droite. Donc on peut construire un triangle AEF ayant ses côtés doubles respectivement de ceux du triangle ABC, et dont les angles, égaux à ceux de ABC, ont une somme égale à deux droits.

On pourra répéter cette construction autant de fois qu'on le voudra, et obtenir un triangle dont les côtés seront plus grands que toute longueur donnée, et dont les angles auront une somme égale à deux droits.

II. Si le triangle AMN (fig. 23) a un angle A commun avec le triangle ABC dont la somme des angles égale deux droits, on aura aussi $\Sigma\text{AMN} = 2^{\text{dr}}$. Construisons, en effet, d'après ce qu'on vient de voir, un triangle AGH, dont les côtés AG, AH, soient respectivement plus grands que AM, AN, et tel que l'on ait

$$\Sigma\text{AGH} = \Sigma\text{ABC} = 2dr.;$$

menons GN. La somme totale

$$\Sigma\text{AMN} + \Sigma\text{MNG} + \Sigma\text{NGH}$$

égale la somme des angles en M + la somme des angles en N + ΣAGH, et par conséquent vaut six droits; et comme aucune des trois sommes partielles ne peut surpasser deux droits, il faut que chacune d'elles soit égale à deux droits; donc $\Sigma\text{AMN} = 2dr.$

III. Soit maintenant *abc* (fig. 24) un triangle quelconque. Si ses angles ne sont pas égaux à ceux du triangle ABC pour lequel $\Sigma\text{ABC} = 2dr$, il faudra que l'un au moins d'entre eux soit moindre que l'angle correspondant du triangle ABC, sans quoi l'on aurait $\Sigma abc > 2dr$. Supposons donc $bac < \text{BAC}$; faisons $baf = \text{BAC}$, et menons bf à volonté ; d'après II, les triangles abf et ABC ayant un angle commun, on a $\Sigma abf = 2dr.$; les triangles abd et abf ayant un angle commun, $\Sigma abd = 2dr$; enfin les triangles abd et abc ayant un angle commun, $\Sigma abc = 2dr$. C. Q. F. D.

Il ne resterait donc qu'à prouver qu'il existe au moins un triangle dans lequel la somme des trois angles vaut deux droits; mais on n'y est pas parvenu.

154. Legendre a ensuite essayé d'autres démonstrations, et proposé la suivante :

« On démontre immédiatement par la superposition, et sans aucune proposition préliminaire, que deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal, adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Appelons p le côté dont il s'agit, A et B les deux angles adjacents, C le troisième angle; il faut donc que l'angle C soit entièrement déterminé lorsqu'on connaît les angles A et B avec le côté p; car si plusieurs angles C pouvaient correspondre aux trois données A, B et p, il y aurait autant de triangles différents qui auraient un côté égal adjacent à deux angles égaux, ce qui est impossible; donc l'angle C doit être une fonction déterminée des trois quantités A, B, p, ce que j'exprime ainsi : $C = \varphi(A, B, p)$.

« Soit l'angle droit égal à l'unité; alors les angles A, B et C pourront être exprimés par des nombres compris entre zéro et deux, et puisque $C = \varphi(A, B, p)$, je dis que la ligne p ne doit point entrer dans la fonction φ. En effet, on a vu que C doit être entièrement déterminé par les seules données A, B, p; et si l'on avait une équation quelconque entre A, B, C, p, on en pourrait tirer la valeur de p en A, B, C; d'où il résulterait que le côté p est égal à un nombre, ce qui est absurde; donc p ne peut entrer dans la fonction φ, et on a simplement $C = \varphi(A, B)$.

« Cette formule prouve déjà que si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisième doit être égal au troisième et, cela posé, il est facile de parvenir au théorème que nous avons en vue.

« Soit d'abord ABC (fig. 25) un triangle rectangle en A; du point A abaissez AD perpendiculaire sur l'hypoténuse; les angles B et D du triangle ABD sont égaux aux angles B et A du triangle BAC; donc, suivant ce qu'on vient de démontrer, le troisième BAD est égal au troisième C. Par la même raison, l'angle $DAC = B$; donc

$$BAD + DAC \text{ ou } BAC = B + C;$$

or l'angle BAC est droit; donc les deux angles aigus d'un triangle rectangle valent ensemble un angle droit.

« Soit ensuite BAC (fig. 26) un triangle quelconque; et BC un côté qui ne soit pas moindre que chacun des deux autres. Si du sommet de l'angle opposé A on abaisse la perpendiculaire AD sur BC, cette perpendiculaire tombera au dedans du triangle ABC, et le partagera en deux triangles rectangles BAD, DAC; or, dans le triangle rectangle

BAD, les deux angles BAD, ABD, valent ensemble un angle droit; DAC + ACD valent aussi un droit; donc les quatre réunis, ou seulement les trois, BAC, ABC, ACB, valent ensemble deux angles droits. Donc dans tout triangle la somme des trois angles est égale à deux angles droits. »

Cette démonstration a été très discutée(*) et des arguments pour et contre ont été produits en grand nombre. Des premiers nous n'avons rien à dire, si ce n'est qu'on peut aujourd'hui affirmer à priori que tout argument pour est mauvais; car on sait maintenant qu'il s'agit d'une proposition qui ne peut se démontrer par les moyens dont on dispose en géométrie (voir n° 168).

Quant aux objections qui ont été opposées à Legendre, on a dit d'abord que la relation $C = \varphi(A, B, p)$ suppose qu'à l'aide des trois données A, B, p, il est toujours possible de construire un triangle; c'est-à-dire que deux lignes tirées aux extrémités d'une troisième quelconque de manière à faire avec elle deux angles égaux à deux angles quelconques d'un triangle, doivent se rencontrer si on les prolonge suffisamment, ce qui revient à admettre le postulatum d'Euclide.

Cette première objection nous paraît peu fondée; car une relation telle que $C = \varphi(A, B, p)$ n'exigerait pas que le triangle fût possible pour toutes les valeurs de A, B et p. On pourrait concevoir, en effet, que pour certains systèmes de ces valeurs, celles de C fussent imaginaires.

Une objection plus sérieuse consiste à faire voir qu'on pourrait, en appliquant mot pour mot le même raisonnement, démontrer qu'il existe une relation nécessaire entre les trois côtés d'un triangle. Car un triangle est entièrement déterminé par un angle C et les deux côtés a, b qui le comprennent; donc le troisième côté c serait donné par une relation de la forme $c = \varphi(a, b, C)$; d'où l'on tirerait $C = \psi(a, b, c)$; en prenant le mètre pour unité de longueur, l'angle C serait égal à un nombre, ce qui serait absurde; par conséquent, C ne devrait pas entrer dans la relation précédente, et l'on aurait simplement $c = \varphi(a, b)$.

Mais on n'est pas entré ainsi dans le fond de la question et on ne s'est pas rendu compte du vice que renferme le raisonnement de Legendre, vice qu'il est cependant facile de faire toucher du doigt, ainsi que nous allons le montrer.

(*) Voir notamment : *Bibliothèque universelle de Génève*, octobre 1819.

La démonstration repose sur la double supposition 1° que si la connaissance de trois quantités A, B, p entraîne celle d'une autre quantité C, il en résulte nécessairement une relation $C = \varphi(A, B, p)$, dans laquelle ces grandeurs sont exprimées en nombres ; 2° que si dans une telle relation p représente une grandeur dont l'espèce est différente de celle de A, B, C, il est impossible que le choix de l'unité qui détermine en nombres ces dernières grandeurs, soit suffisant pour déterminer aussi en nombre la première.

Or cette impossibilité n'existe pas, et il est même étrange qu'un savant illustre tel que Legendre n'ait pas remarqué que l'on emploie constamment des relations de ce genre, et que l'artifice dont on fait usage pour y parvenir est toujours le même ; il consiste à établir entre les unités de mesure des deux espèces de grandeurs dont il s'agit, une dépendance telle que le choix de l'une entraîne celui de l'autre ; de façon que quand on choisit l'unité de première espèce, celle de seconde espèce est déterminée ; dès lors les grandeurs de première espèce sont représentées par les nombres qui expriment leurs rapports à l'unité de cette espèce que l'on a arbitrairement choisie, et les grandeurs de seconde espèce sont représentées par des nombres qui expriment leurs rapports à l'unité de seconde espèce. On pourrait en montrer une foule d'exemples ; il suffira d'en citer un : Si l'on donne la base b et la hauteur h d'un rectangle, sa surface S est déterminée ; et cela est vrai quelles que soient les unités de longueur et de superficie que l'on ait choisies pour exprimer b, h et S en nombres. S'ensuit-il qu'il existe une relation $S = \varphi(b, h)$ entre ces nombres ? Évidemment non, si l'unité de longueur et l'unité de surface restent arbitraires. Car en déterminant à volonté l'unité de longueur, on ne laisserait dans le second membre rien d'indéterminé, tandis que le premier pourrait encore prendre telle valeur qu'on voudrait, par un choix convenable de l'unité de surface. Mais il n'en est plus de même si l'on établit une dépendance mutuelle entre l'unité de longueur et l'unité de surface, de telle sorte que la détermination de l'une entraîne la détermination de l'autre. C'est ce qu'on fait effectivement en choisissant pour unité de surface le carré dont le côté est l'unité de longueur ; cette dépendance fait que, les lignes étant évaluées en nombres, les surfaces le sont également. Les surfaces sont comparées à l'unité de surface, les longueurs à l'unité de longueur, et ces comparaisons donnent naissance à des rapports qui peuvent être égaux, ou entre lesquels il peut, en

général, exister une relation quelconque. C'est ainsi qu'on trouve $S = bh$.

Si l'on voulait, dans une même formule, faire entrer les angles et les côtés d'un triangle, on devrait employer des moyens analogues. Il faudrait choisir pour unité d'angle, un angle déterminé par la longueur arbitraire prise pour unité de longueur. L'angle pris pour unité pourrait être celui qui comprendrait entre ses côtés un arc égal à l'unité de longueur, décrit de son sommet comme centre, avec cette unité pour rayon ; alors l'unité de longueur resterait arbitraire ; mais dès qu'elle aurait été choisie, l'unité d'angle serait par là même déterminée, et les angles seraient exprimés en nombres en même temps que les longueurs. C'est ce que l'on fait fréquemment ; très souvent on mesure un angle par l'arc qui lui correspond dans le cercle dont le rayon est l'unité. L'unité d'angle est alors l'angle auquel correspond un arc de longueur égale à celle du rayon. La relation $p = \psi$ (A, B, C) de Legendre n'a donc rien d'absurde à priori, et sa démonstration est fausse.

Il faut d'ailleurs observer que le calcul peut servir à déterminer une grandeur sans qu'il soit nécessaire de rapporter celle-ci à une unité de son espèce et de l'exprimer en nombre. Il suffit que l'on trouve une grandeur de nature différente, mais telle que la grandeur cherchée en dépende ; alors celle-ci peut se déduire de la première, tirée d'une relation où elle est liée à d'autres de son espèce ; c'est ainsi qu'au lieu de faire entrer les angles directement dans les formules, on y introduit souvent leurs lignes trigonométriques ; on ne peut donc pas dire à priori qu'au lieu de la relation $p = \psi$ (A, B, C) on ne devrait pas en avoir une autre de la forme $p = \psi\,[f_1(A), f_2(B), f_3(C)]$, ($f_1(A), f_2(B), f_3(C)$ étant des lignes trigonométriques des angles A, B, C) ; une telle relation ne contiendrait rien d'impossible. Par exemple, quand les trois côtés servent à déterminer l'angle C, on a

$$\cos C = R\,\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

relation qui ne contient rien d'absurde, parce que l'unité de longueur sert à calculer cos C, lequel à son tour entraine la connaissance de l'angle C, sans qu'il faille pour cela exprimer celui-ci en nombre.

155. Voici une autre démonstration que Legendre considérait comme irréprochable :

Soit ABC (fig. 27) le triangle proposé, dans lequel AB représente le

plus grand côté, BC le plus petit, et AC le côté moyen qui peut accidentellement être égal à l'un des deux autres. Par le point A et par le point I, milieu du côté opposé BC, menez la droite AI que vous prolongerez en C′ jusqu'à ce que $AC' = AB$; prolongez de même AB en B′ jusqu'à ce que AB′ soit double de AI, et joignez C′B′.

Les angles du triangle ABC étant désignés suivant l'ordre de leur grandeur par A, B, C, si l'on désigne semblablement par A′, B′, C′, les angles du triangle A′B′C′ (le point A étant le même que A′), je dis qu'on aura l'angle $C' = B + C$ et l'angle $A = A' + B'$.

Pour le prouver faites $AK = AI$, et joignez C′K; vous aurez le triangle AC′K égal au triangle ABI. Car dans ces deux triangles l'angle commun A est compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir $AC' = AB$ et $AK = AI$. Donc le troisième côté C′K est égal au troisième côté BI; donc aussi l'angle $AC'K = ABI$, et l'angle $AKC' = AIB$.

Je dis maintenant que le triangle B′C′K est égal au triangle ACI; car la somme des deux angles adjacents $AKC' + C'KB'$ est égale à deux angles droits, ainsi que la somme des deux angles $AIB + AIC$; retranchant de part et d'autre les angles égaux AKC′, AIB, il restera l'angle $C'KB' = AIC$. Ces angles, dans les deux triangles, sont compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir :

$$C'K = BI = CI \quad \text{et} \quad KB' = AK = AI.$$

Donc les deux triangles B′C′K, ACI sont égaux; donc le côté $B'C' = AC$, l'angle $B'C'K = ACB$ et l'angle $KB'C' = IAC$.

Il suit de là 1° que l'angle AC′B′ désigné par C′ est composé de deux angles égaux respectivement aux angles B et C du triangle ABC, et qu'ainsi on a $C' = B + C$; 2° que l'angle A du triangle ABC, est composé de l'angle A′ ou C′AB′ et de l'angle CAI, égal à l'angle B′ ou C′B′K, ce qui donne $A = A' + B'$.

Donc, on a

$$A + B + C = A' + B' + C';$$

c'est-à-dire que la somme des angles est la même dans le triangle A′B′C′ que dans le triangle ABC.

D'ailleurs, puisqu'on a, par hypothèse, $AC \leq AB$ et par conséquent $C'B' \leq A'C'$, on voit que dans le triangle A′B′C′ on a $A' \leq B'$; d'où $A' \leq \frac{A}{2}$ et $B' < A$. En outre, de $C' = B + C$ et $A \leq C$ on déduit $B' < A < C'$; donc dans le triangle A′B′C′ on a nécessairement $A'C' < A'B'$.

Si on applique la même construction au triangle $A'B'C'$ pour en former un troisième $A_2B_2C_2$, on aura les égalités

$$C_2 = B' + C', \quad A' = B_2 + A_2;$$

d'où il résulte que

$$A_2 + B_2 + C_2 = A' + B' + C'.$$

Donc la somme des trois angles est la même dans les trois triangles; en outre, à cause de $A'C' < A'B'$, on aura ici $C_2B_2 < A_2C_2$; d'où $A_2 < B_2$ et, par conséquent,

$$A_2 < \frac{A'}{2} \text{ et } B_2 < A'; \text{ ou } A_2 < \frac{A}{4} \text{ et } B_2 < \frac{A}{2}.$$

Continuant indéfiniment la suite des triangles $A'B'C'$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, etc., on parviendra à un triangle $A_nB_nC_n$, dans lequel la somme des angles sera la même que dans le triangle proposé ABC, et qui aura l'angle $A_n < \frac{A}{2^n}$ et l'angle $B_n < \frac{A}{2^{n-1}}$.

On peut supposer que n soit assez grand pour que les deux derniers angles, exprimés par $\frac{A}{2^n}$ et $\frac{A}{2^{n-1}}$ soient plus petits que tout angle donné, et ainsi puissent être considérés comme nuls. Alors la somme des angles du triangle $A_nB_nC_n$ se réduira au seul angle C_n.

Si on considère maintenant le triangle *abc* (fig. 28) dont les deux angles *a* et *b* sont très petits, tant que ces angles ne sont pas nuls, au troisième angle *abc* on devra joindre l'angle extérieur *bcd*, pour que la somme fasse deux angles droits; mais si l'on suppose que les deux angles *a* et *b* diminuent de plus en plus, les côtés *ac* et *bc* tournant autour de leurs sommets *a* et *b* pour se rapprocher continuellement du côté immobile *ab*, on voit que lorsque ces angles deviendront tout à fait nuls, les deux droites *acd* et *bc* se confondront avec la droite *ab*; en même temps l'angle extérieur *bcd* deviendra nul, et par conséquent l'angle *acb*, dont les côtés *ac*, *cb* se placeront bout à bout sur la ligne droite *ab*, sera égal à deux angles droits.

Ce que nous venons de dire du triangle *abc*, lorsque les angles *a* et *b* seront diminués progressivement jusqu'à devenir nuls, s'applique au triangle transformé $A_nB_nC_n$, lorsque le nombre n des termes de la suite $A'B'C'$, $A_2B_2C_2$, ... $A_nB_nC_n$ sera assez grand pour que les angles A_n et B_n deviennent plus petits que tout angle donné. Alors la somme des angles du dernier triangle $A_nB_nC_n$ se réduira au seul angle C_n et, par conséquent,

sera égale à deux angles droits. Donc la somme des angles d'un triangle quelconque représenté par ABC est égale à deux angles droits.

Cette démonstration, dit Legendre, a l'avantage d'être rigoureuse, et de n'exiger aucun postulatum, avantage qu'on n'a trouvé jusqu'ici dans aucun des livres élémentaires publiés depuis Euclide, c'est-à-dire depuis près de deux mille ans.

Il est aisé pourtant de reconnaître qu'elle est incomplète. On voit bien que les angles A_n et B_n du triangle $A_nB_nC_n$ convergent simultanément vers zéro ; s'il était démontré que l'angle extérieur, $2^{dr} - C_n$, converge en même temps vers zéro, il serait établi que dans ce triangle la somme des trois angles vaut deux droits à la limite, et par conséquent aussi dans le triangle ABC, puisque la somme des trois angles est la même dans tous les triangles. Alors, en effet, chacun des trois angles A_n, B_n, $2^{dr} - C_n$, tendant vers zéro, la différence

$$A_n + B_n - (2^{dr} - C_n)$$

aurait pour limite zéro ; d'où

$$\lim.(A_n + B_n + C_n) = 2^{dr}.$$

Mais ce point important n'est pas établi dans la démonstration. On voit, il est vrai, dans la figure, que l'angle extérieur C_n diminue, et on aperçoit bien qu'il peut devenir moindre que toute grandeur assignable ; mais admettre ce point sans démonstration, revient à accepter le postulatum d'Euclide (voir à ce sujet le n° 166).

Si, pour échapper à cette difficulté, on considère, comme Legendre, un triangle abc dont deux côtés tournent autour des deux sommets fixes a et b, on se place dans des conditions toutes différentes de celles du triangle $A_nB_nC_n$. Dans celui-ci le sommet B_n s'éloigne de plus en plus de A_n; le côté A_nB_n croît indéfiniment ; et, par conséquent, on ne peut passer d'une manière continue du système variable abc, dans lequel deux sommets sont fixes, au système variable $A_nB_nC_n$, ce qui serait indispensable pour que la démonstration fût rigoureuse.

A la vérité on pourrait, tout en simplifiant la démonstration, rendre fixes les deux sommets A et B par une construction analogue à celle du n° 148, 8°. Le triangle ABC serait alors remplacé par ABF dans lequel la somme des angles resterait la même ; en effectuant la même construction sur ce dernier et continuant ainsi, on aurait une série de triangles dont les angles en A et C tendraient vers zéro, les deux

sommets A et B restant fixes; mais on ne saurait prouver qu'alors l'angle extérieur dont le sommet reste fixe en B, tend vers zéro.

156. Autre démonstration du postulatum d'Euclide : Soient AD, BE, CF les prolongements des trois côtés CA, AB, BC du triangle ABC. Faisons tourner AD autour de A jusqu'à coïncidence avec AB ; puis faisons glisser cette droite AD sur elle-même jusqu'à ce qu'elle vienne en BE ; faisons-la ensuite tourner autour de B et glisser sur BC de manière à l'amener en CF; enfin faisons-la tourner autour de C et glisser sur CA, de manière à la ramener à sa position primitive AD ; la droite aura alors tourné en tout de quatre angles droits ; donc la somme des angles extérieurs DAE + EBC + FCA, qui est la somme de ceux dont elle a tourné, vaut quatre droits. Mais

$$\mathrm{DAE} + \mathrm{BAC} = 2^{\mathrm{dr}}; \quad \mathrm{EBC} + \mathrm{CBA} = 2^{\mathrm{dr}}; \quad \mathrm{FCA} + \mathrm{BCA} = 2^{\mathrm{dr}};$$

donc $\Sigma\mathrm{ABC} = 2^{\mathrm{dr}}$.

Cette démonstration repose sur un postulatum; car, s'il est évident que la droite AD, tournant autour du point A jusqu'à ce qu'elle revienne à sa position primitive, décrit quatre angles droits, il n'est pas évident que quand la rotation a lieu successivement autour des sommets A, B, C, la somme des angles dont la droite tourne autour de ces trois points est la même. La démonstration suppose gratuitement qu'en faisant l'angle BAG = EBF, l'on a aussi FCA = GAD.

157. *Démonstration fondée sur la considération des espaces infinis compris entre les côtés du triangle.* Soit ABC le triangle proposé ; prolongez le côté CA vers D, le côté AB vers E et le côté BC vers F. L'aire entière du plan se compose visiblement de l'aire comprise par l'angle EBF, de l'aire comprise par l'angle FCD, de celle comprise par l'angle DAE, enfin de l'aire du triangle ABC. Cette dernière aire, qui est une quantité finie, disparaît devant l'aire entière du plan qui est un infini du second ordre ; ainsi nous n'en tiendrons pas compte. Il reste donc les trois aires comprises par les angles extérieurs DAE, EBF, FCD, dont la somme doit être égale à l'aire comprise par quatre angles droits ... ; donc etc.

Cette démonstration manque évidemment de rigueur.

158. Citons encore une démonstration de M. Carton, qui a paru en 1869 dans les Comptes Rendus des séances de l'Acad. des Sc. de Paris,

et qui, après avoir été l'objet d'un rapport favorable, a soulevé une objection qui ne saurait être réfutée sans le secours d'un postulatum (*).

Une démonstration fondée sur les mêmes principes que celle de M. Carton se trouve dans les *Nouvelles ann. de Math.* t. VIII, 1849, et est réfutée dans le t. IX, 1850.

159. *Géométrie imaginaire ou non Euclidienne.* — Un savant géomètre russe, Lobatschewsky, de Kazan, s'est demandé ce que deviendrait la géométrie si, le postulatum d'Euclide étant inexact, la somme des trois angles d'un triangle était différente de deux droits; il est arrivé à un ensemble de théorèmes qui semblent étranges à celui qui n'a appris la géométrie qu'en partant du postulatum d'Euclide, et qui constituent une géométrie nouvelle, appelée *géométrie imaginaire* ou *non euclidienne*. Cette géométrie a été aussi étudiée par l'officier hongrois Jean Bolyai. Dans sa correspondance avec Schumacher, Gauss a donné son adhésion aux recherches de Lobatschewsky, déclarant que lui-même était en possession depuis longtemps des principaux théorèmes de la géométrie nouvelle. L'étude en est d'un grand secours pour découvrir les vices de quelques prétendues démonstrations du postulatum d'Euclide et puise d'ailleurs un vif intérêt dans les recherches ultérieures d'un géomètre italien, M. Beltrami. Nous tâcherons de donner ici une idée des fondements de la géométrie imaginaire; pour plus de détails nous renverrons à l'ouvrage de Lobatschewsky(**).

160. *Définition du parallélisme.* — Toutes les droites tracées par un même point dans un plan peuvent se distribuer, par rapport à une droite située dans ce plan, en deux classes, savoir : en droites qui coupent la droite donnée et en droites qui ne la coupent pas. La droite qui forme la limite commune de ces deux classes, est dite *parallèle* à la droite donnée.

Soit abaissée du point A, sur la droite BC (fig. 30), la perpendiculaire AD, et soit élevée au point A, sur la droite AD, la perpendiculaire AE. Dans l'angle droit EAD, il arrivera que toutes les droites partant du point A rencontreront la droite DC, comme le fait AF; ou bien quelques-unes d'entre elles, comme la perpendiculaire AE, ne rencon-

(*) Voir : *Comptes-Rendus*, 1869, 2e sem. et 1870, 1er sem.

(**) Voir : *Études sur la théorie des parallèles*, trad. de l'Allemand par J. Houël.

treront pas DC. Dans l'incertitude si AE est la seule droite qui ne rencontre pas DC, nous admettrons la possibilité qu'il en existe encore d'autres, telles que AG. En passant des lignes AF, qui coupent CD, aux lignes AG, qui ne la coupent pas, on trouvera nécessairement une ligne AH, parallèle à DC, c'est-à-dire une ligne d'un côté de laquelle les lignes AG ne rencontrent pas CD, tandis que, de l'autre côté, toutes les lignes AF rencontrent CD. L'angle HAD compris entre la parallèle HA et la perpendiculaire AD sera dit l'*angle de parallélisme*, et nous le désignerons par $\Pi(p)$, p représentant la distance AD.

Si $\Pi(p)$ est un angle droit AE est parallèle à DC et AE′, prolongement de AE sera également parallèle au prolongement DB de la droite DC; et nous ferons remarquer, à ce propos, que par rapport aux quatre angles formés au point A par les perpendiculaires AE, AD et leurs prolongements AE′, AD′, toute droite partant du point A, est comprise, soit par elle-même, soit par son prolongement, dans un des deux angles droits dirigés vers BC; de sorte qu'à l'exception de la seule parallèle EE′, toutes ces droites, prolongées suffisamment dans les deux sens, devront couper la droite BC.

Si l'on a $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, alors, de l'autre côté de AD, il y aura une droite AK, faisant avec AD le même angle $DAK = \Pi(p)$, laquelle sera parallèle au prolongement DB de la ligne DC; de sorte que, dans cette hypothèse, il faut distinguer encore *le sens du parallélisme*. Toutes les autres droites comprises dans l'intérieur des deux angles droits dirigés vers BC, appartiennent aux droites *sécantes*, lorsqu'elles sont situées dans l'angle $HAK = 2\Pi(p)$ des deux parallèles; elles appartiennent, au contraire, aux droites *non sécantes* telles que AG, lorsqu'elles sont situées de l'autre côté des parallèles AH, AK, à l'intérieur de l'un des deux angles

$$E'AK = EAH = \frac{\pi}{2} - \Pi(p),$$

entre les parallèles et la droite EE′. De l'autre côté de EE′, les prolongements AH′, AK′, des parallèles AH, AK, seront également parallèles à BC. Parmi les autres droites, celles qui sont dans l'angle K′AH′ appartiennent aux droites sécantes, celles qui sont dans les angles K′AE, H′AE′, aux droites non sécantes.

D'après cela, si l'on suppose $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$, les droites ne pourront être

que sécantes ou parallèles. Mais, si l'on admet que $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, on devra considérer alors deux parallèles, l'une d'un côté de AD, l'autre du côté opposé; de plus, les autres droites devront se distinguer en non sécantes et en sécantes. Dans les deux hypothèses, le caractère du parallélisme est que la ligne devient sécante par la moindre déviation vers le côté où est située la parallèle; de sorte que, si AH est parallèle à DC, toute ligne AF, faisant, du côté de DC, un angle HAF aussi petit que l'on voudra avec AH, coupera nécessairement DC.

Partant de là Lobatschewsky démontre entre autres les théorèmes suivants :

161. *Une ligne droite conserve le caractère du parallélisme en tous ses points.* — Soit AB (fig. 31) une droite menée par le point A parallèlement à CD et soit AC la perpendiculaire à CD. Considérons d'abord un point E pris à volonté sur celle des directions de AB qui est considérée comme parallèle à CD, et abaissons sur cette dernière droite la perpendiculaire EK; par le point E menons ensuite dans l'angle BEK une droite EF faisant avec EB un angle BEF aussi petit qu'on voudra. Pour prouver que EB est parallèle en E à CD, il suffit de faire voir que EF rencontre nécessairement CD. A cet effet, joignons AF; cette droite coupera CD quelque part en G, puisque AB est la parallèle à CD menée par le point A. Nous obtiendrons donc ainsi un triangle ACG à l'intérieur duquel pénétrera la ligne FH. Cette dernière ligne ne peut rencontrer AG en un autre point que F, ni EK en un autre point que E. Elle ne peut donc non plus rencontrer le prolongement de AC; donc pour sortir du triangle ACG elle coupera nécessairement CD quelque part en H. Donc AB est la parallèle à CD au point E.

Soit maintenant E′ un point sur le prolongement de AB, et E′K′ la perpendiculaire abaissée sur le prolongement de DC. Menons la ligne E′F′ faisant avec AE un angle AE′F′ assez petit pour couper AC quelque part en F′. Tirons du point A la ligne AF, faisant avec AB un angle égal à AE′F′, et dont le prolongement coupera CD quelque part en G, puisque AB est parallèle à CD. On formera ainsi un triangle AGC, dans lequel pénétrera le prolongement de la ligne E′F′. Or cette ligne ne peut rencontrer une seconde fois AC; elle ne peut pas couper AG, puisque l'angle BAG = BE′G′. Il faudra donc qu'elle rencontre CD quelque part en G′. Donc, quelque petit que soit l'angle AE′F′,

la droite E'F' rencontre CD ; la droite AB est donc parallèle à CD au point E'.

Donc si d'un point quelconque de AB on mène une parallèle à CD, cette parallèle ne sera autre que la droite AB elle-même. C. Q. F. D.

162. *Deux droites sont toujours réciproquement parallèles.* — Soit AB une parallèle à CD (fig. 32); je dis que CD sera parallèle à AB. En effet, abaissons AC perpendiculaire sur CD. Par le point C menons la droite CE faisant avec CD un angle aigu quelconque ECD ; il faut démontrer que CE rencontre AB.

Abaissons du point A sur CE, la perpendiculaire AF. Nous formerons ainsi un triangle rectangle ACF, dont l'hypoténuse AC sera plus grande que le côté AF de l'angle droit. Prenons AG = AF et plaçons AF sur AG; AB et FE prendront les positions AK et GH, et l'on aura l'angle BAF = LAG. Puisque AB est parallèle à CD, la droite AK coupera CD quelque part en K, et il en résultera un triangle AKC, dans lequel la perpendiculaire GH rencontrera la ligne AK en L. Plaçons maintenant le côté AG du triangle AGL sur AF, de manière que GL tombe sur FE et AL sur AB. Le point L, devant alors se trouver à la fois sur AB et sur CE, sera le point de rencontre de ces droites. Donc CE coupera AB.

C. Q. F. D.

163. *Dans un triangle rectiligne, la somme des trois angles ne peut surpasser deux droits.*

Et si dans un triangle quelconque la somme des trois angles est égale à deux angles droits, il en sera de même pour tout autre triangle.

Les démonstrations de ces propositions, données par Lobatschewsky, sont différentes de celles de Legendre ; mais nous croyons inutile d'y revenir.

164. *Par un point donné on peut toujours mener une droite qui fasse avec une droite donnée un angle aussi petit que l'on voudra.*

Abaissons du point donné A (fig. 33), sur la droite donnée BC, la perpendiculaire AB ; prenons à volonté sur BC un point D ; joignons AD ; faisons DE = AD et menons AE. Dans le triangle rectangle ABD, soit l'angle ADB = α ; soit aussi l'angle

$$EAD = AED = \beta.$$

On a

$$\Sigma ADE = (\pi - \alpha) + 2\beta;$$

et puisque cette somme ne peut surpasser deux droits, on a

$$2\beta - \alpha \leqq 0,$$

et, par conséquent, l'angle β sera égal à $\frac{\alpha}{2}$ ou plus petit que $\frac{\alpha}{2}\cdot$ Prenons maintenant EC = AE et joignons AC. On prouvera comme ci-dessus que l'angle ACE sera au plus égal à $\frac{\beta}{2}$ et, par suite, au plus égal à $\frac{\alpha}{4}\cdot$ En continuant ainsi on aura donc des angles $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ dont chacun est égal tout au plus à la moitié du précédent, et, par conséquent, on pourra trouver une droite AK faisant avec BE un angle moindre que tout angle donné.

165. *Si deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles, la somme des angles de tout triangle rectiligne est égale à deux droits.*

Soient les droites AB, CD (fig. 34), parallèles entre elles et perpendiculaires sur AC. Menons du point A les droites AE, AF, aux points E, F, pris sur la droite CD à des distances quelconques (FC > EC) du point C. En supposant que la somme des trois angles soit égale à $\pi - \alpha$ dans le triangle rectangle ACE, et à $\pi - \beta$ dans le triangle AEF, elle devra être égale, dans le triangle ACF, à $\pi - \alpha - \beta$. Car,

$$\Sigma ACF = \Sigma ACE + \Sigma AEF - \pi = \pi - \alpha - \beta.$$

Soient de plus les angles BAF = a, AFC = b; on aura $\alpha + \beta = a - b$. En effet, on a

$$a - b = \frac{\pi}{2} - CAF - b = \frac{\pi}{2} - \left(\Sigma ACF - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - \Sigma ACF = \alpha + \beta.$$

Si l'on écarte maintenant la ligne AF de la perpendiculaire AC, on pourra rendre aussi petit qu'on le voudra l'angle a, compris entre AF et AB parallèle à CD; on pourra de même diminuer l'angle b indéfiniment (164). Par conséquent, $\alpha + \beta$ peut devenir aussi petit qu'on le veut; l'angle α ayant d'ailleurs une valeur constante, cette valeur ne peut être autre que zéro. Si AB et CD sont parallèles, la somme des angles du triangle ACE est donc égale à deux droits.

D'après cela il faut que, dans tous les triangles rectilignes, la somme des trois angles soit égale à deux droits, et qu'en même temps l'angle du parallélisme $\Pi(p) = \frac{\pi}{2}$, quelle que soit la distance p; ou bien il faut que, dans tous les triangles, la somme des angles soit moindre que deux droits, et qu'on ait en même temps $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$.

La première hypothèse sert de fondement à *la géométrie ordinaire* et à la *trigonométrie plane*. La seconde hypothèse peut également être admise sans conduire à aucune contradiction dans les résultats, et elle sert de base à la *géométrie imaginaire* ou *non euclidienne*.

166. *Étant donné un angle aigu quelconque α, on peut toujours, dans l'hypothèse non euclidienne, trouver une distance p telle que l'on ait* $\Pi(p) = \alpha$.

Soient AB et AC (fig. 35) les deux droites formant à leur intersection l'angle aigu α. Prenons à volonté sur AB un point B'; de ce point abaissons B'A' perpendiculaire sur AC; faisons A'A'' = AA'; élevons en A'' la perpendiculaire A''B'', et continuons ainsi; nous devrons arriver à une perpendiculaire qui ne rencontre plus AB; car si la somme des trois angles du triangle AA'B' est égale à $\pi - a$, celle des angles du triangle AB'A'', sera égale à $\pi - 2a$; dans le triangle AA''B'' la somme des angles sera moindre que $\pi - 2a$. On pourra continuer ainsi tant que les perpendiculaires rencontreront AB, et on aura des triangles dans lesquels la somme des angles deviendra successivement plus petite que $\pi - 2a$, $\pi - 4a$, ..., $\pi - 2^n a$. Il est donc évident qu'en prenant n assez grand on trouvera une perpendiculaire qui ne coupera pas AB, parce que, autrement, cette perpendiculaire formerait avec AB et AC un triangle dans lequel la somme des trois angles, $\pi - 2^n a$, serait négative. Cette perpendiculaire CD pourrait être celle-là même qui forme la limite entre les perpendiculaires plus voisines du point A, qui rencontrent AB, et les perpendiculaires plus éloignées qui ne la rencontrent pas. Dans tous les cas il doit exister quelque part en FG une telle perpendiculaire limite; et l'on prouvera facilement que FG est la parallèle à AB. Car, quelque petit que soit l'angle GFH, la perpendiculaire HK abaissée d'un point H de l'oblique FH sur AC, coupe AB au point B; donc FH prolongée rencontre AB en M; la droite AB est donc parallèle à FG, et si l'on fait $AF = p$, on aura $\Pi(p) = \alpha$.

Si p tend vers zéro, α tend vers $\frac{\pi}{2}$; car AB, parallèle à FG, tombe entre FG et AL perpendiculaire à AF. Or, quand p décroît jusqu'à zéro, FG et par conséquent aussi AB, finissent par coïncider avec AL. Donc, l'angle BAF croît jusqu'à $\frac{\pi}{2}$ quand p décroît jusqu'à zéro. Au contraire, quand p augmente, l'angle α diminue et tend vers zéro, à mesure que p tend vers l'infini.

On voit encore par là que *dans la géométrie non euclidienne il ne peut y avoir de similitude sans égalité.* Les deux triangles AA'B', AA''B'', par exemple, ne peuvent être semblables; en effet, si un angle d'un triangle est égal à un angle d'un autre triangle et qu'on superpose les angles égaux B'AA', B''AA'', on prouvera aisément, en joignant B'A'', que la somme des angles du triangle B''AA'' est moindre que celle des angles du triangle B'AA'; ces triangles ne peuvent donc être équiangles.

Il est aisé de voir également que *dans la géométrie non euclidienne, on peut, en faisant croître indéfiniment les côtés d'un triangle, rendre chacun des trois angles aussi petit qu'on le voudra.*

En effet, si sur la droite AB perpendiculaire à CC' (fig. 36), on prend $AB = p$, et que l'on fasse les angles DBA, D'BA égaux à $\Pi(p)$, les droites BD, BD' seront respectivement parallèles à AC et AC'. Or on peut, dans chacun des angles DBA, D'BA, mener des sécantes BC, BC', faisant avec CC' des angles aussi petits qu'on voudra. On aura ainsi un triangle CBC' dans lequel les angles à la base C et C' peuvent devenir aussi petits qu'on le veut. D'autre part, si p tend vers l'infini, $DBA = \Pi(p)$ tend aussi vers zéro. Chacun des angles du triangle CBC' peut donc devenir moindre que tout angle donné.

On voit clairement par là où pèche la démonstration du n° 155. De ce que la somme des deux angles adjacents à la base indéfiniment croissante d'un triangle a pour limite zéro, celui qui n'admet pas le postulatum d'Euclide ne peut pas conclure que l'angle extérieur opposé a aussi pour limite zéro. En effet, quand les angles à la base du triangle CBC' décroissent indéfiniment, l'angle extérieur FBC' tend vers $2^{dr} - 2\Pi(p)$.

167. On démontre aussi que *lorsque deux parallèles sont prolongées de plus en plus dans le sens de leur parallélisme, leur distance va en*

diminuant, et finit par s'évanouir, de sorte que les droites parallèles présentent le caractère des asymptotes.

Que deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

Que dans un triangle les perpendiculaires élevées sur les côtés en leurs milieux, ne se rencontrent pas, ou se rencontrent en un même point.

Que ces perpendiculaires sont toutes les trois parallèles entre elles, toutes les fois que l'on en suppose deux parallèles.

Nous nous bornerons aux citations qui précèdent ; ajoutons cependant que Lobatschewsky établit les formules relatives aux triangles sphériques; d'où il résulte que la trigonométrie sphérique est indépendante de ce que dans un triangle la somme des trois angles est ou n'est pas égale à deux angles droits.

168. Plus récemment un géométre italien, M. Beltrami(*), a réussi à donner des bases réelles à la géométrie non euclidienne, en prouvant que tous les théorèmes auxquels Lobatschewsky est parvenu, s'appliquent aux figures formées par des lignes géodésiques tracées sur les surfaces à courbure constante négative, auxquelles on donne le nom de *surfaces pseudosphériques*(**). De sorte que la géométrie imaginaire ou non euclidienne, n'est réellement rien autre chose que la géométrie des surfaces pseudosphériques.

M. Beltrami fait remarquer d'abord que le critérium fondamental des démonstrations de la géométrie élémentaire consiste dans la *superposition des figures égales;* que ce critérium n'est pas seulement applicable au plan, mais aussi à toutes les surfaces dont une portion quelconque peut être appliquée par simple flexion, sur une autre portion quelconque de la surface elle-même ; la rigidité des surfaces sur lesquelles les figures sont tracées, n'est pas une condition essentielle de l'application de ce critérium ; par exemple, l'exactitude des démonstrations de la géométrie plane

---

(*) Voir *Annales scientifiques de l'École normale supérieure,* t. VI, 1869 : *Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne par* E. BELTRAMI, trad. de J. HOUËL.

(**) Si l'on construit la développante d'une chaînette de manière à placer le point de rebroussement de la développante au sommet de la développée, on obtient une courbe connue sous le nom de *tractrice,* laquelle a pour asymptote la directrice de la chaînette. Si l'on fait ensuite tourner la tractrice autour de son asymptote, on obtient une surface pseudosphérique.

euclidienne ne serait en rien altérée si l'on venait à concevoir les figures comme tracées sur une surface développable, au lieu de l'être sur un plan.

Les surfaces pour lesquelles se vérifie sans restriction la propriété dont il s'agit, sont, en vertu d'un théorème célèbre de Gauss, toutes celles qui ont en chacun de leurs points le produit de leurs deux rayons de courbure principaux constant, ou, en d'autres termes, toutes celles dont la mesure de la courbure est constante (*). Les autres surfaces n'admettent pas sans restriction l'application du principe de superposition pour la comparaison des figures qui y sont tracées, et, par suite, ces figures ne peuvent avoir une structure entièrement indépendante de leur position.

L'élément le plus essentiel des figures et des constructions de la géométrie, dit Beltrami, est la ligne droite. Le caractère spécifique de cette ligne est d'être complètement déterminée par deux de ses points

---

(*) Si l'on considère un élément de surface limité par une courbe fermée quelconque, on peut imaginer qu'on ait mené la normale en chaque point de cette courbe; ensuite, que l'on ait mené par le centre d'une sphère de rayon égal à l'unité, des rayons parallèles à ces normales; l'aire de la portion correspondante de la sphère est ce que Gauss appelle la *courbure totale* de la portion de surface que l'on considère. Et si, en un point quelconque d'une surface, nous divisons la courbure totale de l'élément superficiel adjacent au point, par l'aire de cet élément lui-même, le quotient est ce qu'on appelle *mesure de la courbure* en ce point.

Or on trouve que la mesure de la courbure a pour valeur $\frac{1}{RR'}$, en désignant par R et R' les deux rayons de courbure principaux de la surface au point considéré.

On démontre aussi que si on déforme une surface supposée flexible mais non extensible, de manière que la distance de deux points mesurée sur un arc quelconque tracé sur la surface reste la même, la mesure de la courbure en chaque point n'est pas altérée. De là cette notion que deux surfaces dont les points se correspondent deux à deux de manière que la mesure de la courbure soit la même en deux points correspondants, sont applicables l'une sur l'autre; et si la mesure de la courbure est constante en tous les points d'une surface, une portion quelconque de cette surface peut être appliquée sur toute autre portion de cette surface elle-même par simple flexion ; c'est ce qui a lieu pour la sphère, surface à courbure constante positive, et pour les surfaces pseudosphériques, qui ont une courbure constante négative.

Dans le cas particulier d'une surface développable la mesure de la courbure est nulle comme pour le plan, un des rayons de courbure principaux étant infini ; c'est pour ce motif qu'une surface développable peut, par flexion, être étendue sur un plan.

seulement; en sorte que deux droites ne peuvent passer par deux points donnés de l'espace sans coïncider dans toute leur étendue. Cependant, dans la géométrie plane, ce caractère n'est pas employé dans toute son extension, puisque, en regardant les choses de près, on voit que la droite n'est introduite dans les considérations de la planimétrie qu'en vertu du postulat suivant : En faisant coïncider deux plans, sur chacun desquels il existe une droite, il suffit que les deux droites se superposent en deux points pour qu'elles se confondent dans toute leur étendue.

Or, ce caractère, ainsi limité, n'est pas particulier aux lignes droites par rapport au plan ; il subsiste encore (en général) pour les lignes géodésiques d'une surface de courbure constante, par rapport à ces surfaces. Une ligne géodésique a déjà sur une surface quelconque la propriété d'être (généralement parlant) déterminée sans ambiguïté par deux de ses points. Mais pour les surfaces de courbure constante, et pour elles seules, subsiste intégralement la propriété analogue à celle de la droite dans le plan, c'est-à-dire que : Si l'on a deux surfaces dont la courbure soit constante en chaque point, et égale pour les deux surfaces, et si sur chacune d'elles existe une ligne géodésique, en faisant coïncider les deux surfaces de manière que les lignes géodésiques aient deux points communs, ces lignes coïncideront (généralement) dans toute leur étendue.

Il suit de là que, sauf les cas dans lesquels cette propriété est sujette à des exceptions, les théorèmes que la planimétrie démontre, au moyen du principe de superposition et du postulat de la droite, pour les figures formées sur le plan, subsistent également pour les figures formées d'une manière analogue sur une surface de courbure constante par des lignes géodésiques.

C'est sur cela que sont fondées les analogies multiples de la géométrie de la sphère avec celle du plan, les droites de celui-ci correspondant aux lignes géodésiques, c'est-à-dire aux grands cercles de celle-là, et ces analogies ont été depuis longtemps déjà remarquées par les géomètres. Si d'autres analogies, d'espèce différente, mais de même origine, n'ont pas été pareillement remarquées tout d'abord, il faut l'attribuer à ce que la notion des surfaces flexibles et applicables les unes sur les autres n'est devenue familière que dans ces derniers temps.

Il vient d'être fait allusion à des exceptions qui peuvent détruire ou restreindre l'analogie en question. Ces exceptions existent réellement;

sur la surface sphérique, par exemple, deux points cessent de déterminer un grand cercle sans ambiguïté, quand ils sont diamétralement opposés. C'est pour cette raison que certains théorèmes de la planimétrie n'ont pas leurs analogues sur la sphère ; tel est le suivant : deux droites perpendiculaires à une troisième ne peuvent se rencontrer.

Les résultats des démonstrations de la planimétrie ne subsistent donc sans restriction que pour celles des surfaces à courbure constante dans lesquelles aucune exception n'a lieu aux hypothèses de ces démonstrations ; à savoir : celle qu'une partie quelconque de la surface supposée flexible soit applicable sur une autre partie quelconque de cette surface, et celle que deux points déterminent complètement une ligne géodésique, de sorte que deux de ces lignes qui ne coïncident pas ne peuvent avoir qu'un point commun et s'étendent toutes deux à l'infini de part et d'autre de ce point.

La première de ces hypothèses, relative au principe de superposition, ne souffre d'exception pour aucune des surfaces à courbure constante ; la seconde rencontre des exceptions sur la sphère, c'est-à-dire sur les surfaces de courbure constante positive ; mais M. Beltrami a prouvé que sur les surfaces à courbure constante négative, ou surfaces pseudosphériques, de telles exceptions ne sont pas possibles ; il devient donc évident que les théorèmes de la planimétrie non euclidienne subsistent sans restriction pour toutes ces surfaces. Alors certains résultats qui semblaient incompatibles avec l'hypothèse du plan peuvent devenir conciliables avec celle d'une surface de l'espèce en question, et recevoir par là une explication non moins simple que satisfaisante ; ainsi, par exemple, M. Beltrami a prouvé que sur ces surfaces la somme des angles d'un triangle géodésique est moindre que deux droits, et que l'aire de ce triangle est proportionnelle à l'excès de deux angles droits sur cette somme ; que si ab et cd sont deux lignes géodésiques perpendiculaires à une troisième ca (fig. 37), on peut mener par le point c deux lignes géodésiques cm, cm' faisant des angles égaux avec cd, cd', et ayant le caractère d'asymptotes relativement à ab, ab' ; de sorte que toutes celles qui sont contenues dans les angles mcn et $m'cn'$ sont non sécantes par rapport à bab'. En un mot, tous les théorèmes de la géométrie non euclidienne ne sont que des théorèmes relatifs à la géométrie des lignes géodésiques des surfaces pseudosphériques.

Il est donc prouvé qu'il est impossible de démontrer le postulatum

d'Euclide en faisant usage uniquement du principe de la superposition des surfaces, et de la propriété de la droite d'être entièrement déterminée par deux points. En effet, comme le fait observer M. Beltrami, les conséquences d'une démonstration embrassent nécessairement la catégorie entière des êtres dans lesquels existent toutes les conditions nécessaires pour sa légitimité. Or, si l'on veut trouver la somme des angles d'un triangle rectiligne, et si l'on n'introduit dans la démonstration que le principe de la superposition et le postulat de la coïncidence de deux droites qui ont deux points communs dans les plans superposés, l'on n'aura réellement pas introduit les déterminations qui particularisent la catégorie des triangles rectilignes vis-à-vis d'une catégorie plus étendue, à savoir celle des triangles géodésiques tracés sur les surfaces pseudosphériques. Les conditions admises, et seules nécessaires pour la légitimité de la démonstration, existent dans les derniers triangles. Les conséquences de la démonstration doivent donc s'étendre à eux. Tant que l'on ne pourra introduire la condition de rigidité du plan, la surface sur laquelle on raisonne pourra être aussi bien pseudosphérique que plane; et l'on devra arriver à la conclusion que pour tous les triangles tracés sur cette surface la somme des angles est égale à deux droits; ou bien qu'elle est pour tous plus petite que deux droits; une condition nouvelle, impliquant la rigidité du plan, permettrait seule d'écarter la seconde hypothèse.

Les principes sur lesquels on a voulu jusqu'ici fonder la démonstration du postulatum d'Euclide sont donc insuffisants, et il est au moins très probable que l'on ne parviendra pas à en découvrir d'autres qui rendent la démonstration possible. Toutefois cette impossibilité ne nuit en rien à la certitude mathématique, et il faut éviter d'en parler aux commençants en termes qui puissent leur faire croire que la géométrie ne repose pas sur des bases inattaquables.

169. *Géométrie doublement abstraite ou riemannienne.* — Dans ce qui précède il a été fait allusion aux nombreuses analogies que la géométrie de la sphère présente avec celle du plan. C'est de ces analogies que dérive un système de géométrie connu sous le nom de géométrie doublement abstraite ou riemannienne.

En se fondant sur la considération de l'élément linéaire, d'où résulte par intégration la longueur d'une ligne finie, Riemann est arrivé à la

conclusion qu'en dehors de la géométrie usuelle deux autres géométries sont possibles. L'une est la géométrie de Lobatchewski ; l'autre est celle de Riemann, qui correspond à la géométrie de la sphère.

Cette simple indication montre que Riemann s'est fondé sur des considérations qui sortent complètement du cadre des éléments ; néanmoins nous croyons devoir dire ici quelques mots de la géométrie doublement abstraite parce que le célèbre mémoire de Riemann a appelé l'attention des géomètres sur les rapports intimes qui existent entre la géométrie usuelle et les deux autres systèmes de géométrie.

Parmi les axiomes sur lesquels est fondée la géométrie d'Euclide, se trouvent les deux suivants :

1° Deux droites ne peuvent entourer un espace.

2° Si deux droites sont rencontrées par une troisième, qui forme avec elles deux angles intérieurs d'un même côté dont la somme soit moindre que deux droits, ces deux droites prolongées indéfiniment, finiront par se rencontrer du côté où elles forment ces angles.

Quand on rejette le second de ces axiomes on est conduit aux théorèmes de Lobatchewsky ; si on écarte en outre le premier on trouve les théorèmes de la géométrie doublement abstraite. Dans celle-ci la distance de deux points de l'espace ne peut dépasser un maximum, et la ligne droite est une ligne rentrante en elle-même. Deux droites se coupent dans un plan en deux points que l'on dit opposés, de même que deux grands cercles sur la sphère.

On peut déduire de là que dans tout triangle riemannien la somme des trois angles est plus grande que deux droits (*), tandis qu'elle est égale à deux droits dans le triangle euclidien et moindre que deux droits dans le triangle lobatchewskien.

On démontre aussi que les trois côtés a, b, c sont liés à l'angle A d'un triangle par la formule

$$ch\frac{a}{k} = ch\frac{b}{k}\cdot ch\frac{c}{k} - sh\frac{b}{k}\cdot sh\frac{c}{k}\cdot \cos A \text{ (**)}$$

(*) Voir la démonstration donnée par M. DE TILLY dans *Mathesis*, août-septembre, 1894.

(**) On trouvera une démonstration assez simple de cette formule, par M. GÉRARD, dans les *Nouvelles annales de Mathématiques*, février 1893, p. 74 et suiv.

dans le système de Lobatchewsky ; et par la formule

$$\cos\frac{a}{k} = \cos\frac{b}{k}\cdot\cos\frac{c}{k} + \sin\frac{b}{k}\cdot\sin\frac{c}{k}\cdot\cos A \text{ (*)}$$

dans le système de Riemann.

Cette dernière formule est la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, ce qui prouve que, conformément à une assertion célèbre de Lagrange, cette trigonométrie est indépendante du postulatum d'Euclide.

170. *Géométrie générale.* — On a désigné sous le nom de Métagéométrie ou géométrie générale, l'ensemble des propositions relatives aux divers systèmes de géométrie qu'il est possible de concevoir. Elle comprend des théories très élevées qui dépendent tout à la fois de la géométrie et de l'analyse et qui ont fait faire à ces deux sciences de grands progrès.

Il existe entre les intervalles des couples de points situés dans l'espace des relations d'une importance telle que M. de Tilly s'est proposé, dans un mémoire très remarquable, de faire découler les trois systèmes de géométrie de la seule notion de la distance de deux points. Il s'est demandé si les calculs de la géométrie analytique ne pourraient pas remplacer avantageusement certains raisonnements de la géométrie ordinaire et ne permettraient pas de supprimer des postulats relatifs à la droite et au plan.

« Malheureusement », dit-il, « le point de départ, c'est-à-dire la définition des coordonnées et l'équation de la droite, s'appuyait sur la géométrie ordinaire et il y avait donc cercle vicieux. Mais la relation analytique, indépendante de l'expérience, que nous possédons entre les intervalles des points, va nous permettre d'arriver aux équations de la ligne droite, du plan, etc., et par suite de pousser jusqu'au bout la géométrie analytique, avec des coordonnées définies autrement que celles de la géométrie analytique ordinaire, mais qui, au fond, seront les mêmes. »

On voit déjà, par cette citation, que M. de Tilly se propose d'employer une relation analytique entre les distances des points de l'espace consi-

---

(*) Démonstration analogue à celle de M. Gérard dans l'*Essai d'exposition élémentaire des principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann*, par M. Mansion, supplément au n° de février 1895 de *Mathesis*.

dérés deux à deux, et de la faire servir à trouver les équations du plan et de la droite, à l'aide de coordonnées dont la définition ne suppose nullement les notions préalables de ligne droite et de plan, telles qu'on les conçoit en géométrie.

Comme la question est importante en ce qu'elle touche non seulement aux bases de la géométrie, mais encore à la manière dont on peut faire l'application de l'analyse à la géométrie, nous croyons devoir l'examiner ici.

Voici, un aperçu de la manière dont raisonne M. de Tilly : « La géométrie n'étant que la science des intervalles et l'intervalle n'étant lui-même, à priori, qu'un nombre caractérisant un couple de points, on peut imaginer d'abord un système de géométrie dans lequel tous les intervalles seraient arbitraires.

« Prenons, par exemple, 1000 points dans l'espace, lesquels auront entre eux 499500 intervalles. Puis, choisissons 499500 nombres au hasard, et attribuons l'un de ces nombres à chacun des intervalles. Imaginons ensuite que l'imposition d'un nombre à chaque intervalle soit continuée, sinon pour tous les points de l'espace, du moins pour tous ceux que l'on aura à considérer spécialement dans le cours d'une opération déterminée. On aurait ainsi un système complet de géométrie. Mais ce serait une géométrie rudimentaire, se réduisant à un catalogue des intervalles des points de l'espace, et sans relations possibles entre ces intervalles, puisque ceux-ci ont été choisis au hasard.

« Si l'on veut qu'il existe une géométrie, dans le sens ordinaire de ce mot, c'est-à-dire une géométrie comprenant des relations, des formules entre les intervalles, il faut se poser le problème suivant :

« *Choisir les nombres correspondant aux intervalles des couples de points de l'espace, non plus d'une façon tout à fait arbitraire, mais de manière qu'il puisse exister entre ces nombres des relations générales, d'ailleurs quelconques.*

. . . .

« Le point de départ est donc celui-ci : si nous voulons qu'il existe une géométrie théorique, nous devons admettre qu'on ne puisse augmenter indéfiniment le nombre des points choisis dans l'espace, en laissant *tous* les intervalles arbitraires ; on devra donc s'arrêter à un nombre n de points, à partir duquel il existera au moins une relation entre les $\frac{n(n-1)}{2}$ intervalles correspondants. »

« De plus si l'on veut que les formules de la géométrie soient non pas *locales*, mais applicables à l'espace tout entier, il faudra, non seulement que le nombre n soit le même dans tout l'espace, mais encore que la relation ou les relations entre les $\frac{n(n-1)}{2}$ intervalles soient aussi les mêmes. »

Cela posé, M. de Tilly montre que dans un espace à trois dimensions il faut s'arrêter à 5 points, et qu'il doit exister entre les dix intervalles de ces cinq points une relation dont il faut chercher la forme d'après la condition qu'elle puisse exister sans contradiction pour *tous* les groupes de cinq points dont on peut remplir l'espace. Cela doit être entendu en ce sens qu'on peut prendre au hasard les intervalles des points 1, 2, 3; puis prendre arbitrairement les intervalles du point 4 à chacun des précédents, et aussi les intervalles du point 5 à chacun des trois premiers; de telle sorte que les neuf intervalles (12), (13), (23), (14), (24), (34), (15), (25), (35) sont complètement arbitraires; mais qu'alors le dixième intervalle, désigné par (45), doit être déterminé par une certaine relation qu'on peut représenter par

$$\psi[(12), (23), (14), \ldots (35), (45)] = 0$$

ou, pour abréger, par

$$(1\,2\,3\,4\,5) = 0.$$

Si on ajoute un sixième point au système, on introduit cinq intervalles supplémentaires (16), (26), (36), (46), (56), dont les trois premiers peuvent être choisis au hasard; mais alors les deux autres (46) et (56), doivent satisfaire aux relations

$$(1\,2\,3\,4\,6) = 0, \quad (1\,2\,3\,5\,6) = 0.$$

On peut évidemment toujours déterminer (46) et (56) par ces deux dernières relations, quelle que soit la forme de la fonction ψ. Mais si on veut que la relation ψ soit vérifiée par *tout* système de cinq points on devra avoir aussi

$$(1\,2\,4\,5\,6) = 0, \quad (1\,3\,4\,5\,6) = 0, \quad (2\,3\,4\,5\,6) = 0.$$

Ces trois dernières doivent donc être des conséquences analytiques des trois précédentes, c'est-à-dire qu'on doit pouvoir les en déduire par des éliminations. Toute forme de ψ qui ne satisfait pas à cette condition est impossible comme représentation géométrique d'un système de cinq points. C'est ce que M. de Tilly appelle *la condition des six points*.

M. de Tilly montre ensuite que quand cette condition est remplie pour tous les groupes de cinq points qu'on peut former à l'aide de six points déterminés, la relation $\psi = 0$ existe pour tous les groupes de cinq points qu'il est possible de considérer dans l'espace.

Puis il rappelle que, d'après les travaux de divers savants, deux formes de la fonction ψ satisfont à la condition des six points; ce sont les suivantes :

$$(a)\quad (12345) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \varphi(12) & \varphi(13) & \varphi(14) & \varphi(15) \\ 1 & \varphi(12) & 0 & \varphi(23) & \varphi(24) & \varphi(25) \\ 1 & \varphi(13) & \varphi(23) & 0 & \varphi(34) & \varphi(35) \\ 1 & \varphi(14) & \varphi(24) & (\varphi 34) & 0 & \varphi(45) \\ 1 & \varphi(15) & \varphi(25) & \varphi(35) & \varphi(45) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(b)\quad (12345) = \begin{vmatrix} 1 & \varphi(12) & \varphi(13) & \varphi(14) & \varphi(15) \\ \varphi(12) & 1 & \varphi(23) & \varphi(24) & \varphi(25) \\ \varphi(13) & \varphi(23) & 1 & \varphi(34) & \varphi(35) \\ \varphi(14) & \varphi(24) & \varphi(34) & 1 & \varphi(45) \\ \varphi(15) & \varphi(25) & \varphi(35) & \varphi(45) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans ces relations la fonction φ reste provisoirement arbitraire et sa forme est déterminée ultérieurement. La relation (a) correspond à la géométrie usuelle; l'équation (b) conduit aux deux autres géométries. Occupons-nous de la première.

M. de Tilly rapporte tous les points de l'espace à trois points de base A, B, C, pris à volonté dans l'espace et dont les intervalles sont (AB), (BC), (CA). Il adopte pour les représenter des coordonnées qui sont pour le point A : $x_a, y_a, z_a = 0$; pour le point B : $x_b, y_b, z_b = 0$; pour le point C : $x_c, y_c, z_c = 0$, et qui sont définies par les trois équations :

$$(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 = \varphi(\text{AB}),$$
$$(x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2 = \varphi(\text{AC}),$$
$$(x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2 = \varphi(\text{BC}),$$

qui ne contiennent comme inconnues, que les quatre différences qui y figurent. Si l'on se donne au hasard l'une de ces différences, on calculera facilement les trois autres. Il y a plusieurs solutions mais on choisira arbitrairement l'une d'elles. Ensuite on pourra encore se donner arbi-

trairement deux des six coordonnées, comprenant l'un des x et l'un des y. Les quatre autres coordonnées se trouveront déterminées.

Les coordonnées x_1, y_1, z_1, d'un point quelconque sont ensuite définies par les équations

$$(c)\qquad \begin{cases} (x_1 - x_a)^2 + (y_1 - y_a)^2 + z_1^2 = \varphi(1A), \\ (x_1 - x_b)^2 + (y_1 - y_b)^2 + z_1^2 = \varphi(1B), \\ (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 + z_1^2 = \varphi(1C); \end{cases}$$

et celles du point 2 par les équations

$$(x_2 - x_a)^2 + (y_2 - y_a)^2 + z_2^2 = \varphi(2A),$$
$$(x_2 - x_b)^2 + (y_2 - y_b)^2 + z_2^2 = \varphi(2B),$$
$$(x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2 + z_2^2 = \varphi(2C).$$

Mais entre les dix intervalles des points A, B, C, 1, 2, il existe la relation qui résulte de la condition des six points :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \varphi(12) & \varphi(1A) & \varphi(1B) & \varphi(1C) \\ 1 & \varphi(12) & 0 & \varphi(2A) & \varphi(2B) & \varphi(2C) \\ 1 & \varphi(1A) & \varphi(2A) & 0 & \varphi(AB) & \varphi(AC) \\ 1 & \varphi(1B) & \varphi(2B) & \varphi(AB) & 0 & \varphi(BC) \\ 1 & \varphi(1C) & \varphi(2C) & \varphi(AC) & \varphi(BC) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Si dans cette dernière équation on remplace $\varphi(AB)$, $\varphi(AC)$, $\varphi(BC)$, $\varphi(A1)$, $\varphi(B1)$, $\varphi(C1)$, $\varphi(A2)$, $\varphi(B2)$, $\varphi(C2)$, par leurs valeurs tirées des neuf précédentes, on trouve une équation ne renfermant plus comme inconnue que $\varphi(12)$; on peut faire voir qu'elle a pour solution

$$\varphi(12) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2;$$

et qu'en général la fonction φ de l'intervalle (mn) est donnée par la relation

$$(d)\qquad \varphi(mn) = (x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2.$$

M. de Tilly définit ensuite la ligne droite :

La ligne droite est une ligne telle que si l'on en considère trois points A, B, C, *aucun autre point du système ne peut être distant des deux points*

A *et* B *comme l'est le point* C. Il montre ensuite que les équations du premier degré

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}$$

sont celles de la ligne droite qui joint les points $x_1y_1z_1$ et $x_2y_2z_2$.

Pour le faire voir il prend un point quelconque $x_3y_3z_3$ sur cette ligne; en supposant qu'un autre point $x_4y_4z_4$ puisse être distant de $x_1y_1z_1$ et $x_2y_2z_2$ comme l'est $x_3y_3z_3$, on aurait

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = (x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 + (z_4 - z_1)^2,$$
$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = (x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2 + (z_4 - z_2)^2,$$

en même temps que

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1};$$

et ces égalités exigent que l'on ait $x_3 = x_4$, $y_3 = y_4$, $z_3 = z_4$; ce qui prouve que le point $x_4y_4z_4$ ne peut être autre que $x_3y_3z_3$.

Le plan est ensuite défini comme le lieu des points dont les coordonnées satisfont à une équation du premier degré.

171. Voyons maintenant jusqu'à quel point il est permis de dire qu'on ramène ainsi les notions premières de la droite du plan à une notion plus simple; et remarquons d'abord que toute définition a pour but de ramener la connaissance d'une chose à celle d'autres choses déjà connues, et cela de manière que la chose à définir se présente complètement et clairement à l'esprit. Il va donc de soi que la première condition pour qu'une définition soit bonne, c'est que les notions auxquelles on veut ramener la connaissance de l'objet à définir, se présentent elles-mêmes à l'esprit d'une manière claire et précise.

Or, M. de Tilly adopte pour la ligne droite la définition suivante, qui avait déjà été donnée par Cauchy : C'est une ligne telle que si l'on en considère trois points A, B, C, aucun autre point ne peut être distant de A et B comme l'est le point C. Cette définition énonce une propriété qui appartient à la ligne droite exclusivement; mais cela ne suffit pas; c'est ainsi que la définition de Legendre énonce aussi une propriété caractéristique de la ligne droite, et cependant ne peut être admise parce qu'elle ne ramène pas la notion de ligne droite à une autre plus simple.

Ici la notion de ligne droite est ramenée à celle de la distance de deux

points, et cette dernière peut être, suivant la manière dont on l'envisage, ou bien une notion vague, ou bien une notion très complexe. Elle reste vague aussi longtemps qu'on ne connaît pas la loi suivant laquelle varie la distance de deux points sur une ligne donnée ; ou, en d'autres termes, aussi longtemps qu'on ne connaît pas la ligne suivant laquelle les distances augmentent en s'ajoutant les unes aux autres. Et comme cette ligne est précisément la ligne droite, il faut, si l'on veut rendre la notion de distance claire et précise, la ramener à une idée complexe qui suppose déjà connue la manière de mesurer les longueurs et par conséquent aussi les propriétés de la ligne droite que l'on a voulu définir. Nous ne voyons donc pas qu'il y ait avantage à adopter la définition dont il s'agit, bien qu'elle énonce une propriété caractéristique de la ligne droite.

Essayons de montrer plus complètement que la marche suivie plus haut pour établir les équations de la ligne droite est inadmissible s'il s'agit, non pas d'une ligne idéale, déterminée par des équations qui ne peuvent avoir qu'une signification purement analytique, mais d'une ligne géométrique, c'est-à-dire d'une suite ininterrompue de points dont on peut assigner la position dans l'espace ; ou, en d'autres termes encore, s'il s'agit d'une droite que l'on puisse construire par points.

Remarquons, à cet effet, que si on se donne des nombres pour représenter les distances d'un point aux trois points de base, on peut bien calculer les coordonnées de ce point à l'aide des équations (c); ou réciproquement, connaissant les coordonnées d'un point, on peut à l'aide des mêmes équations déterminer les nombres qui représentent ses distances aux trois points de base. Mais ce qu'on ne voit pas, c'est comment, *un point réel* étant donné dans l'espace, on pourrait en déterminer soit les coordonnées, soit les distances aux points de base; ou réciproquement, de quelle manière on pourrait trouver un point réel à l'aide de ses coordonnées exprimées en nombres.

Car les coordonnées d'un point définies plus haut ne sont que des nombres calculés au moyen d'autres nombres représentant des distances; mais s'il s'agit d'une géométrie réelle et non d'une géométrie symbolique, il faut qu'à l'aide des *nombres* qui représentent les distances on puisse trouver *géométriquement* ces distances elles-mêmes, ou inversement.

Or, pour exprimer en nombres des distances ou des intervalles, il faut les mesurer; et toute mesure suppose qu'on ait défini l'égalité, puis l'addition des grandeurs à mesurer. L'égalité des intervalles pourrait se

définir de la manière suivante : Etant donnés deux points A et B et deux autres points A′ et B′, si les deux premiers, considérés comme faisant partie d'un système solide peuvent être transportés de manière que A coïncide avec A′ et B avec B′, on dira que les intervalles AB et A′B′ sont égaux.

L'égalité des intervalles étant ainsi définie, il resterait à trouver un moyen de comparer des intervalles inégaux et de déterminer leurs rapports; or ceci n'est possible que quand on sait comment une distance doit être ajoutée à elle-même ou divisée en parties égales pour en obtenir les multiples et les sous-multiples; c'est-à-dire quand on connaît la ligne sur laquelle les additions ou les divisions doivent se faire. Cette ligne est une droite; mais pour le prouver M. de Tilly recourt à une intégration, c'est-à-dire à une addition de distances élémentaires, opération qui ne peut avoir de sens *géométriquement* quand on ne connaît pas encore la ligne sur laquelle les distances s'ajoutent.

Ainsi, pour définir une ligne droite et faire voir ensuite que c'est sur une droite que les distances s'ajoutent, il faudrait faire une addition de distances ou de fonctions de distances, et on tomberait dans un cercle vicieux.

M. de Tilly montre que dans la formule (d) il faut poser

$$\varphi(mn) = k\,(mn)^2\,;$$

de sorte que l'expression qu'il trouve pour la distance de deux points dans le premier système de géométrie ne diffère de la formule usuelle en coordonnées rectangulaires, qu'en ce que le carré de la distance est multiplié par un facteur constant k; et les deux formules deviennent identiques pour $k = 1$. Les coordonnées de M. de Tilly sont donc des nombres proportionnels à ces coordonnées rectangulaires; mais cette interprétation ne peut être admise quand on écarte la notion euclidienne de la ligne droite, qui permettrait de faire usage de trois axes rectilignes.

Ce que nous venons de dire de la manière dont M. de Tilly déduit la géométrie euclidienne de la relation (a) s'applique à celle dont il déduit les deux autres systèmes de géométrie de la formule (b). La droite et le plan y ont exactement les mêmes définitions et celles-ci donnent prise aux mêmes objections.

172. Selon nous toute tentative de se passer en géométrie des notions fondamentales de droite et de plan et de les remplacer par des

considérations purement analytiques doit échouer. Certes, l'analyse est un instrument puissant, mais il ne faut pas lui demander plus qu'elle ne peut donner; on peut l'appliquer à la géométrie; mais elle ne peut fournir les notions premières qui servent de base à cette science; il ne faut pas perdre de vue que les nombres n'ont, par eux-mêmes, aucune signification; ils représentent les grandeurs dont ils expriment la mesure, et ne prennent un sens concret que quand on a fait choix d'une unité bien définie qu'il est possible d'ajouter à elle-même autant de fois que l'indiquent les nombres donnés. Définir la ligne droite et établir ses équations en se fondant sur des relations algébriques entre des distances, sans disposer d'une unité pour mesurer ces distances, c'est, pensons-nous, tomber dans une erreur analogue à celle qu'a commise Legendre quand il a voulu démontrer analytiquement qu'il existe une relation nécessaire entre les trois angles d'un triangle rectiligne; cette erreur consiste à raisonner sur des formules contenant certaines grandeurs sans avoir indiqué le moyen de représenter ces grandeurs par des nombres.

173. Il est incontestable qu'on peut appliquer le langage de la géométrie à des propositions d'analyse pure. On peut, par exemple, raisonner sur des points, des lignes ou des surfaces imaginaires; sur un espace à n dimensions, et il peut résulter de là de grands avantages; on parvient souvent ainsi à jeter plus de lumière sur certaines questions ou même à découvrir des vérités qu'il eût été difficile de trouver par d'autres moyens; mais il faut éviter de se laisser égarer par une terminologie admise par simple extension pour faciliter l'énoncé et la compréhension de certaines formules d'analyse pure; et dès qu'on veut appliquer celles-ci à des grandeurs concrètes, il faut bien savoir ce que représentent les nombres qu'elles contiennent.

Nous croyons que si l'on a en vue une géométrie réelle, dans un espace à trois dimensions et non une géométrie idéale, on est forcé d'admettre comme notion première, irréductible, celle de ligne droite, telle que l'a considérée Euclide. *C'est la ligne qui est déterminée complètement, sans aucune restriction, quand on donne deux de ses points.* La ligne droite, telle qu'on l'envisage en géométrie non euclidienne ne jouit pas de cette propriété d'une manière absolue, mais seulement parce qu'il est sous-entendu qu'on la considère comme entièrement située sur

une surface sphérique ou pseudosphérique passant par ces deux points; si bien que par ces deux points on peut mener une infinité de lignes de ce genre, correspondant aux surfaces sphériques ou pseudosphériques, en nombre infini, qu'on peut faire passer par ces deux points.

Les surfaces sphériques ou pseudosphériques elles-mêmes sont l'équivalent du plan; mais ici encore, tandis que trois points suffisent pour déterminer un plan d'une manière complète dans l'espace, on peut par ces points faire passer une infinité de surfaces sphériques ou pseudosphériques; de sorte que ces trois points ne déterminent pas un plan en géométrie non euclidienne à moins qu'on n'indique de quel système il s'agit.

Ce qui caractérise réellement le plan, c'est qu'on peut en détacher une partie quelconque et l'appliquer sur une autre partie de ce même plan ou de tout autre, SANS FLEXION ET AVEC OU SANS RENVERSEMENT. On voit donc que, sans pouvoir ramener les notions de droite et de plan à d'autres plus simples, nous nous représentons très nettement l'image de ces figures géométriques et que la confusion avec d'autres n'est pas possible.

Donc, quand on appelle plan une surface sphérique ou pseudosphérique et ligne droite une ligne géodésique d'une de ces surfaces, on applique un même nom à des objets essentiellement différents, mais entre lesquels il existe certaines analogies; on appelle ligne droite une ligne déterminée par deux points, mais qui n'est déterminée, en géométrie non euclidienne, que parce qu'on suppose, au moins implicitement, une surface sur laquelle se trouve cette droite; c'est-à-dire que les géométries non euclidiennes supposent les droites tracées dans des espaces à deux dimensions.

C'est pour le même motif qu'on accepte, en géométrie riemannienne, la notion d'un maximum de distance entre deux points d'une droite; cette notion serait inconciliable avec l'idée d'un espace à trois dimensions. Dans celui-ci on ne peut se représenter un obstacle s'opposant à ce qu'on s'éloigne indéfiniment, dans toutes les directions, d'un point donné, à moins qu'on ne s'impose l'obligation de rester sur une ligne ou sur une surface donnée.

Aussi ne pouvons-nous admettre comme l'expression de la vérité cette assertion d'un savant analyste : « Si l'on demande au mathématicien laquelle des trois géométries idéales, toutes les trois absolument rigou-

reuses, est réalisée dans la nature, il devra répondre : Je n'en sais rien (*). »

Selon nous il y aurait plutôt lieu de répondre : Nous vivons dans l'espace euclidien ; les systèmes non euclidiens ne sont possibles que dans des espaces à deux dimensions ; mais ces espaces, qu'on peut concevoir en nombre infini, embrassent tout l'espace à trois dimensions.

174. A la rigueur on pourrait dire qu'aucune des trois géométries n'est réalisée dans la nature, parce que les figures sur lesquelles raisonnent les géomètres n'existent pas matériellement; et en effet, on leur suppose une régularité parfaite qui ne se présente dans aucun des corps qui en ont suggéré l'idée; mais on conçoit la possibilité de leur existence. Cela suffit et il est certain qu'un artiste doué d'une habileté parfaite et disposant d'un outillage parfait pourrait construire toutes les figures de la géométrie euclidienne.

Il pourrait aussi construire les surfaces sphériques et pseudosphériques au moyen des principes de la géométrie euclidienne; et par conséquent, les figures tracées sur ces surfaces ne sont que des figures spéciales de la géométrie euclidienne. Cela semble incontestable, puisque les admirables travaux de M. Beltrami sur les surfaces pseudosphériques reposent tout entiers sur la géométrie analytique euclidienne et que dès lors on peut affirmer que celle-ci contient comme cas particulier la soi-disant planimétrie de Lobatchewski.

Si l'on essayait, au contraire, de se représenter l'une des deux autres géométries comme s'étendant à tout l'espace à trois dimensions, on s'exposerait à tomber dans beaucoup de difficultés et de contradictions.

Et tout d'abord il faut observer que M. Beltrami, qui a essayé d'étendre aux trois dimensions de l'espace son interprétation des figures lobatchewskiennes planes, n'y a pas réussi; il a bien donné une interprétation *analytique* complète de la stéréotomie non euclidienne (**); mais les formules qu'il a établies ne peuvent pas être construites au moyen des figures de la géométrie ordinaire. Il a fait remarquer que pour compléter

---

(*) *Principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann*, par P. Mansion; appendice, III, sur la portée philosophique de la métagéométrie.

(**) *Théorie fondamentale des espaces de courbure constante.* La traduction de ce mémoire se trouve, comme celle du mémoire déjà cité dans le tome VI des *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, année 1869.

la démonstration de l'impossibilité d'obtenir une construction de la géométrie non euclidienne dans l'espace, il faudrait pouvoir exclure la possibilité d'y arriver autrement que par extension de la méthode qu'il a suivie pour la planimétrie; il n'affirme pas qu'il soit impossible d'arriver à une construction de ces figures, mais il donne d'excellentes raisons pour prouver que c'est très invraisemblable. Il n'est donc pas étonnant que l'on se représente difficilement l'espace non euclidien.

175. Pour montrer combien il serait difficile de nous figurer une stéréotomie non euclidienne réelle à l'aide de nos idées sur la géométrie usuelle, prenons un exemple tiré de la géométrie riemannienne. C'est ce qu'il y aura de plus facile, parce que les figures sphériques nous sont plus familières que les pseudosphériques.

Si l'on veut qu'un système de coordonnées, celui de M. de Tilly ou tout autre, ne reste pas dans le domaine de l'analyse pure, on doit admettre qu'il existe un moyen de construire, à l'aide de ces coordonnées, tous les points de l'espace. Cela posé, donnons-nous deux points A et B; ils déterminent complètement une certaine droite qui est une ligne fermée ABC (fig. 38).

Prenons à volonté un point D hors de cette droite et joignons-le par d'autres droites à tous les points de ABC; nous aurons les lignes fermées DAD'A', DBD'B', ... qui toutes passeront par le point D', opposé à D. L'ensemble de ces lignes constituera le plan riemannien déterminé par le point D et la droite AB. Ce sera une surface fermée. (La géométrie riemannienne étant la géométrie de la sphère, ce sera une sphère et ABC sera un grand cercle de cette sphère).

Prenons maintenant un point E hors de ce plan; par ce point et la droite ABC on pourra faire passer un second plan riemannien, qu'on obtiendra comme le précédent, et on peut trouver une infinité de ces plans passant tous par cette droite; mais alors cette droite devrait être un grand cercle commun à toutes ces sphères?

Il est donc bien difficile de concevoir comment la stéréotomie non euclidienne pourrait être réalisée. D'ailleurs, alors même que l'on en trouverait une interprétation analogue à celle que M. Beltrami a fait connaître pour la planimétrie, ce ne serait pas une raison pour affirmer qu'il se pourrait que l'une des deux géométries non euclidiennes fût réalisée dans la nature et que la géométrie euclidienne ne fût pas la véritable.

On a fait remarquer pour le soutenir que le monde aurait pu être créé autrement qu'il ne l'est, et que les lois auxquelles obéit la matière auraient pu être différentes de ce qu'elles sont; cela est vrai et la mécanique, la physique, la chimie auraient alors été changées ; mais, comme le fait remarquer Duhamel(*), « les données fondamentales de la science des nombres et de la science de l'étendue, quoique fournies jusqu'à un certain point par l'observation des objets naturels, sont indépendantes de l'espèce de matière qui les compose et qui peut varier de l'un à l'autre : elles ne se rapportent qu'à la distinction et à l'étendue de ces objets. *On y fait abstraction de la matière même et l'on vit dans le monde idéal de la grandeur, de la figure et du nombre, dont le sentiment pourrait rester en nous alors même que le monde matériel qui nous l'a donné se trouverait anéanti.* »

Or, c'est ce sentiment qui fait naître dans notre esprit les notions premières sur lesquelles repose la géométrie euclidienne. Dire que la géométrie euclidienne n'est pas réalisée dans la nature, ce serait dire que ce sentiment nous trompe ; que les propositions que cette géométrie nous enseigne et les propriétés des figures qui en découlent ne sont pas vraies ; que tout ce qui se présente à nous dans ce système avec une lucidité parfaite, n'est qu'une illusion, et que la vérité se trouve du côté de la stéréotomie non euclidienne qui ne nous présente que des conceptions obscures que ne savons pas appliquer à ce qui nous environne. Tout cela pourrions-nous le regarder comme une chose possible, et faudrait-il révoquer en doute la géométrie euclidienne parce que nous ne savons pas démontrer le postulatum de la parallèle unique ? Mais ce serait tomber dans le scepticisme absolu ; car on pourrait tout aussi bien prétendre qu'aucun des trois systèmes de géométrie n'est certain parce qu'on ne sait pas démontrer l'homogénéité de l'espace et prouver qu'une figure qui existe quelque part peut être reproduite identiquement dans toute autre région de l'espace. On ne doit pas perdre de vue que, pour démontrer une proposition, il faut toujours s'appuyer sur d'autres et qu'il y a, par conséquent, des axiomes qu'il faut admettre sans pouvoir remonter au delà sous peine de prétendre, comme les pyrrhoniens, qu'on ne peut rien savoir. Et s'il est bon de réduire les notions premières au plus petit nombre possible, il serait, d'autre part, contraire à la rigueur

---

(*) Duhamel; *Des méthodes, ...*, t. IV, avant-propos.

mathématique de ne plus fonder la géométrie que sur des principes obscurs, contestables, et qui ne sauraient être acceptés comme évidents par tout le monde.

En résumé, nous pensons que la seule vraie géométrie à trois dimensions, la seule qui nous soit révélée par le monde physique, est la géométrie euclidienne, et que les deux autres, en tant qu'elles s'appliquent à des figures réelles, n'en sont que des chapitres spéciaux.

§ 4. Mesure des angles. — Passage du commensurable à l'incommensurable dans les propositions où entre la considération de deux grandeurs qui croissent proportionnellement.

176. *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, les angles égaux* ACD, ECB, (fig. 39) *dont le sommet est au centre, interceptent sur sur la circonférence des arcs égaux* AD, EB; *réciproquement, si les arcs* AD, EB *sont égaux, les angles* ACD, ECB, *sont égaux.*

Cette proposition se démontre par la superposition des figures, et conduit à cette conséquence : Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, quel que soit le rapport des deux angles au centre ACB, ACD, ces deux angles sont toujours entre eux comme les arcs AB, AD, interceptés entre leurs côtés.

On le prouve très facilement si les deux angles sont entre eux comme deux nombres entiers. On peut ensuite, de plusieurs manières, étendre la proposition au cas où le rapport est incommensurable. Voici d'abord une démonstration par la réduction à l'absurde, que donne Legendre.

Supposons le plus petit angle placé dans le plus grand; si la proposition énoncée n'a pas lieu, l'angle ACB sera à l'angle ACD comme l'arc AB est à un arc plus grand ou plus petit que AD. Supposons cet arc plus grand, et représentons-le par AO; nous aurons ainsi :

$$\text{Angle ACB} : \text{angle ACD} = \text{arc AB} : \text{arc AO}.$$

Imaginons maintenant que l'arc AB soit divisé en parties égales dont chacune soit plus petite que DO; il y aura au moins un point de division entre D et O; soit E ce point, et joignons CE; les arcs AB, AE seront entre eux comme deux nombres entiers et on aura, en vertu du théorème précédent :

$$\text{Angle ACB} : \text{angle ACE} = \text{arc AB} : \text{arc AE}.$$

Rapprochant ces deux proportions l'une de l'autre et observant que les

antécédents sont les mêmes, on en conclura que les conséquents sont en proportion, et qu'ainsi :

Angle ACD : angle ACE = arc AO : arc AE.

Mais l'arc AO est plus grand que l'arc AE ; il faudrait donc, pour que la proportion subsistât, que l'angle ACD fût plus grand que l'angle ACE ; or, au contraire, il est plus petit ; donc il est impossible que l'angle ACB soit à l'angle ACD comme l'arc AB est à un arc plus grand que AD.

On démontrerait par un raisonnement entièrement semblable que le quatrième terme de la proportion ne peut être plus petit que AD ; donc il est exactement AD ; donc on a la proportion

angle ACB : angle ACD = arc AB : arc AD.

On peut donner une autre démonstration en s'appuyant sur la définition même de l'égalité de deux rapports incommensurables.

Divisons l'un des arcs, AB par exemple, en un nombre arbitraire m de parties égales, et supposons qu'une de ces parties puisse être portée sur l'arc AD, n fois avec un reste moindre qu'elle. Si l'on joint ensuite le point C aux points de division de l'arc, l'angle ACB sera divisé en m parties égales, et l'angle ACD contiendra un nombre n de ces parties, avec un reste plus petit que l'une d'elles. Il en résulte que si l'on divise l'arc AB et l'angle ABC en un même nombre de parties égales, une des divisions de l'arc sera contenue dans AD autant de fois qu'une des divisons de l'angle est contenue dans ACD. D'après la définition donnée en arithmétique de l'égalité de deux rapports incommensurables (nos 94 et 95), on doit en conclure que le rapport $\frac{AB}{AD}$ est égal au rapport $\frac{ACB}{ACD}$.

On dit fréquemment qu'*un angle se mesure par l'arc compris entre ses côtés, et décrit de son sommet comme centre.* On ne saurait trop insister auprès des commençants sur la signification de cette expression. Quand on donne le rayon et la longueur de l'arc en question, l'angle est déterminé ; mais il est clair qu'on ne peut comparer l'angle à l'arc, et mesurer l'angle par l'arc dans le sens habituel du mot. Si l'on dit que l'arc mesure l'angle, c'est parce que l'on peut exprimer l'angle par le même nombre que l'arc, en établissant une dépendance convenable entre l'unité d'arc et l'unité d'angle. C'est ainsi que l'arc et l'angle peuvent être exprimés

par un même nombre en degrés; l'unité d'angle est alors la 90e partie d'un droit, l'unité d'arc la 360e partie de la circonférence; ces unités d'espèce différente portent toutes deux le nom de degré. C'est ainsi également, qu'on peut prendre pour unité d'angle celui qui intercepte sur la circonférence dont le rayon est un, un arc dont la longueur est aussi égale à l'unité. Dans les deux cas l'arc et l'angle au centre entre les côtés duquel il est compris, sont exprimés par le même nombre.

§ 5. Mesure des surfaces planes et théorie des lignes proportionnelles.

177. *Mesure des surfaces planes.* — Les théorèmes relatifs à la mesure des aires planes reposent tous sur la proposition suivante :

Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases.

Après avoir démontré cette proposition pour le cas d'un rapport commensurable entre les bases on l'étend au cas du rapport incommensurable. Ce passage du commensurable à l'incommensurable se fait ici, et dans un grand nombre d'autres cas encore, par les mêmes méthodes que quand il s'est agi de prouver qu'un angle au centre est proportionnel à l'arc compris entre ses côtés : soit par la réduction à l'absurde, soit par la méthode directe fondée sur la définition de l'égalité de deux rapports incommensurables.

On prouve ensuite sans peine que *deux rectangles quelconques sont entre eux comme les produits des bases multipliées par les hauteurs* et que ces produits peuvent servir à mesurer les aires de ces rectangles. Ici encore il y a lieu d'observer que lorsque l'on dit qu'*un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur,* il faut entendre que l'unité de surface est l'aire du rectangle pour lequel ce produit est égal à l'unité; c'est-à-dire l'aire du carré dont le côté est égal à l'unité de longueur.

178. *Théorie des lignes proportionnelles.* — Cette théorie a été fondée par Euclide, et d'après lui par Legendre, sur la proposition suivante :

La ligne DE (fig. 40) *menée parallèlement à la base d'un triangle* ABC, *divise les côtés* AB, AC, *proportionnellement, de sorte qu'on a*

$$AD : DB = AE : EC.$$

Pour la démontrer joignez BE et DC; les deux triangles BDE, DEC, ont même base DE; ils ont aussi même hauteur, puisque les sommets

B et C sont situés sur une parallèle à la base; donc ces triangles sont équivalents.

Les triangles ADE, BDE, dont le sommet commun est E ont même hauteur, et sont entre eux comme leurs bases AD, DB; ainsi on a

$$ADE : BDE = AD : DB.$$

Les triangles ADE, DEC, dont le sommet commun est D ont aussi même hauteur, et sont entre eux comme leurs bases AE, EC; donc,

$$ADE : DEC = AE : EC.$$

Mais le triangle BDE est équivalent à DEC; donc, à cause du rapport commun de ces deux proportions, on aura

$$AD : DB = AE : EC. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce théorème peut aussi se démontrer immédiatement sur les lignes de la manière suivante :

Si l'on a $AB = BC = CD \ldots$ (fig. 41) et qu'on mène les parallèles BE, CF, DG, ... les parties AE, EF, FG, ... interceptées sur AG seront aussi égales entre elles.

En effet, menons par E, F, G, ... des parallèles à AD; les figures BEHC, CFID, ... seront des parallélogrammes comme ayant les côtés opposés parallèles; donc les triangles ABE, EHF, FIG, ... ont leurs côtés AB, EH, FI, ... égaux entre eux, et adjacents à des angles égaux chacun à chacun et, par conséquent, sont égaux; d'où $AE = EF = FG \ldots$. On prouvera donc aisément que si le rapport $\frac{AD}{BD}$ est commensurable, on a

$$AD : DB = AE : EC;$$

et le théorème étant démontré pour un rapport commensurable quelconque, il est facile de l'étendre au cas où le rapport serait incommensurable.

Cette seconde méthode, plus directe que la précédente, est recommandée par Laplace dans les séances de l'École normale; mais on ne peut nier que celle d'Euclide semble plus simple. Toutefois il faut observer que si cette dernière évite la difficulté du passage par les incommensurables, c'est parce qu'elle repose sur les propositions relatives à la mesure des rectangles, lesquelles ont présenté cette difficulté.

179. *De la similitude. — Les surfaces de deux polygones semblables sont dans le même rapport que les carrés construits sur deux côtés homo-*

logues. — Ce théorème se démontre d'abord pour les triangles et s'étend facilement à des polygones semblables quelconques. Duhamel fait remarquer que la démonstration en est très simple et facile à retenir quand on suit la marche analytique ; qu'elle offre, au contraire, quelque embarras aux élèves, quand on affecte d'employer toujours la marche synthétique, comme le fait Legendre; c'est, dit-il, un exemple de l'avantage qu'offre dans beaucoup de cas l'analyse sur la synthèse.

Voici d'abord la démonstration de Legendre : (fig. 42).

Soit l'angle $A = D$ et l'angle $B = E$; d'abord à cause des angles égaux, A et D, on aura en vertu d'une proposition précédente

$$ABC : DEF = AB \times AC : DE \times DF.$$

On a d'ailleurs, à cause de la similitude des triangles,

$$AB : DE = AC : DF,$$

et si l'on multiplie cette proportion terme à terme par la proportion identique

$$AC : DF = AC : DF,$$

il en résultera

$$AB \times AC : DE \times DF = \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Donc

$$ABC : DEF = \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2.$$

Dans cette démonstration, on ne saisit bien l'enchaînement des propositions par lesquelles on passe successivement, que quand on est arrivé au but. Les commençants ne l'apprennent et ne la retiennent que difficilement. Voici comment on aurait pu procéder par la méthode analytique : Pour démontrer que les deux triangles semblables ABC, DEF sont entre eux comme les carrés de deux côtés homologues AB et DE, il suffit de démontrer que les mesures des deux triangles sont dans ce rapport ; ou que les produits de leurs bases par leurs hauteurs, qui sont les doubles de ces mesures, sont dans ce rapport. Soient CH, FI ces hauteurs; la démonstration du théorème en question est donc ramenée à celle de la proportion suivante :

$$AB \times CH : DE \times FI = \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2,$$

qui, en supprimant les facteurs communs, soit aux antécédents, soit aux conséquents, devient

$$CH : FI = AB : DE.$$

Or cette proportion existe, puisque dans deux triangles semblables les hauteurs sont entre elles comme les côtés.

§ 6. Mesure du cercle et de la circonférence.

180. Il y a plusieurs manières d'établir les théorèmes relatifs à la mesure de la surface du cercle et de la longueur de la circonférence. Cette question, comme toutes celles où il s'agit de mesurer des lignes ou des surfaces courbes, ou encore des surfaces planes limitées par des lignes courbes, et des volumes limités par des surfaces courbes, exige l'emploi de la méthode infinitésimale ou de quelque autre équivalente.

Nous n'examinerons ici que les deux principaux genres de démonstration adoptés dans les éléments ; nous envisagerons plus tard ces méthodes d'une manière plus générale. Nous prendrons comme types les démonstrations qu'on trouve dans la géométrie de Legendre, d'une part, et dans la géométrie de Legendre modifiée par Blanchet, d'autre part. Dans la première ces questions sont résolues par la réduction à l'absurde ; dans l'autre par la méthode des limites.

181. Voici comment Legendre démontre que les circonférences de deux cercles sont entre elles comme les rayons, et leurs surfaces comme les carrés des rayons.

Lemme 1. — *Toute ligne courbe ou polygone qui enveloppe d'une extrémité à l'autre la ligne convexe* AMB *est plus longue que la ligne enveloppée* AMB (fig. 43).

L'auteur donne d'abord d'une ligne convexe cette définition : c'est une ligne qui ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points.

Cela posé, si la ligne AMB n'est pas plus petite que toutes celles qui l'enveloppent, il existera parmi ces dernières une ligne plus courte que toutes les autres, laquelle sera plus petite que AMB, ou tout au plus égale à AMB. Soit ACDQB cette ligne enveloppante ; entre les deux lignes, menez partout où vous voudrez la droite PQ, qui ne rencontre point la ligne AMB, ou du moins qui ne fasse que la toucher ; la droite PQ est plus courte que l'arc PDQ ; donc, si à l'arc PDQ on substitue la ligne droite PQ, on aura la ligne enveloppante APQB plus courte que APDQB. Mais, par hypothèse, celle-ci doit être la plus courte de toutes ; donc cette hypothèse ne saurait subsister ; donc toutes les lignes enveloppantes sont plus longues que AMB. C. Q. F. D.

Cette démonstration est peu satisfaisante. Car on pourrait l'appliquer mot pour mot à la ligne non convexe AXYZB, ce qui conduirait à une conclusion fausse. Il serait difficile, sinon impossible, d'établir ce lemme rigoureusement sans recourir à la méthode des limites; nous aurons à nous occuper plus tard d'un lemme analogue relatif aux surfaces courbes. Les remarques que nous ferons à cette occasion trouveraient leur application ici sous une forme plus simple ; c'est pourquoi nous nous bornerons à y renvoyer (voir n° 188).

Lemme II. — *Deux circonférences concentriques étant données on peut toujours inscrire dans la plus grande un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la plus petite, et on peut aussi circonscrire à la plus petite un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la plus grande; de sorte que dans l'un et l'autre cas les côtés du polygone décrit seront renfermés entre les deux circonférences.*

La démonstration n'offre pas de difficulté. Menons une tangente en un point quelconque de la circonférence intérieure et considérons cette tangente comme une corde de la circonférence extérieure. Inscrivons ensuite dans celle-ci un polygone régulier quelconque; puis doublons le nombre des côtés de ce polygone, doublons encore le nombre des côtés du nouveau polygone et continuons ainsi jusqu'à ce que l'arc sous-tendu par le côté soit moindre que celui qui est sous-tendu par la corde considérée plus haut.

Le côté sera alors moindre que la corde, et par conséquent plus éloigné du centre; sa distance au centre surpassera donc le rayon de la circonférence intérieure, et, par conséquent, nous aurons un polygone régulier inscrit dans la circonférence extérieure et dont les côtés ne pourront rencontrer la circonférence intérieure. Un polygone semblable circonscrit à celle-ci, ne rencontrera en aucun point la circonférence extérieure.

Théorème. — *Les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons, et les surfaces comme les carrés des rayons* (fig. 44).

Désignons, pour abréger, par circ. CA la circonférence qui a pour rayon CA ; je dis qu'on aura circ. CA : circ. OB = CA : OB.

Car, si cette proportion n'existe pas, CA sera à OB comme circ. CA est à un quatrième terme plus grand ou plus petit que circ. OB; supposons-le plus petit, et soit, s'il est possible :

$$\text{CA} : \text{OB} = \text{circ. CA} : \text{circ. OD}.$$

Inscrivons dans la circonférence dont OB est le rayon un polygone régulier EFG ... dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence dont OD est le rayon; inscrivons un polygone semblable MNP ... dans la circonférence dont CA est le rayon.

Cela posé, puisque ces polygones sont semblables, leurs périmètres MNP ..., EFG ... sont entre eux comme les rayons CA, OB des cercles circonscrits, et l'on aura

$$\text{MNP} \cdots : \text{EFG} \cdots = \text{CA} : \text{OB};$$

mais par hypothèse

$$\text{circ. CA} : \text{circ. OD} = \text{CA} : \text{OB};$$

donc

$$\text{MNP} \cdots : \text{EFG} \cdots = \text{circ. CA} : \text{circ. OD}.$$

Or, cette proportion est impossible, car le contour MNP... est moindre que circ. CA, et, au contraire, EFGK... est plus grand que circ. OD; donc il est impossible que CA soit à OB comme circ. CA est à une circonférence plus petite que circ. OB; ou, en d'autres termes, il est impossible qu'un rayon soit à un rayon comme la circonférence décrite du premier rayon est à une circonférence plus petite que la circonférence décrite du second rayon. De là je conclus qu'on ne peut avoir non plus

$$\text{CA} : \text{OB} = \text{circ. CA} : \text{une circ.} > \text{circ. OB};$$

car si cela était, en renversant les rapports on aurait

$$\text{OB} : \text{CA} = \text{une circ.} > \text{circ. OB} : \text{circ. CA},$$

ou, ce qui est la même chose, comme

$$\text{circ. OB} : \text{une circ.} < \text{circ. CA};$$

donc un rayon serait à un rayon comme la circonférence décrite du premier rayon est à une circonférence plus petite que la circonférence décrite du second rayon, ce qui a été démontré impossible.

Puisque le quatrième terme de la proportion

$$\text{CA} : \text{OB} = \text{circ. CA} : \text{X}$$

ne peut être ni plus petit ni plus grand que circ. OB, il faut qu'il soit égal à circ. OB ; donc les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons.

Un raisonnement et une construction entièrement semblables serviront à démontrer que les surfaces des cercles sont comme les carrés de leurs rayons.

On a reproché à cette démonstration qu'elle exige un certain effort de mémoire pour retenir qu'il faut inscrire un polygone dans la circonférence OB et non le circonscrire à la circonférence OD. Admettons, par exemple, qu'on ait commencé la démonstration de la manière suivante : Je dis que l'on a

$$\text{circ. } CA : \text{circ. } OB = CA : OB ;$$

car si cette proportion n'a pas lieu, le quatrième terme devra être plus grand ou plus petit que OB ; supposons qu'il puisse être plus petit, en sorte que l'on ait

$$\text{circ. } CA : \text{circ. } OB = CA : OD.$$

Si, pour démontrer l'absurdité de cette proposition, on voulait comme dans le cas précédent inscrire le polygone EFG ... dans la circonférence OB, l'on ne pourrait arriver à la conclusion. Il faudrait ici circonscrire deux polygones réguliers aux circonférences OD et CA. Au reste, il suffit d'observer que les deux polygones doivent toujours être inscrits ou circonscrits aux deux cercles dont les rayons forment un des rapports de la proportion que l'on veut démontrer fausse ; et, pour savoir s'il faut les inscrire ou les circonscrire, il n'y a qu'à examiner comment il faut les placer pour que l'un d'eux soit renfermé entre les deux circonférences dont les rayons sont OB et OD.

On a aussi reproché à la démonstration de Legendre qu'elle admet qu'il y a des circonférences de toute grandeur ; mais il est facile d'écarter cette objection en donnant à la démonstration un autre tour et en prouvant, comme nous venons de l'indiquer, que le quatrième terme de la proportion ne peut être plus grand ni plus petit que le rayon OD.

182. Voici maintenant les démonstrations qu'on trouve dans Blanchet : 1° Soit ABCD (sans figure) un polygone inscrit dans une circonférence ; le périmètre de ce polygone est moindre que la longueur de la circonférence, car chaque côté est plus petit que l'arc correspondant. Prenons sur les arcs AB, BC, CD, ... des points de divisions F, G, H, E, ... et tirons les cordes AF, FB, BG, ... ; nous aurons inscrit un second polygone d'un périmètre plus grand que le premier. Si nous prenons de nouveaux points de division intermédiaires, nous aurons un troisième polygone d'un périmètre encore plus grand, et ainsi de suite.

Les périmètres de ces polygones successifs vont donc en s'approchant de la longueur de la circonférence, et nous admettrons comme une

proposition évidente que, si le nombre des côtés du polygone était suffisamment grand, la différence entre la longueur de la circonférence et le périmètre du polygone serait moindre que toute quantité donnée ; ou, en d'autres termes, que *la longueur de la circonférence est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dont le nombre des côtés croît indéfiniment, chacun de ces côtés tendant vers zéro.*

2° On remarque aussi que les surfaces des polygones successifs, qui sont toutes moindres que la surface du cercle, en diffèrent de moins en moins ; et si l'on admet que la différence puisse devenir moindre que toute grandeur donnée, on en conclut que *l'aire du cercle est la limite de l'aire d'un polygone inscrit dont le nombre des côtés croît indéfiniment.*

Il résulte évidemment de ce qui vient d'être dit, que toute propriété qui aura lieu pour le périmètre ou la surface d'un polygone inscrit, quel que soit le nombre de ses côtés, s'appliquera à la longueur de la circonférence, ou à la surface du cercle.

Ainsi, par exemple, le périmètre de tout polygone inscrit dans un cercle étant moindre que le périmètre d'un polygone enveloppant la circonférence, on en conclut que la longueur de la circonférence est elle-même plus petite que le périmètre de tout polygone enveloppant.

3° Lorsqu'on inscrit dans un cercle des polygones réguliers dont le nombre des côtés va en croissant, les apothèmes augmentent, puisque les côtés des polygones deviennent plus petits, et sont plus éloignés du centre.

En outre, *ces apothèmes ont pour limite le rayon du cercle.* Car l'excès du rayon sur l'apothème est moindre que la moitié du côté, qui peut devenir aussi petit qu'on voudra.

Théorème. — 1° *Les circonférences sont entre elles comme leurs rayons, et 2° les surfaces des cercles sont comme les carrés des rayons.*

1° Inscrivons dans les circonférences dont les rayons sont R et r deux polygones réguliers semblables. Soient P et p les périmètres de ces polygones, C et c les circonférences ; on aura $\frac{P}{p} = \frac{R}{r}$.

Or, cette proportion ayant lieu quel que soit le nombre des côtés des polygones, s'appliquera également aux longueurs des circonférences, et l'on aura $\frac{C}{c} = \frac{R}{r}$.

2° Soient C′, c' les surfaces des mêmes cercles, et S, s, les surfaces de

deux polygones réguliers semblables inscrits; on aura $\frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2}$; et comme cette proportion est vraie quel que soit le nombre des côtés des polygones, on aura $\frac{C'}{c'} = \frac{R^2}{r^2}$. C. Q. F. D.

183. L'auteur, comme on voit, n'a pas cru devoir démontrer que l'aire du cercle est la limite des aires des polygones inscrits dont le nombre des côtés croît indéfiniment; et que la longueur de la circonférence est la limite des périmètres de ces polygones.

En ce qui concerne la première de ces propositions, elle peut cependant être prouvée fort simplement, comme l'a fait Euclide. Si l'on part du carré inscrit, et que l'on y substitue successivement les polygones réguliers de 8, 16, 32, ... côtés, chacun de ces polygones différera du cercle moins que le précédent; et cette différence se réduira toujours de plus de moitié en passant d'un quelconque de ces polygones au suivant, parce que les triangles que l'on ajoute dans chaque segment sont plus de la moitié de ce segment, puisqu'ils sont exactement la moitié du rectangle qui aurait même base et même hauteur que ce segment. L'excès du cercle sur le premier polygone est donc une quantité dont on ôte plus de la moitié en passant au second polygone; du reste on ôte encore plus de la moitié en passant au troisième polygone, et ainsi de suite; de sorte que l'excès de la surface du cercle sur celle du polygone finit par devenir moindre que toute quantité donnée.

Il n'est pas aussi facile de faire voir que la longueur de la circonférence est la limite des périmètres des polygones inscrits; quoique cette proposition semble pouvoir être admise sans difficulté, il est préférable de présenter les considérations suivantes, qui lui donnent mieux le caractère de l'évidence.

Soient ab (fig. 45) le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon $Oa = r$ et AB celui du polygone semblable circonscrit au même cercle. Si l'on désigne les périmètres de ces polygones respectivement par p et P on aura

$$\frac{p}{P} = \frac{ab}{AB} = \frac{r}{R} = 1 - \frac{R - r}{R};$$

mais si l'on considère le nombre des côtés de ces polygones comme

indéfiniment croissant la différence $R - r = Aa$ tendra vers zéro; donc

$$\lim \frac{p}{P} = \lim \frac{r}{R} = 1.$$

Donc p et P tendent vers une même limite; mais la longueur de la circonférence reste toujours comprise entre ces deux périmètres; elle n'est donc autre chose que la limite commune vers laquelle tendent ces derniers.

Il ne semble pas que cette marche laisse rien à désirer; néanmoins quelques auteurs ne la regardent pas comme satisfaisante. C'est ainsi que Duhamel n'admet pas que l'on puisse introduire la notion de la longueur d'une ligne courbe sans l'avoir préalablement définie; comme on ne peut faire coïncider une droite avec une courbe, on ne peut, dit-il, concevoir l'égalité entre ces deux lignes à priori; ni, par conséquent, juger si l'une est plus longue ou plus courte que l'autre, et dire, par exemple, qu'une ligne droite est plus courte qu'une ligne courbe terminée aux mêmes extrémités. Il faut donc, selon lui, définir d'abord la longueur d'une courbe.

Nous avons dit que Duhamel établit comme Euclide, mais en simplifiant quelques démonstrations, que la ligne droite est plus courte que toute ligne brisée ayant les mêmes extrémités, et qu'elle est, par conséquent, le plus court chemin d'un point à un autre en ne considérant toutefois que des routes composées de lignes droites en nombre quelconque.

Lorsqu'il s'occupe ensuite de la mesure des longueurs, Duhamel s'exprime comme il suit :

« Les lignes droites pouvant toujours s'appliquer les unes sur les autres, il n'y a aucune difficulté à concevoir sur une droite indéfinie une portion égale à une droite donnée, ce que l'on exprime quelquefois en disant qu'elle a *même longueur* en se gardant bien toutefois de définir la longueur... On n'emploie jamais ce mot que quand il y a comparaison; et quand on se borne à dire : la longueur d'une ligne, on entend toujours le rapport de cette ligne à l'unité (*).

« Dans quel cas maintenant pourra-t-on dire que deux courbes ont même longueur ou sont égales? C'est évidemment quand elles pourront

(*) Ceci nous paraît inexact. Quand on dit, par exemple, qu'on porte sur deux droites des longueurs égales on entend qu'il s'agit de deux portions de droites superposables; il ne faut pas que ces deux longueurs soient exprimées en nombres.

coincider. Or cela n'est possible que dans des cas très particuliers, par exemple pour des arcs de cercle dont les rayons sont égaux : deux arcs de cercle de rayons différents ne peuvent donc être égaux, dans le sens reçu jusqu'ici ; et si l'on veut pouvoir dire que, sans être superposables, ils sont équivalents en longueur, comme on a dit que des figures non superposables ont des surfaces équivalentes, il faut dire bien nettement ce que l'on entend par là, et ne pas agir comme si l'on dissimulait une difficulté qui réellement n'existe pas, puisqu'il ne s'agira que d'être conséquent à la définition qu'on aura donnée.

« Le terme de comparaison le plus simple à prendre étant la ligne droite, la question consistera à déterminer la droite que l'on dira de même longueur qu'une courbe donnée quelconque, ou à définir le rapport de la longueur de la courbe à l'unité, ou simplement ce qu'on appellera longueur de la courbe.

« Or voici celle que nous adoptons :

« *La longueur d'une courbe donnée est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans la courbe, et dont les côtés tendent indéfiniment vers zéro.*

« Mais cette définition n'aura un sens précis que quand on aura prouvé que cette limite existe, et est unique quelle que soit la loi suivant laquelle les côtés du polygone tendent vers zéro ; c'est ce que nous allons faire. »

Duhamel considère ensuite un arc de courbe convexe, en faisant remarquer que l'on peut toujours, s'il est nécessaire, partager une courbe quelconque en parties pour chacune desquelles cette condition serait remplie.

Il inscrit dans cet arc une série de polygones, en doublant indéfiniment le nombre des côtés, de sorte que chacun de ces côtés tend vers zéro, tandis que leur nombre augmente indéfiniment.

L'un quelconque des périmètres surpasse le précédent, et cependant il ne peut dépasser toute grandeur, puisqu'il doit toujours rester moindre que le périmètre d'un polygone fixe enveloppant la courbe, et tracé arbitrairement. Or, une grandeur toujours croissante et qui ne peut dépasser une certaine valeur fixe, tend nécessairement vers une limite déterminée, connue ou inconnue ; donc les périmètres des polygones inscrits dans la courbe suivant cette loi, ont une limite ; il reste à prouver que cette limite est indépendante de la loi d'inscription des polygones.

La démonstration que Duhamel donne de cette seconde proposition,

repose sur certains théorèmes généraux relatifs aux limites, dont nous nous occuperons plus tard (voir nos 201 et 203). Elle serait certainement très difficile pour les commençants, et il semble qu'il n'y aurait pas utilité à introduire ces considérations dans les éléments. D'ailleurs, il ne paraît pas impossible de concevoir la longueur d'une courbe, indépendamment de la définition donnée par Duhamel.

Étant donnée une ligne, on peut en considérer une partie plus ou moins étendue laquelle est par conséquent une grandeur susceptible de mesure, que nous appellerons la *longueur* de la ligne en question. Dans chaque cas particulier il ne faudra pas donner une nouvelle définition de cette longueur, mais il y aura lieu d'établir les propositions qui servent à en trouver la mesure. On pourrait, d'ailleurs, au besoin, recourir aux considérations suivantes pour se faire une idée nette de ce qu'il faut entendre par la longueur d'un arc de courbe.

Les objets sur lesquels nous raisonnons en géométrie sont de pures abstractions ; mais ce sont les propriétés générales des corps qui nous servent de points de départ et qui nous fournissent les premières notions sur lesquelles sont fondés tous nos raisonnements. Par la pensée nous attribuons aux surfaces des corps une continuité et une régularité qu'elles n'ont pas ; nous supposons aussi parfois que les corps jouissent d'une manière absolue de certaines propriétés que quelques-uns possèdent à des degrés divers.

Une de ces propriétés de la matière est l'élasticité ; de là, la notion du fil plus ou moins extensible, et comme pure abstraction, du fil inextensible. De là aussi la notion du fil flexible et du fil rigide.

On peut concevoir un fil tendu par des efforts égaux appliqués à ses extrémités. Si l'on fait abstraction de son épaisseur, il se réduit à une droite ; si l'on suppose en outre que sa longueur reste indépendante de la tension qu'il éprouve, ce sera ce que l'on appelle un fil inextensible. Considérons-le de plus comme flexible ; on pourra l'appliquer sur une courbe. En redressant ensuite le fil, la longueur comprise entre deux quelconques de ses points sera celle de l'arc correspondant de courbe sur lequel il était appliqué.

A la vérité on oppose à ces considérations qu'il faudrait une définition de ce qu'est un fil inextensible quand il s'agit d'un fil courbe dont on change la figure. Nous l'avouons, il serait difficile de donner une réponse satisfaisante à ceux qui ne voudraient pas admettre que le fil que

l'on regarde comme inextensible lorsqu'il est droit ou appliqué sur une courbe déterminée, continue de jouir de cette propriété lorsqu'on en change la figure ; ou, en d'autres termes, à ceux qui ne voudraient pas admettre que la flexibilité et l'inextensibilité sont deux propriétés indépendantes l'une de l'autre. Il faut remarquer, cependant, que l'on admet sans difficulté en mécanique la notion du fil flexible, que l'on considère comme pouvant être, à volonté, extensible ou inextensible. La flexibilité et l'extensibilité y sont donc regardées comme deux propriétés entièrement distinctes. D'ailleurs, la notion du fil flexible est analogue à celle des surfaces flexibles et applicables les unes sur les autres que personne, pensons-nous, ne se refuse à admettre en géométrie.

Hâtons-nous toutefois d'ajouter que nous ne considérons pas comme nécessaire d'introduire ces considérations dans l'enseignement de la géométrie. Nous avons seulement voulu rappeler ici que les objets des mathématiques pures sont des abstractions dont nous puisons l'idée dans les êtres matériels qui nous entourent et montrer que certains de ces objets peuvent se présenter à l'esprit avec une signification bien précise sans qu'il faille en donner une définition spéciale. Cette définition est dès lors inutile; car l'objet d'une définition est de faire connaître une chose nouvelle dont on veut introduire la notion.

Mais il ne suffit pas de concevoir la longueur d'un arc de courbe comme une grandeur d'une nature spéciale, il faut aussi connaître un moyen de la mesurer et c'est ici que viennent se placer les propositions que Duhamel appelle des définitions.

Pour montrer plus clairement que nous avons la notion de longueur d'une courbe en dehors de la définition de Duhamel, supposons que quelqu'un, suivant une marche analogue à celle de cet auteur, raisonne de la manière que voici :

Soit ABCD ... (fig. 46) une courbe plane quelconque. Traçons le polygone AEBFCGDHL dont les côtés sont respectivement parallèles à deux axes rectangulaires ox, oy. La somme des côtés de ce polygone sera égale à MN + PQ, MN et PQ étant les projections de la corde AL sur les deux axes fixes. Supposons maintenant que les arcs AB, BC, CD, ... tendent vers zéro. Les sommets E, F, G, ... du polygone AEBFCGD pourront s'approcher autant qu'on voudra de la courbe, de telle sorte que ces deux lignes tendront à se confondre. Nous aurons donc une ligne polygonale dont les côtés tendent vers zéro en s'approchant

constamment de la courbe. Le périmètre de ce polygone tend vers une limite fixe et indépendante de la loi suivant laquelle décroissent les côtés, puisqu'il a une valeur constante; et ceci posé, nous adopterons la définition suivante de la longueur de la courbe : c'est la limite vers laquelle tend le périmètre du polygone AEBFCGDHL dont les côtés tendent indéfiniment vers zéro.

A celui qui s'aviserait de raisonner ainsi il n'est personne qui ne réponde, après un instant de réflexion : Vous n'obtiendrez pas ainsi la longueur de la courbe, car il est impossible que celle-ci soit indépendante du tracé de cette ligne entre ses deux points extrêmes, A et L, ce qui serait le cas si elle était égale à la somme des projections de la corde sur les axes. Cela prouve que l'on a la notion de la longueur de la courbe sans en avoir une définition, et que c'est par une intuition indépendante de toute définition que nous saisissons qu'il faut, pour mesurer cette longueur, calculer la limite du périmètre d'un polygone inscrit; il s'agit donc là d'une véritable proposition, et non d'une définition.

Nous pensons, en définitive, qu'il est inutile dans un enseignement élémentaire, d'insister sur la définition de la longueur d'un arc de courbe; qu'on peut montrer que la longueur du périmètre d'un polygone inscrit dans un cercle croît à mesure que le nombre des côtés augmente, et qu'elle tend vers une certaine limite, qui est la même que celle du polygone semblable circonscrit; puis admettre que cette limite donne la mesure de la longueur de l'arc. Quant à démontrer qu'elle est indépendante de la loi suivant laquelle les côtés du polygone tendent vers zéro cela nous paraît une complication inutile. En tout cas c'est une proposition qui ne peut entrer dans les éléments. (Pour la démonstration, voir le n° 203.)

184. Le théorème relatif à la mesure de la surface du cercle se démontre aussi par les deux méthodes; ayant prouvé que l'aire d'un polygone régulier inscrit dans un cercle est égale au périmètre multiplié par la moitié de l'apothème, on en déduit que celle du cercle vaut le produit de la circonférence multipliée par la moitié du rayon. — Par la méthode des limites on conclut immédiatement que, le théorème étant vrai pour un polygone inscrit quelconque, il l'est également pour la limite, qui est le cercle. Par la méthode de la réduction à l'absurde, on prouve que le produit de la circonférence multipliée par la moitié du

rayon ne peut mesurer la surface d'un cercle plus grand, ni celle d'un cercle plus petit que le cercle donné.

Il y a des auteurs qui jugent devoir donner de l'aire de la surface du cercle une définition analogue à celle que Duhamel donne de la longueur d'une courbe. Nous aurons occasion de revenir sur ce point quand nous nous occuperons de la mesure d'une surface courbe (Voir n° 189).

185. D'après certaines personnes ce serait à tort que l'on voudrait introduire la considération des limites dans l'enseignement élémentaire; il paraît cependant difficile de s'en passer. C'est ainsi que le premier lemme sur lequel s'appuie Legendre pour trouver la mesure de la longueur de la circonférence ne peut se démontrer sans l'emploi de cette méthode (voir n°s 181 et 188).

D'ailleurs, alors même qu'il serait possible de se passer complètement des limites, pourquoi proscrire une méthode plus simple, plus générale et non moins rigoureuse que celle de la réduction à l'absurde? Voici l'opinion exprimée par Laplace, dans les séances de l'École normale, sur cette importante question :

« La méthode des limites sert de base au calcul infinitésimal. Pour faciliter l'intelligence de ce calcul, il est utile d'en faire remarquer les premiers germes dans les vérités élémentaires, qu'il convient toujours de démontrer dans les méthodes les plus générales. On donne ainsi à la fois aux élèves, des connaissances, et la méthode pour en acquérir de nouvelles. En continuant de s'instruire, ils ne font que suivre la route qui leur a été tracée, et dans laquelle ils ont contracté l'habitude de marcher, et la carrière des sciences leur devient beaucoup moins pénible. D'ailleurs, le système des connaissances liées entre elles par une méthode uniforme peut mieux se conserver et s'étendre : préférez donc toujours dans l'enseignement les méthodes générales; attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple; et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours les plus faciles. »

Ces réflexions sont très justes et, comme le fait remarquer Lacroix, la prédilection que quelques géomètres témoignent pour des méthodes qu'ils regardent comme plus élémentaires, et qui ne sont en réalité que plus anciennes, n'a aucune raison d'être. Il faut tenir compte des progrès de la science. Les théories anciennes sont des objets d'érudition que les professeurs doivent étudier; mais pour l'enseignement, il est utile de

composer les éléments de manière qu'ils conduisent naturellement aux théories les plus élevées, et d'y introduire les méthodes que les élèves doivent nécessairement connaître dès qu'ils abordent les hautes études.

§ 7. Mesure des solides.

186. Les propositions fondamentales sur lesquelles reposent toutes celles qui se rapportent à la mesure des solides sont les deux suivantes :

1° *Tout prisme droit ou oblique a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur.*

2° *Toute pyramide a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.*

Cette dernière proposition est démontrée dans la plupart des traités élémentaires par la réduction à l'absurde, et en adoptant cette méthode, on peut encore faire la démonstration de plusieurs manières. Nous donnerons ici deux démonstrations qui ont été successivement adoptées par Legendre dans différentes éditions de ses Éléments et une troisième démonstration fondée sur la méthode des limites.

Première démonstration. — Legendre a donné une démonstration qui repose sur le lemme suivant :

Lemme. — *Soit* SABC (fig. 47) *une pyramide triangulaire dont* S *est le sommet et* ABC *la base; si on divise les côtés* SA, SB, SC, AB, AC, BC *en deux parties égales, aux points* D, E, F, G, H, I, *et que par ces points on tire les lignes* DE, EF, DF, EG, FH, EI, GH, GI, *je dis qu'on pourra considérer la pyramide* SABC *comme composée de deux prismes* AGHFDE, EGICFH *équivalents entre eux, et de deux pyramides égales* SDEF, BGIE.

Par suite de la construction, ED est parallèle à BA, et GE à AS; donc la figure ADEG est un parallélogramme. La figure ADFH en est un aussi pour la même raison, donc les trois droites AD, GE, HF, sont égales et parallèles; donc le solide AHGDEF est un prisme.

On prouvera semblablement que les deux figures EFCI, CIGH, sont des parallélogrammes, et qu'ainsi les trois droites EF, IC, GH sont égales et parallèles; donc le solide EGICHF est encore un prisme. Or je dis que ces deux prismes triangulaires sont équivalents entre eux.

En effet, si sur les arêtes GI, GE, GH on forme le parallélipipède GX, le prisme triangulaire GEICFH sera la moitié de ce parallélipipède; d'un autre côté, le prisme AGHFDE est égal aussi à la moitié du paral-

lélipipède GX, puisqu'ils ont même hauteur, et que le triangle AGH, base du prisme, est la moitié du parallélogramme GICH, base du parallélipipède. Donc les deux prismes EGICFH, AGHFDE, sont équivalents entre eux.

Ces deux prismes étant retranchés de la pyramide SABC, il ne reste plus que les deux pyramides SDEF, EGBI ; or je dis que ces deux pyramides sont égales entre elles.

En effet, à cause des côtés égaux, savoir :

$$BE = SE, \quad BG = AG = DE, \quad EG = AD = SD,$$

le triangle BEG est égal au triangle ESD. Par une raison semblable le triangle BEI est égal au triangle ESF; d'ailleurs, l'inclinaison mutuelle des deux plans BEG, BEI est la même que celle des deux plans ESD, ESF, puisque BEG ne fait qu'un seul plan avec ESD, de même que BEI avec ESF. Donc, si pour opérer la superposition des deux pyramides SDEF, EGBI, on place le triangle EBG sur son égal SDE, il faudra que le plan BEI tombe sur le plan ESF ; et puisque les triangles EBI, SEF, sont égaux et semblablement placés, le point I tombera en F, et les deux pyramides SDEF, EGBI, coïncideront.

Donc la pyramide entière SABC est composée de deux prismes triangulaires AGF, GIF, équivalents entre eux, et de deux pyramides égales SDEF, EGBI.

(Cette proposition se trouve dans le 12e livre des éléments d'Euclide).

Corollaire. I. — Du sommet S soit abaissée SO perpendiculaire sur le plan ABC, et soit P le point où cette perpendiculaire rencontre le plan DEF parallèle à ABC; puisque $SD = \frac{1}{2} SA$, on aura $SP = \frac{1}{2} SO$, et le triangle $DEF = \frac{1}{4} ABC$: donc la solidité du prisme

$$AGHFDE = \tfrac{1}{4} ABC \times \tfrac{1}{2} SO,$$

et celle des deux prismes réunis AGHFDE, EGICFH, égale $\frac{1}{4} ABC \times SO$. La somme de ces deux prismes est moindre que la pyramide SABC puisqu'ils y sont contenus ; donc *la solidité d'une pyramide triangulaire est plus grande que le quart du produit de sa base pas sa hauteur*.

Corollaire II. — Si on mène les droites DG, DH, on aura une nouvelle pyramide ADGH qui sera égale à la pyramide SDEF ; car on peut placer la base DEF sur son égale AGH, et alors les angles SDE, SDF, étant égaux aux angles DAG, DAH respectivement, il est visible que DS tombera sur AD et le sommet S sur le sommet D. Or la pyramide

ADGH est moindre que le prisme AGHDEF, puisqu'elle y est contenue; donc chacune des pyramides SDEF, EGBI, est moindre que le prisme AGHDEF; donc la pyramide SABC qui est composée de deux pyramides et de deux prismes, est moindre que quatre de ces mêmes prismes. Or la solidité de l'un de ces prismes est $\frac{1}{8}$ ABC $\times$ SO, et son quadruple $= \frac{1}{2}$ ABC $\times$ SO; *donc la solidité de toute pyramide triangulaire est moindre que la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*

THÉORÈME. — *La solidité d'une pyramide triangulaire est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Soit SABC une pyramide triangulaire quelconque, ABC sa base, SO sa hauteur; je dis que la solidité de la pyramide SABC sera égale au tiers du produit de la surface ABC par la hauteur SO; de sorte qu'on aura

$$\text{SABC} = \tfrac{1}{3}\,\text{ABC} \times \text{SO}.$$

Car, si on nie cette proposition, il faudra que la solidité SABC soit égale au produit de SO par une surface plus grande ou plus petite que $\frac{1}{3}$ ABC.

Soit 1° cette quantité plus grande, en sorte qu'on ait

$$\text{SABC} = \text{SO} \times (\tfrac{1}{3}\,\text{ABC} + \text{M}).$$

Si on fait la même construction que dans la proposition précédente, la pyramide SABC sera partagée en deux prismes équivalents AGHFDE, EGICFH, et en deux pyramides égales SDEF, EGBI. Or la solidité du prisme AGHFDE est DEF $\times$ PO et celle des deux prismes est, par conséquent, DEF $\times$ 2 PO ou DEF $\times$ SO. Retranchons les deux prismes de la pyramide entière; le reste sera égal au double de la pyramide SDEF, de sorte qu'on aura

$$2\,\text{SDEF} = \text{SO} \times (\tfrac{1}{3}\,\text{ABC} + \text{M} - \text{DEF}).$$

Mais, parce que SA est double de SD, la surface ABC est quadruple de DEF, et ainsi

$$\tfrac{1}{3}\,\text{ABC} - \text{DEF} = \tfrac{4}{3}\,\text{DEF} - \text{DEF} = \tfrac{1}{3}\,\text{DEF},$$

donc

$$2\,\text{SDEF} = \text{SO} \times (\tfrac{1}{3}\,\text{DEF} + \text{M}),$$

et en prenant les moitiés de part et d'autre, il en résulte

$$\text{SDEF} = \text{SP} \times (\tfrac{1}{3}\,\text{DEF} + \text{M}).$$

D'où l'on voit que pour avoir la solidité de la pyramide SDEF, il faudra ajouter au tiers de sa base la même surface M qui avait été ajoutée au tiers de la base de la grande pyramide, et multiplier le tout par la hauteur SP de la petite pyramide.

Si l'on divise SD en deux également au point K, et que par le point K on fasse passer le plan KLM parallèle à DEF, lequel rencontre en Q la perpendiculaire SP, la même démonstration prouve que la solidité de la pyramide SKLM sera égale à

$$SQ \times (\tfrac{1}{3}\,KLM + M).$$

Continuant ainsi à former une suite de pyramides dont les côtés décroissent en raison double, et les bases en raison quadruple, on parviendra bientôt à une pyramide S*abc*, dont la base *abc* sera plus petite que 6M. Soit S*o* la hauteur de cette dernière pyramide, et sa solidité, déduite de celle des pyramides précédentes, sera

$$So \times (\tfrac{1}{3}\,abc + M).$$

Mais on a $M > \frac{1}{6}\,abc$, et par conséquent

$$\tfrac{1}{3}\,abc + M > \tfrac{1}{2}\,abc\,;$$

il faudrait donc que la solidité de la pyramide S*abc* fût plus grande que $So \times \frac{1}{2}\,abc$, résultat absurde, puisqu'on a prouvé par le corollaire II de la proposition précédente que la solidité d'une pyramide triangulaire est toujours moindre que la moitié du produit de sa base par sa hauteur; donc 1° il est impossible que la solidité de la pyramide SABC soit plus grande que $SO \times \frac{1}{3}\,ABC$.

Soit 2°

$$SABC = SO \times (\tfrac{1}{3}\,ABC - M)\,;$$

on prouvera, comme dans le premier cas, que la solidité de la pyramide SDEF, dont les dimensions sont deux fois moindres, est égale à

$$SP \times (\tfrac{1}{3}\,DEF - M)\,;$$

et, en continuant la suite des pyramides dont les côtés décroissent en raison double, jusqu'à un terme quelconque S*abc*, on aura de même la solidité de la dernière pyramide

$$Sabc = So \times (\tfrac{1}{3}\,abc - M).$$

Mais les bases ABC, DEF, LKM, ..., *abc* formant une suite décroissante dont chaque terme est le quart du précédent, on parviendra bientôt à un terme plus petit que 12 M ; alors puisque $M > \frac{abc}{12}$, la quantité $\frac{1}{3}\,abc - M$ sera plus petite que $\frac{1}{4}\,abc$; de sorte que la solidité de la pyramide S*abc* sera plus petite que $So \times \frac{1}{4}\,abc$, résultat encore absurde, puisque suivant

le corollaire I de la proposition précédente, la solidité d'une pyramide triangulaire est toujours plus grande que le quart du produit de sa base par sa hauteur; donc 2° la solidité de la pyramide SABC ne peut être plus petite que $SO \times \frac{1}{3} ABC$.

Donc enfin la solidité de la pyramide

$$SABC = \frac{1}{3} SO \times ABC,$$

conformément à l'énoncé du théorème.

Corollaire. — Toute pyramide triangulaire est le tiers du prisme triangulaire de même base et de même hauteur.

Remarque. — Cette démonstration offre encore un exemple de l'inconvénient que présente souvent la méthode synthétique. On ne voit pas immédiatement, dans la première partie de la démonstration, pourquoi il faut continuer les opérations jusqu'à ce qu'on ait $abc < 6M$, ni dans la seconde jusqu'à $abc < 12M$. La mémoire est donc alors le seul guide.

Il n'en est pas de même quand on raisonne comme il suit : (1er cas). Continuant à former une suite de pyramides dont les côtés décroissent en raison double et les bases en raison quadruple, on parviendra à une pyramide dont la solidité sera plus grande que la moitié du produit de la base par la hauteur ; car cette solidité étant

$$SO \times (\tfrac{1}{3} abc + M),$$

il suffira que l'on ait

$$SO \times (\tfrac{1}{3} abc + M) > SO \times \tfrac{1}{2} abc \quad \text{ou} \quad abc < 6M.$$

Or la base abc peut devenir moindre que toute grandeur donnée.

On pourrait raisonner d'une manière analogue dans le second cas.

Deuxième démonstration. — Voici maintenant une deuxième démonstration :

Théorème. — *Deux pyramides triangulaires qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales sont équivalentes.*

Soient SABC, *sabc* (fig. 48) les deux pyramides dont les bases ABC, *abc*, que nous supposons placées sur un même plan, sont équivalentes, et qui ont même hauteur TA ; si ces pyramides ne sont pas équivalentes, soit *sabc* la plus petite, et soit AX la hauteur d'un prisme qui, étant construit sur la base ABC, serait égal à leur différence.

Divisez la hauteur commune AT en parties égales plus petites que AX, et soit h une de ces parties ; par les points de division de la hauteur, faites passer des plans parallèles au plan des bases ; les sections telles

que DEF et *def*, GHI et *ghi* ..., faites par chacun de ces plans dans les deux pyramides seront équivalentes. Cela posé, sur les triangles ABC, DEF, GHI, ... pris pour bases, construisez des prismes extérieurs qui aient pour arêtes les parties AD, DG, GK, ... du côté SA ; de même sur les triangles *def*, *ghi*, *klm*, ..., pris pour bases, construisez dans la seconde pyramide des prismes intérieurs qui aient pour arêtes les parties correspondantes du côté *sa* ; tous ces prismes partiels auront pour hauteur commune *h*.

La somme des prismes extérieurs de la pyramide SABC est plus grande que cette pyramide ; la somme des prismes intérieurs de la pyramide *sabc* est plus petite que cette pyramide ; donc, pour ces deux raisons, la différence entre les deux sommes de prismes devra être plus grande que la différence entre les deux pyramides.

Or, à partir des bases ABC, *abc*, le second prisme extérieur DEFG est équivalent au premier prisme intérieur *defa*, puisque leurs bases DEF, *def*, sont équivalentes, et qu'ils ont une même hauteur *h* ; sont équivalents pour la même raison, le troisième prisme extérieur GHIK et le second intérieur *ghid;* le quatrième extérieur et le troisième intérieur, et ainsi de suite, jusqu'au dernier des uns et des autres. Donc, tous les prismes extérieurs de la pyramide SABC, à l'exception du premier ABCD, ont leurs équivalents dans les prismes intérieurs de la pyramide *sabc*. Donc le prisme ABCD est la différence entre la somme des prismes extérieurs à la pyramide SABC et la somme des prismes intérieurs à la pyramide *sabc;* mais la différence de ces deux sommes est plus grande que la différence des deux pyramides ; donc il faudrait que le prisme ABCD fût plus grand que le prisme ABCX ; or, au contraire, il est plus petit, puisqu'ils ont une même base ABC et que la hauteur *h* du premier est moindre que la hauteur AX du second. Donc l'hypothèse dont on est parti ne saurait avoir lieu ; donc les deux pyramides SABC, *sabc*, de bases équivalentes et de hauteurs égales, sont équivalentes.

Théorème. — *Toute pyramide triangulaire est le tiers du prisme triangulaire de même base et de même hauteur.*

Soit SABC (fig. 49) une pyramide triangulaire : ABCDES un prisme triangulaire de même base et de même hauteur ; je dis que la pyramide est le tiers du prisme.

Retranchez du prisme la pyramide SABC, il restera le solide SACDE qu'on peut considérer comme une pyramide quadrangulaire dont le

sommet est S, et qui a pour base le parallélogramme ACDE. Tirez la diagonale CE, et considérez le plan SCE qui partagera la pyramide quadrangulaire en deux pyramides triangulaires SACE, SDCE. Ces deux pyramides ont pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée du sommet S sur le plan ACDE; elles ont des bases égales puisque les triangles ACE, DCE sont les deux moitiés du même parallélogramme; donc les deux pyramides SAEC, SDCE, sont équivalentes entre elles; mais la pyramide SDCE et la pyramide SABC ont des bases égales ABC, DES; elles ont aussi une même hauteur, car cette hauteur est la distance des plans parallèles ABC, DES. Donc les trois pyramides SABC, SDCE, SACE qui composent le prisme ABD, sont équivalentes entre elles. Donc la pyramide SABC est le tiers du prisme ABD qui a même base et même hauteur.

(Cette proposition se trouve également dans le 12e livre d'Euclide).

Troisième démonstration, par la méthode des limites. — On peut démontrer comme il suit, par la méthode des limites, que deux pyramides de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalentes.

Divisons la hauteur d'une pyramide en un nombre quelconque n de parties égales, et par les points de division menons des plans parallèles à la base, de manière à diviser le solide en n parties, qui seront des troncs de pyramide à bases parallèles, sauf la partie voisine du sommet, qui sera une petite pyramide semblable à la pyramide donnée.

Construisons une série de prismes intérieurs à la pyramide, et une série de prismes extérieurs, analogues à ceux dont on a fait usage dans la démonstration précédente. Si l'on considère le nombre des divisions de la hauteur comme indéfiniment croissant, je dis que *la somme des volumes des prismes intérieurs a pour limite le volume de la pyramide.*

En effet, l'excès du volume de la pyramide sur la somme des prismes intérieurs est moindre que l'excès de la somme des prismes extérieurs sur la somme des prismes intérieurs. Mais ce dernier excès est un prisme qui a même base que la pyramide, et qui a pour hauteur la $n^{\text{ième}}$ partie de la hauteur de cette pyramide. Son volume peut donc devenir aussi petit qu'on le veut en prenant n suffisamment grand. Donc l'excès du volume de la pyramide sur la somme des volumes des prismes intérieurs, peut aussi devenir moindre que toute grandeur donnée; le premier de ces volumes est donc la limite de la somme des volumes des prismes intérieurs.

Si l'on considère maintenant deux pyramides de bases équivalentes, et de même hauteur, on peut inscrire dans chacune un même nombre n de prismes; et ces prismes étant égaux deux à deux, leurs sommes seront équivalentes, et par conséquent les limites de ces sommes seront aussi équivalentes. Donc les volumes de deux pyramides sont équivalents.

§ 8. Du plus court chemin entre deux points sur la sphère.

187. On sait que ce plus court chemin est l'arc de grand cercle moindre qu'une demi-circonférence qui joint les deux points donnés. La démonstration que Legendre donne de cette proposition est obscure. La voici :

Soit ANR (fig. 50) l'arc de grand cercle qui joint A et R, et soit hors de cet arc, s'il est possible, M un point de la ligne la plus courte entre A et R. Par le point M menez les arcs de grands cercles MA, MR, et prenez RN = RM.

Suivant un théorème précédent, l'arc ANR est plus court que AM + MR ; retranchant de part et d'autre RN = RM, il restera AN < AM. Or, la distance de R en M, soit qu'elle se confonde avec l'arc RM, ou qu'elle soit toute autre ligne, est égale à la distance de R et N; car en faisant tourner le plan du grand cercle RM autour du diamètre qui passe par R, on peut amener le point M sur le point N, et alors la ligne la plus courte de M en R, quelle qu'elle soit, se confondra avec celle de N en R; donc les deux chemins de A en R, l'un en passant par M, l'autre en passant par N, ont une partie égale de M en R et de N en R. Le premier chemin est, par hypothèse, le plus court; donc la distance de A en M est plus courte que la distance de A en N, ce qui est absurde, puisque l'arc AM est plus grand que AN; donc aucun point de la ligne la plus courte entre A et R ne peut être hors de l'arc ANR ; donc cet arc est lui-même la ligne la plus courte entre ses extrémités.

Cette démonstration laisse à désirer parce qu'on n'a pas prouvé que si l'arc AM est plus grand que AN, le plus court chemin de A en N est moindre que celui de A en M; on ignore ce qu'est ce plus court chemin ; l'affirmation de Legendre n'offre donc pas à priori le caractère de l'évidence. Mais la démonstration devient très lumineuse, si on établit deux lemmes préliminaires, comme le fait Blanchet.

LEMME I. — *Le plus court chemin du pôle* P *d'un cercle à tous les points de sa circonférence* ABD, *est le même pour tous ces points* (fig. 50).

En effet, à tout chemin PGB qu'on peut suivre pour aller du pôle P à un point donné B de la circonférence, correspond un chemin de même longueur allant de P à un autre point quelconque A de cette circonférence ; car, la sphère pouvant tourner autour du diamètre PE sans sortir du lieu qu'elle occupe, on peut placer la ligne PGB, sur cette sphère, de manière qu'elle aille de P en A. Donc, en particulier, au plus court chemin de P en B correspond un plus court chemin égal de P en A. Cette démonstration diffère un peu de celle de Blanchet, qui ne semble pas bien correcte.

Lemme II. — *Soient* AB, AC (fig. 51), *deux arcs de grands cercles moindres qu'une demi-circonférence, et soit* AC $<$ AB ; *je dis que le plus court chemin de* A *en* C *est moindre que celui de* A *en* B.

En effet, décrivons du point A comme pôle, et avec l'intervalle AC pour rayon, un cercle qui coupera nécessairement l'arc AB en L entre A et B, et soit AMB la ligne la plus courte entre A et B ; cette ligne rencontrera le cercle CL en un point M et la ligne AM sera le plus court chemin de A en M ; car s'il existait une ligne plus courte entre ces deux points, AMB ne serait pas le plus court chemin de A en B, ce qui est contraire à l'hypothèse. D'ailleurs, d'après le lemme précédent, le plus court chemin de A en M est égal à celui de A en C ; donc le plus court chemin de A en C est moindre que celui de A en B.

Ces deux lemmes étant établis, le reste se démontre comme dans Legendre.

Remarque. — Les auteurs qui n'admettent pas qu'on puisse parler de la longueur d'une courbe sans en avoir donné une définition spéciale doivent suivre une marche plus compliquée. Voici, par exemple, celle que l'on trouve dans la géométrie de Catalan :

1° Une droite ne peut être plus petite que sa projection sur un plan.

2° Une droite est plus petite que la somme de ses projections sur deux plans perpendiculaires entre eux.

3° Une ligne brisée est plus petite que la somme de ses projections sur deux plans perpendiculaires.

4° Si dans une courbe quelconque, plane ou à double courbure, on inscrit une série de polygones dont les côtés diminuent indéfiniment, de manière à devenir moindres que toute droite donnée, les périmètres de ces polygones tendent vers une certaine limite fixe. Cette limite est ce qu'on appelle la longueur de la courbe.

Après avoir démontré successivement ces propositions, et étendu comme on vient de l'indiquer la définition de la longueur d'une courbe au cas où celle-ci n'est pas dans un plan, l'auteur continue en suivant une marche peu différente de celle qui se trouve dans Blanchet.

Nous avons fait observer (n° 183) qu'on peut concevoir la longueur d'une courbe indépendamment de la définition qu'on en donne ici, et qui est plutôt une proposition relative à la mesure de cette longueur.

§ 9. Surfaces et volumes des trois corps ronds.

188. Les théorèmes relatifs aux surfaces et aux volumes du cylindre et du cône se déduisent aisément de ceux qui ont été établis précédemment pour les prismes et les pyramides.

Quant à la sphère, pour connaître l'expression de sa surface et de son volume, on calcule préalablement la surface et le volume engendrés par une portion de polygone régulier inscrit dans un arc de grand cercle qui tourne autour d'un de ses diamètres. Le polygone régulier inscrit n'a pas nécessairement ici pour angle au centre une subdivision exacte de quatre angles droits. Il suffit que les arcs sous-tendus par les côtés soient égaux ; ces arcs pourraient même n'avoir pas de commune mesure avec la circonférence.

On peut, d'ailleurs, résoudre ces questions soit par la réduction à l'absurde, soit par la méthode des limites.

Legendre emploie la réduction à l'absurde. Pour établir les propositions relatives à la mesure des surfaces des corps ronds, il s'appuie sur deux lemmes préliminaires dont voici les énoncés :

1° *Une surface plane est plus petite que toute autre surface terminée au même contour et* 2° *toute surface convexe est moindre qu'une autre quelconque qui envelopperait la première en s'appuyant sur le même contour.* Nous ne reproduirons que la démonstration qu'il donne de ce dernier :

Si la surface OABCD (fig. 52) n'est pas plus petite que toutes celles qui l'enveloppent, soit parmi celles-ci PABCD la surface la plus petite, qui sera au plus égale à OABCD. Par un point quelconque O, faites passer un plan qui touche la surface OABCD sans la couper ; ce plan rencontrera la surface PABCD ; et en vertu du premier lemme, la partie qu'il en retranchera sera plus grande que le plan terminé à la même surface : donc

en conservant le reste de la surface PABCD, on pourrait substituer ce plan à la partie retranchée, et on aurait une nouvelle surface qui envelopperait toujours la surface OABCD, et qui serait plus petite que PABCD.

Mais celle-ci est la plus petite de toutes par hypothèse ; donc cette hypothèse ne saurait subsister ; donc la surface convexe OABCD est plus petite que toute autre surface qui envelopperait OABCD et qui serait terminée au même contour ABCD.

Cette démonstration est incomplète ; pourquoi, en effet, ne s'appliquerait-elle pas au cas où la surface OABCD ne serait pas entièrement convexe ? Au fond, ce que prouve le raisonnement, c'est qu'on peut considérer une série de surfaces enveloppantes dont chacune est moindre que la précédente, mais qui, ne pouvant devenir nulles, tendent vers une certaine limite.

Que sera cette limite ? Ce sera la surface même que toutes les autres enveloppent, si cette surface est entièrement convexe ; mais dans le cas contraire, la limite se composera d'une portion de cette surface, et d'une portion de surface développable, engendrée par le roulement d'un plan bitangent, et circonscrite à la surface donnée le long d'une certaine courbe. Chaque génératrice de la surface développable toucherait la surface donnée en deux points de cette courbe de contact.

On voit donc que, non seulement la démonstration conduit à la considération des limites, mais encore à des considérations qui sortent du cadre des éléments, quand on adopte la marche de Legendre.

Si l'on voulait démontrer qu'une surface plane est plus petite qu'une surface convexe terminée au même contour, il faudrait imaginer un polyèdre inscrit dans cette dernière et projeter orthogonalement les facettes de ce polyèdre sur le plan terminé au même contour. On démontrerait sans peine que chaque facette est plus grande que sa projection ou lui est au moins égale et, en passant à la limite, que la surface convexe est plus grande que la surface plane terminée au même contour. Il est aisé de voir que des considérations analogues permettraient de démontrer le second lemme de Legendre. Mais il est tout aussi rigoureux et il est, d'autre part, beaucoup plus simple, de regarder immédiatement les surfaces du cylindre, du cône et de la sphère, comme limites de certaines surfaces inscrites, et de procéder d'une manière analogue pour les volumes.

189. Quelques auteurs, entre autres Duhamel, font remarquer qu'une surface courbe ne peut être superposée à une surface plane; et ils en concluent qu'il est nécessaire de définir l'aire d'une surface courbe.

La définition qu'ils en donnent est la suivante : l'aire d'une surface courbe est la limite de celle d'un polyèdre inscrit dont les faces tendent indéfiniment vers zéro. Ils établissent, d'ailleurs, que cette limite est indépendante de la loi suivant laquelle varie le polyèdre inscrit.

Nous pensons que le reproche adressé par Duhamel aux auteurs qui ne définissent pas d'une manière spéciale la longueur d'une courbe et l'aire d'une surface courbe, doit être écarté et que les définitions qu'il propose n'en sont réellement pas, mais doivent plutôt être considérées comme des propositions qu'il faut démontrer, ou admettre à priori, pour fonder sur elles les théorèmes relatifs à la *mesure* de la longueur d'une courbe, et de l'aire d'une surface courbe.

Nous avons déjà dit qu'il nous paraît possible de concevoir, indépendamment de la définition qu'en donne Duhamel, ce qu'on entend par longueur d'une courbe (n° 183). Ce n'est, en définitive, autre chose qu'une certaine grandeur, qui peut subir une augmentation ou une diminution susceptible de mesure. De même, l'aire d'une surface, plane ou courbe, peut être considérée comme une grandeur d'une espèce particulière, variable dans sa forme, mais qu'il n'est pas nécessaire de définir pour chaque forme nouvelle. Que l'on propose à un peintre de couvrir d'une couche de vernis une tablette carrée d'un mètre de côté et une sphère d'un mètre de rayon, et qu'on lui demande quelle surface est la plus grande. Il comprendra parfaitement ce qu'on entend par surface, il verra très bien qu'il s'agit de deux grandeurs de même espèce, comparables entre elles. A la vérité il pourra être très embarrassé s'il s'agit de trouver une mesure un peu précise de la surface de la sphère; mais il dira sans hésiter que cette surface est plus grande que celle du plan. Des considérations de ce genre s'appliquent aux longueurs, aux surfaces, aux volumes.

Les corps font naître dans notre esprit la notion de l'étendue : un corps quelconque a une certaine étendue qu'on peut concevoir augmentée ou diminuée, et qui constitue par conséquent une grandeur géométrique susceptible de mesure; à cette grandeur on a donné le nom de *volume* ou *solidité du corps;* dans chaque cas particulier, pour chaque forme du corps, on ne devra pas chercher une définition nouvelle du volume;

celui-ci sera considéré comme une grandeur qui peut n'être pas actuellement mesurée, mais dont on pourra trouver la mesure en faisant usage de certaines propositions qu'il faudra préalablement établir. Le mot volume est, d'ailleurs, employé pour désigner, tantôt une grandeur, tantôt le nombre qui en donne la mesure.

Passons maintenant aux surfaces. Les corps sont limités, et la limite extérieure d'un corps est ce qu'on nomme sa *surface*. Celle-ci est une grandeur puisqu'on peut en détacher une partie plus ou moins étendue, par conséquent susceptible d'augmentation, de diminution et de mesure. Pour chaque forme particulière on ne cherchera pas une définition nouvelle de la surface ou de l'aire, mais on établira les propositions sur lesquelles on se fonde pour la mesurer. On emploie encore fréquemment les mots surface ou aire pour désigner le nombre qu'on obtient quand on mesure cette aire.

Enfin une portion de surface est terminée par un contour appelé ligne ; et si la surface est limitée de toutes parts, son contour sera fermé. On peut prendre une portion plus ou moins étendue de cette ligne ; ce sera donc encore une grandeur susceptible de mesure, à laquelle on donnera le nom de *longueur;* dans chaque cas particulier, il ne faudra plus définir la longueur, mais simplement montrer comment on peut obtenir le nombre qui en donne la mesure. A ce nombre on donne aussi fréquemment le nom de longueur.

Chacun des mots volume ou solidité, aire ou surface, et finalement longueur, est donc employé à peu près indifféremment pour nommer deux choses distinctes ; on les emploie parfois pour désigner certaines grandeurs susceptibles de mesure, parfois aussi pour désigner les nombres mêmes qui sont les résultats de cette mesure. Diverses propositions, que l'on établit pour trouver la mesure de chacune des grandeurs en question, nous apprennent à considérer celles-ci comme limites de certaines autres grandeurs variables. Mais ce serait à tort qu'on regarderait ces propositions comme les définitions des grandeurs qu'il s'agit de mesurer. Nous avons déjà développé cette idée en ce qui concerne la longueur d'une courbe (Voir n° 183).

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une surface courbe et imaginons qu'on y ait inscrit un polyèdre dont le nombre des sommets croisse indéfiniment, leurs côtés tendant vers zéro ; on verra que la surface extérieure de ce polyèdre différera de moins en moins de la surface courbe,

à mesure que le nombre des sommets ira en augmentant; et on verra aussi que la surface du polyèdre tendra vers une certaine limite qui ne sera autre chose que la surface courbe elle-même. De sorte que la mesure de la surface du polyèdre donnera, à la limite, celle de la surface dans laquelle il est inscrit.

Nous avons ainsi une proposition, qu'on peut considérer comme évidente et qui remplace la définition donnée par Duhamel. Il est vrai qu'une surface courbe étant donnée, on peut prouver que la limite vers laquelle tend l'aire d'un polyèdre inscrit dont le nombre des sommets croît indéfiniment est indépendante de la loi suivant laquelle ce nombre augmente; mais comme nous croyons l'avoir démontré (n° 186) à propos de la longueur d'une courbe, il ne suffirait pas de dire ensuite que *par définition*, cette limite est l'aire de la surface courbe, si l'on ne voyait clairement que cette limite donne la mesure de la surface dont il s'agit. Or, c'est là ce qui est indispensable pour les applications, mais c'est aussi ce qu'aucune démonstration ne peut nous apprendre. C'est une vérité que nous percevons indépendamment du théorème relatif à la limite commune de tous les polyèdres inscrits, et qui nous permettrait même de conclure que cette limite ne peut varier, si nous n'avions aucun moyen de le vérifier autrement. Nous dirons même que les démonstrations qu'on en donne n'en augmentent pas l'évidence. Elles sont en tout cas très difficiles et ne peuvent trouver place dans les éléments (voir n° 203).

Certains géomètres croient devoir donner de l'aire d'une surface plane terminée par une courbe, de l'aire du cercle par exemple, une définition analogue à celle qu'ils donnent de la longueur d'une courbe et de l'aire d'une surface courbe. Ils définissent l'aire d'une courbe plane, *la limite des aires des polygones inscrits d'un nombre de côtés indéfiniment croissant*; et ils jugent nécessaire de prouver que cette limite est indépendante de la loi suivant laquelle les côtés du polygone décroissent.

Pour justifier cette manière de procéder que nous n'approuvons pas, mais qui est cependant plus logique que celle de Duhamel, ils font remarquer que quelque petites que soient les parties d'unité de surface qu'on place dans le cercle il est impossible de le remplir entièrement; et qu'ainsi on est forcé de définir l'aire du cercle comme il est dit plus haut.

On voit cependant que ce qu'on donne ici comme définition de l'aire du cercle est en réalité une proposition qui sert de base à la mesure de cette aire. On aurait beau démontrer que l'aire d'un polygone inscrit

dont le nombre de côtés croît indéfiniment a une limite indépendante de la loi d'inscription, et convenir ensuite que cette limite commune est appelée l'aire du cercle, cela ne serait d'aucune utilité, si l'on ne voyait clairement, par intuition, que cette limite ou cette aire, comme on voudra l'appeler, donne précisément la mesure de la surface renfermée dans le cercle.

Or, ici cela se voit avec évidence, parce qu'on peut en quelque sorte épuiser la surface qu'il s'agit de mesurer, en augmentant indéfiniment le nombre des côtés du polygone et c'est probablement pour ce motif que Duhamel ne croit pas devoir donner de l'aire du cercle une définition analogue à celle qu'il donne de l'aire d'une surface courbe. Il est également évident que la limite de l'aire du polygone inscrit est indépendante de la loi suivant laquelle on fait décroître les côtés. Car, de quelque façon qu'on procède à la mesure de la surface du cercle, pourvu qu'on épuise toutes les parties qui la composent, on doit toujours trouver le même résultat.

Ce que nous venons de dire de l'aire du cercle s'applique également au volume du cône, du cylindre et de la sphère.

Nous ferons encore observer que s'il était nécessaire de donner une définition spéciale de l'aire du cercle, et du volume de la sphère, il ne serait pas moins nécessaire, et c'est ce que font certains auteurs(*), de définir le volume de la pyramide triangulaire. Car, on ne peut remplir une pyramide au moyen de prismes, quelque petits qu'ils soient, pas plus qu'on ne peut remplir la surface du cercle au moyen de petits rectangles ou de fractions de rectangle.

Il résulte de ces explications qu'on emploie dans deux acceptions les mots : volume, aire et longueur ; ils désignent tantôt certaines grandeurs concrètes, susceptibles de mesure, mais non actuellement mesurées, et tantôt les nombres qu'on obtient par la mesure de ces grandeurs. C'est une imperfection du langage ; mais il n'en résulte pas d'inconvénient sérieux. Quand un de ces mots se rencontre, le sens de la phrase indique toujours clairement dans quelle acception il est employé.

(*) Voir notamment les *Éléments de Géométrie de* E. CATALAN.

CHAPITRE V.

DE L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

ET DES

PRINCIPALES MÉTHODES QUI PEUVENT Y SUPPLÉER.

§ 1. Idée fondamentale commune à toutes ces méthodes.

190. Il y a dans la géométrie élémentaire deux genres de questions qui exigent l'emploi du calcul infinitésimal ou de quelque méthode équivalente. Ce sont, d'une part, les questions où pour démontrer la proportionnalité de deux grandeurs, on doit passer du cas où les rapports sont commensurables à celui où ces rapports sont incommensurables ; d'autre part, celles où il s'agit de passer de la mesure des figures terminées par des lignes droites et des plans, à d'autres limitées par des lignes ou des surfaces courbes. C'est pourquoi nous devons nous occuper de cette méthode et de quelques autres équivalentes qui ont été proposées pour y suppléer. Nous n'entrerons pas dans les détails de l'histoire du calcul infinitésimal. Nous nous bornerons à renvoyer pour ceux-ci au *Résumé du cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand*, par M. P. Mansion, ou à son *Esquisse de l'histoire du Calcul infinitésimal*, qui est un extrait du dit cours.

Tous les raisonnements qu'on emploie pour vaincre la difficulté qui se présente dans les questions où l'on passe du fini à l'infini, renferment les mêmes idées fondamentales. Ils reviennent à substituer aux quantités qu'on se propose d'étudier, d'autres quantités qui simplifient les solutions et qui peuvent approcher autant qu'on le veut des premières.

C'est dans la méthode des infiniments petits, inventée par Leibnitz, que cette substitution se montre de la manière la plus évidente. Par exemple, une courbe est regardée par lui comme un polygone d'un nombre infini de côtés dont chacun est infiniment petit. Cette méthode est la plus commode, la plus rapide, et par là même, peut-on dire, la plus féconde. Mais elle manque de rigueur, au moins quand on l'interprète comme l'ont fait la plupart des auteurs qui s'en sont servis après son illustre inventeur.

Nous montrerons, d'après Carnot, pourquoi elle conduit à des résultats exacts quand elle est appliquée d'une manière convenable, alors même que par une interprétation incorrecte, elle semble perdre son caractère de méthode rigoureuse.

§ 2. Exhaustion. — Limites. — Infiniment petits et quantités évanouissantes.

191. *Méthode d'exhaustion.* — On donne le nom de méthode d'exhaustion à celle dont se servaient les géomètres anciens; ils exigeaient une entière rigueur des démonstrations mathématiques; aussi n'auraient-ils pas admis des raisonnements fondés sur la considération des infiniment petits; ils n'auraient pas admis, par exemple, qu'une courbe peut être regardée comme un polygone d'un nombre infini de côtés.

Toutefois, pour découvrir les propriétés d'une courbe, ils étudiaient d'abord les propriétés des polygones inscrits; et quand ils reconnaissaient que certaines d'entre elles étaient indépendantes du nombre des côtés, ils apercevaient qu'elles devaient appartenir aussi à la courbe; mais ils ne se contentaient pas de les avoir ainsi trouvées par une sorte d'intuition, ils en donnaient ensuite la démonstration par la réduction à l'absurde.

C'est ainsi, nous l'avons déjà dit, qu'Euclide, pour prouver que les surfaces de deux cercles sont entre elles comme les carrés des rayons, montre d'abord que l'excès d'un cercle sur un polygone régulier inscrit peut devenir aussi petit qu'on le veut, quand on considère une série de polygones dont chacun a un nombre de côtés double de celui du précédent.

De l'excès du cercle sur le premier polygone, on ôte plus de sa moitié en passant au second polygone; puis on ôte encore plus de la moitié de l'excès du cercle sur le second polygone, en passant au troisième, et

ainsi de suite. On épuise donc en quelque sorte la différence entre les deux figures, et c'est ce qui a fait donner à la méthode le nom de méthode d'exhaustion. Comme les surfaces des polygones réguliers semblables inscrits dans deux cercles restent proportionnelles aux carrés des rayons tandis que l'on épuise les excès des deux cercles sur les polygones, on voit que la même propriété existe pour ces cercles; et on prouve ensuite que toute hypothèse contraire à l'existence de cette propriété conduit à une conséquence absurde.

192. *Méthode des limites.* — Newton, qui est l'inventeur de cette méthode, lui a encore donné le nom de méthode des premières et dernières raisons. Elle consiste à trouver la relation qui existe entre certaines grandeurs en substituant à celles-ci des grandeurs variables qui tendent vers des limites fixes dont elles peuvent approcher autant qu'on le veut; de telle sorte que la différence entre une de ces quantités variables et sa limite peut devenir et rester moindre que toute quantité donnée; cette différence peut donc approcher de zéro autant qu'on le veut.

Par l'application de cette méthode on supprime la démonstration à postériori par réduction à l'absurde.

Elle a l'avantage d'être rigoureuse; mais les notations dont on y fait usage sont moins commodes que celles de Leibnitz. Toutefois nous verrons plus loin qu'on peut présenter la méthode des limites sous une forme qui permet d'y appliquer la notation des infiniment petits. Elle devient alors ce qu'on a appelé la *méthode d'assimilation.*

193. *Infiniment petits.* — Leibnitz a établi les règles du calcul des infiniment petits sur ce principe, qu'on peut prendre l'une pour l'autre deux grandeurs finies qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite.

On lui reprocha : 1° d'employer l'expression quantité infiniment petite sans l'avoir définie; 2° de laisser en quelque sorte douter s'il fallait regarder son calcul comme rigoureux ou comme une méthode d'approximation.

Ces reproches ne semblent pas fondés. En ce qui concerne le premier, on peut répondre que Leibnitz a donné une définition des différentielles qui revient à celle qu'en ont donnée plus tard Cauchy, puis Duhamel; et

quant au second, Leibnitz y répondit en faisant voir, par la solution des problèmes les plus difficiles, la fécondité de sa méthode et l'accord constant de ses résultats avec ceux de l'analyse ordinaire.

Néanmoins il ne réussit pas à jeter assez de lumière sur le principe fondamental de ses calculs pour que ceux qui s'en sont servis après lui l'aient toujours sainement interprété. Un grand nombre d'entre eux ont considéré les infiniment petits comme des quantités qui sont effectivement plus petites que toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit ; et par conséquent comme des quantités qu'on peut négliger, en comparaison des quantités finies, sans qu'il en résulte aucune erreur dans les résultats du calcul.

Voici, par exemple, comment raisonne Poisson dans sa *Mécanique :* Un infiniment petit est une grandeur moindre que toute grandeur donnée de même nature. Ainsi, le temps croît par des degrés moindres qu'aucun intervalle qu'on puisse assigner. Les infiniment petits ont donc une existence réelle, et ne sont pas seulement un moyen d'investigation imaginé par les géomètres. Le principe fondamental de l'analyse infinitésimale consiste en ce que deux quantités finies, qui ne diffèrent l'une de l'autre que d'un infiniment petit, doivent être regardées comme égales puisqu'on ne saurait assigner entre elles aucune inégalité, aussi petite que l'on voudra.

De son côté Cournot, dans son *Traité élémentaire de la Théorie des fonctions et du Calcul infinitésimal* développe longuement cette idée que les infiniment petits *existent dans la nature* et que pour ce motif la méthode infinitésimale est mieux appropriée à la nature des choses que la méthode des limites.

Mais considérer comme égales deux quantités dont la différence n'est pas absolument nulle est contraire à la rigueur mathématique ; et si on néglige une quantité *très petite mais différente de zéro* on voit bien que l'erreur qui pourra en résulter sera très petite, mais peut-on affirmer qu'elle est nulle ?

Certaines personnes, dit Carnot, se bornent à regarder les quantités infiniment petites comme des *incomparables* dans le sens qu'un grain de sable est incomparable par sa petitesse avec le globe entier de la terre ; car alors, disent-elles, les erreurs commises sont inappréciables. Mais l'analyse infinitésimale, envisagée de cette manière, ne serait plus qu'une méthode d'approximation, tandis qu'elle est parfaitement rigoureuse.

194. *Quantités évanouissantes.* — Ce défaut de rigueur a fait imaginer la théorie des *quantités évanouissantes*, dans laquelle on considère les quantités infiniment petites comme absolument nulles. La métaphysique du calcul infinitésimal est exposée sous ce point de vue dans la préface du calcul différentiel d'Euler. Le calcul différentiel, suivant ce grand géomètre, est l'art de trouver le rapport des accroissements évanouissants que prennent des fonctions quelconques lorsqu'on attribue à la quantité variable dont elles sont fonctions, un accroissement évanouissant.

Cette méthode, dit Lagrange, a le grand inconvénient de considérer les quantités dans l'état où elles cessent, pour ainsi dire, d'être des quantités. Car quoiqu'on conçoive toujours bien le rapport de deux quantités, tant qu'elles demeurent finies, ce rapport n'offre plus à l'esprit une idée claire et précise, aussitôt que les termes deviennent l'un et l'autre nuls à la fois.

Cette objection de Lagrange est irréfutable, à moins qu'on n'attache aux rapports des quantités évanouissantes l'idée de limite ; et le calcul des quantités évanouissantes deviendrait ainsi identique à la méthode des limites. On ne pourrait plus séparer les deux termes du rapport de deux quantités évanouissantes.

Il est donc impossible de justifier le calcul infinitésimal par la considération des incomparables, ou par celle des quantités évanouissantes ; mais nous allons faire voir d'après Carnot, que si le calcul différentiel, judicieusement employé, donne des résultats exacts alors qu'on considère les infiniment petits comme des quantités différentes de zéro mais négligeables, c'est qu'il s'établit une compensation entre des erreurs de sens opposés (*).

§ 3. Équations imparfaites et théorie de la compensation des erreurs.

195. Proposons-nous de mener une tangente au point donné M de la circonférence MBD (fig. 53); soit C le centre du cercle, DCB l'axe des x. Supposons l'abscisse $DP = x$, l'ordonnée correspondante $MP = y$, et soit TP la sous-tangente cherchée.

Pour la trouver, considérons le cercle comme un polygone d'un très

(*) Voir : Carnot, *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal.*

grand nombre de côtés, et soit MN l'un deux. Prolongeons-le jusqu'à l'axe des x; ce sera évidemment la tangente. Abaissons de plus la perpendiculaire MO sur NQ, parallèle à MP, et nommons a le rayon du cercle ; cela posé, on a

$$\mathrm{MO} : \mathrm{NO} = \mathrm{TP} : \mathrm{MP} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{NO}} = \frac{\mathrm{TP}}{y}.$$

D'autre part, l'équation de la courbe étant pour le point M,

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

elle sera pour le point N,

$$(y + \mathrm{NO})^2 = 2a(x + \mathrm{MO}) - (x + \mathrm{MO})^2;$$

et celle-ci devient, en ayant égard à la précédente :

$$\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{NO}} = \frac{2y + \mathrm{NO}}{2a - 2x - \mathrm{MO}};$$

égalant les deux valeurs de $\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{NO}}$ il vient

$$\mathrm{TP} = \frac{y(2y + \mathrm{NO})}{2a - 2x - \mathrm{MO}}.$$

Or, les quantités MO et NO sont très petites, puisqu'elles sont moindres chacune que le côté MN qui, par hypothèse, est lui-même très petit. Donc on peut négliger sans erreur sensible ces quantités, par comparaison aux quantités $2y$ et $2a - 2x$, ce qui donne $\mathrm{TP} = \frac{y^2}{a - x}$.

Si ce résultat n'est pas absolument exact, il est au moins évident que dans la pratique il peut passer pour tel, puisque les quantités MO, NO sont extrêmement petites; mais quelqu'un qui n'aurait aucune idée de la doctrine des infinis serait peut-être étonné, dit Carnot, si on lui faisait remarquer que l'équation $\mathrm{TP} = \frac{y^2}{a - x}$ est exacte. C'est cependant ce dont il est facile de s'assurer; et ce qui n'avait été regardé d'abord que comme une simple méthode d'approximation conduit donc, au moins en certains cas, à des résultats exacts. Dès lors, il serait intéressant de savoir distinguer ceux où cela arrive, d'avoir un moyen d'y ramener les autres autant qu'il est possible, et de changer ainsi cette méthode d'approximation en un calcul rigoureux. Or, tel est l'objet de l'analyse infinitésimale.

Voyons donc d'abord comment il se fait qu'en négligeant MO et NO dans l'équation

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO},$$

le résultat devient exact.

Remarquons que l'hypothèse d'où l'on est parti étant fausse, puisqu'il n'est pas possible de considérer un cercle comme un polygone, il a dû résulter de là une erreur dans l'équation

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO};$$

et le résultat $TP = \frac{y^2}{a - x}$ étant néanmoins exact, non seulement on a pu, mais même on a dû négliger MO et NO dans la première équation pour détruire l'erreur à laquelle avait donné lieu la fausse hypothèse d'où l'on était parti. Négliger les quantités de cette nature est donc non seulement permis en pareil cas, mais nécessaire.

Le résultat exact $TP = \frac{y^2}{a - x}$ n'a donc été obtenu que par une compensation d'erreurs; et cette compensation peut être rendue plus sensible encore, en traitant l'exemple rapporté ci-dessus d'une manière un peu différente.

Pour cela par un point R, pris arbitrairement à une distance quelconque du point M, soit menée la ligne RS, parallèle à MP, et par les points R et M soit tirée la sécante RT'; nous aurons évidemment

$$T'P : MP = MZ : RZ$$

et partant

$$T'P \quad \text{ou} \quad TP + TT' = MP \cdot \frac{MZ}{RZ}.$$

Cela posé, si nous imaginons que RS se meuve parallèlement à elle-même en s'approchant continuellement de MP, il est visible qu'on pourra rendre la ligne T'T aussi petite qu'on voudra. Donc si je néglige cette quantité T'T, il en résultera une erreur dans l'équation $TP = MP \cdot \frac{MZ}{RZ}$; mais cette erreur pourra être atténuée autant qu'on le voudra en faisant approcher autant qu'il sera nécessaire RS de MP.

Pareillement, nous avons l'équation

$$\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{RZ}}=\frac{2y+\mathrm{RZ}}{2a-2x-\mathrm{MZ}},$$

qui est exacte quelles que soient les valeurs de MZ et de RZ. Mais plus RS approchera de MP, plus ces lignes MZ et RZ seront petites; et partant, si on les néglige, l'erreur qui en résultera dans l'équation $\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{RZ}}=\frac{y}{a-x}$, pourra, comme la première, être rendue aussi petite qu'on le jugera à propos.

Cela étant, sans avoir égard à des erreurs que je serai toujours maître d'atténuer autant que je le voudrai, je traite les équations

$$\mathrm{TP}=\mathrm{MP}\cdot\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{RZ}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{RZ}}=\frac{y}{a-x},$$

comme si elles étaient exactes; substituant donc dans la première, la valeur de $\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{RZ}}$, tirée de l'autre, je trouve $\mathrm{TP}=\frac{y^2}{a-x}$, comme ci-dessus.

Ce résultat est exact, et cependant les équations d'où il a été tiré sont fausses toutes deux. Il faut, par conséquent, que les erreurs se soient compensées par la comparaison des deux équations erronées.

Voilà donc le fait des erreurs compensées bien établi; il s'agit maintenant de rechercher le signe auquel on reconnaît que la compensation a lieu dans les calculs semblables au précédent, et les moyens de la produire dans chaque cas particulier.

Il suffit pour cela de remarquer que les erreurs commises dans les équations

$$\mathrm{TP}=y\frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{RZ}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{RZ}}=\frac{y}{a-x},$$

pouvant être rendues aussi petites qu'on le veut, celle qui aurait lieu, s'il s'en trouvait une dans l'équation résultante $\mathrm{TP}=\frac{y^2}{a-x}$, pourrait également être rendue aussi petite qu'on le voudrait, et qu'elle dépendrait de la distance arbitraire des lignes MP, RS. Or, cela n'est pas puisque, le point M par où doit passer la tangente étant donné, il ne se trouve aucune des quantités a, x, TP, y de cette équation, qui soit arbitraire et que par conséquent, si une erreur existait dans l'équation, ce serait une erreur constante, que l'on ne pourrait faire décroître en disposant des quantités indéterminées. Donc il ne peut y avoir, en effet, aucune erreur dans cette équation.

Il suit de là que la compensation des erreurs se manifeste dans le résultat par l'absence des quantités RZ et MZ qui causaient ces erreurs, et que par conséquent, après avoir introduit ces quantités dans le calcul pour faciliter l'expression des conditions du problème, et les avoir traitées comme nulles par comparaison aux quantités proposées afin de simplifier les équations, il n'y a qu'à éliminer ces mêmes quantités des équations où elles peuvent se trouver encore, pour faire disparaître les erreurs qu'elles avaient occasionnées, et obtenir un résultat qui soit parfaitement exact.

196. Pour généraliser ces idées, Carnot divise toutes les quantités admises dans un calcul en trois classes : 1° Celles qui se trouvent déterminées et invariables par la nature même de la question ; par exemple les paramètres des courbes ; 2° Celles qui sont d'abord variables, comme les coordonnées, les tangentes, les normales, etc., mais auxquelles on attribue ensuite des valeurs déterminées lorsqu'on veut en découvrir les propriétés ou les relations ; 3° Enfin celles qui, étant plus ou moins indépendantes des quantités prises dans les deux premières classes, demeurent aussi plus ou moins arbitraires jusqu'à ce que le calcul soit entièrement achevé, et que pour cette raison il appelle *quantités toujours variables.*

Mais quoique les quantités de cette troisième classe demeurent toujours variables, elles ne sont pas pour cela entièrement arbitraires ; et de même que les simples variables qui composent la seconde classe sont liées avec les constantes qui composent la première, de même aussi les quantités toujours variables sont liées avec les variables ordinaires et les données, tant par les conditions mêmes de la question que par les hypothèses sur lesquelles le calcul est établi.

Carnot appelle *quantité infiniment petite* toute quantité qui est considérée comme continuellement décroissante, tellement qu'elle puisse être rendue aussi petite qu'on le veut, sans qu'on soit obligé pour cela de faire varier celles dont on cherche la relation.

Lorsqu'on veut trouver la relation de certaines quantités proposées, les unes constantes, les autres variables, on considère le système général comme parvenu à un état déterminé qu'on regarde comme fixe ; puis on compare ce système fixe avec d'autres états du même système, qui se rapprochent continuellement du premier, jusqu'à en différer aussi peu qu'on le veut. Ces autres états sont donc des systèmes auxiliaires,

que l'on fait intervenir pour faciliter les comparaisons entre les parties du premier. Les différences des quantités qui se correspondent dans tous ces systèmes, peuvent donc être supposées aussi petites qu'on le veut, sans rien changer aux quantités qui composent le premier. Ces différences sont par conséquent de la nature des quantités que nous avons appelées infiniment petites, puisqu'elles sont considérées comme continuellement décroissantes, et comme pouvant devenir aussi petites qu'on le veut, sans que pour cela on soit obligé de rien changer à la valeur de celles dont on cherche la relation.

Les infiniment petits, tels que les conçoit Carnot, ne sont donc pas actuellement nuls, ni même des quantités très petites; leur caractère essentiel est d'être indéterminés, et de pouvoir décroître jusqu'à zéro.

L'unité divisée par une quantité infiniment petite est ce qu'il appelle une *quantité infinie*, *ou infiniment grande*. Les infiniment grands, et les infiniment petits de divers ordres de grandeur sont définis d'une manière analogue; une quantité dont le rapport à un infiniment petit du premier ordre est infiniment petit, s'appelle *infiniment petit du second ordre*, et ainsi de suite.

On comprend sous le nom de *quantités infinitésimales* les quantités infinies, et celles qui sont infiniment petites.

L'analyse infinitésimale n'est autre chose que l'art d'employer auxiliairement les quantités infinitésimales pour découvrir les relations qui existent entre des quantités proposées.

197. Carnot appelle *équation imparfaite* toute équation dont l'exactitude rigoureuse n'est pas démontrée, mais dont on sait cependant que l'erreur, s'il en existe une, peut être supposée aussi petite qu'on le veut; c'est-à-dire que, pour rendre cette équation exacte, il suffit de substituer à quelques-unes des quantités qui y entrent, d'autres quantités qui en diffèrent infiniment peu.

D'après cette définition, il est clair qu'on peut faire subir aux équations imparfaites diverses transformations sans leur ôter le caractère d'équations imparfaites; comme, par exemple, de transposer les termes d'un membre dans l'autre; de multiplier ou diviser les deux membres par des quantités égales, etc.

Bien plus, on peut aux quantités quelconques qui y entrent, en substituer d'autres qui en diffèrent infiniment peu, négliger les quantités

infiniment petites relativement aux quantités finies, sans que ces équations perdent pour cela leur caractère primitif d'équations au moins imparfaites.

Mais ce qu'il est important de remarquer, c'est que ces erreurs accumulées, au lieu d'éloigner de plus en plus du but, servent au contraire à y conduire par le chemin le plus court, parce qu'en écartant ainsi successivement des accessoires incommodes, avec la seule attention de ne jamais dépouiller les équations dont il s'agit de leur caractère principal, on parvient enfin à les dégager entièrement de toute considération de l'infini par l'élimination complète de tout ce qui s'y trouvait d'arbitraire, et qu'il n'y reste plus que les quantités dont on voulait obtenir la relation. Cela posé, toute la théorie de l'infini peut être regardée comme renfermée dans ce théorème :

198. Théorème. — *Pour être certain qu'une équation est exacte il suffit de s'assurer :*

1° *Qu'elle a été déduite d'équations vraies ou au moins imparfaites, par des transformations qui ne leur ont point ôté le caractère d'équations au moins imparfaites.*

2. *Qu'elle ne renferme plus aucune quantité infinitésimale, c'est-à-dire aucune quantité autre que celles dont on s'est proposé de trouver la relation.*

Démonstration. — Puisque, par hypothèse, les transformations qu'on a pu faire subir aux équations d'où l'on est parti, ne leur ont point ôté le caractère d'équations au moins imparfaites, ces équations ne peuvent se trouver affectées que d'erreurs susceptibles d'être rendues aussi petites qu'on le veut.

Mais d'un autre côté, ces équations ne peuvent plus être de celles que nous avons nommées imparfaites; car celles-ci ne peuvent exister qu'entre quantités qui contiennent quelque chose d'arbitraire, puisque, par leur définition même, l'erreur peut en être supposée aussi petite qu'on le veut. Or, par hypothèse, toutes les quantités arbitraires sont éliminées.

Donc, les nouvelles équations ne peuvent être ni absolument fausses, c'est-à-dire affectées d'erreurs qui ne puissent être rendues aussi petites qu'on le veut; ni de celles que nous avons appelées imparfaites. Donc elles sont exactes.

Voici comment Lagrange, dans l'introduction de sa *Théorie des fonctions analytiques*, s'exprime sur cette doctrine de Carnot :

« Il me semble que, comme dans le Calcul différentiel, tel qu'on l'emploie, on considère et on calcule en effet les quantités infiniment petites ou supposées infiniment petites elles-mêmes, la véritable métaphysique de ce calcul consiste en ce que l'erreur résultant de cette fausse supposition est redressée ou compensée par celle qui naît des procédés mêmes du calcul, suivant lesquels on ne retient dans la différentiation que les quantités infiniment petites du même ordre. Par exemple, en regardant une courbe comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, et dont le prolongement est la tangente de la courbe, il est clair qu'on fait une supposition erronée; mais l'erreur se trouve corrigée dans le calcul par l'omission qu'on y fait des quantités infiniment petites. C'est ce qu'on peut voir aisément dans des exemples, mais dont il serait peut-être difficile de donner une démonstration générale. »

On ne peut se dissimuler, d'ailleurs, qu'une difficulté sérieuse que présenterait en pratique l'application de cette méthode, c'est de savoir discerner les transformations que l'on pourrait faire subir aux équations imparfaites sans leur faire perdre leur caractère d'équations au moins imparfaites.

199. Il y a des personnes qui croient avoir suffisamment établi le principe de l'analyse infinitésimale lorsqu'elles ont fait ce raisonnement : il est évident, disent-elles, que les erreurs auxquelles les procédés de l'analyse infinitésimale donneraient lieu, s'il y en avait, pourraient toujours être supposées aussi petites qu'on le voudrait, et par conséquent on peut les supposer nulles; donc les résultats de l'analyse infinitésimale sont exacts.

Ce raisonnement n'est pas juste; car il est faux de dire qu'une erreur peut être rendue nulle parce qu'on est maître de la rendre aussi petite qu'on le veut. Par exemple, l'équation $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$, trouvée plus haut, est une équation toujours fausse, quoiqu'on puisse en rendre l'erreur aussi petite qu'on le veut; et, en effet, pour que cette erreur disparût entièrement, il faudrait réduire ces quantités RZ, MZ, au zéro absolu; mais alors l'équation se réduirait à $\frac{0}{0} = \frac{y}{a-x}$, équation qu'on ne peut pas dire précisément fausse, mais qui est insignifiante.

200. Citons encore deux exemples auxquels Carnot applique les principes généraux exposés ci-dessus.

1° Prouver que deux pyramides triangulaires de bases équivalentes et de même hauteur sont égales en volume.

Concevons les deux pyramides partagées en un même nombre de tranches infiniment minces, parallèles à leurs bases, et d'épaisseurs respectivement égales. Je dis d'abord que deux tranches correspondantes ne peuvent différer qu'infiniment peu l'une de l'autre.

En effet, chacune est une pyramide tronquée, et si de tous les angles de la plus petite des deux bases on conçoit des parallèles qui aillent rencontrer la plus grande, le tronc de pyramide se trouvera décomposé en deux parties, l'une prismatique, ayant pour épaisseur la distance des deux bases du tronc, et pour base la plus petite des deux bases de ce même tronc ; l'autre en forme d'onglet, ayant aussi pour épaisseur la distance des deux bases du tronc, et pour base la différence entre la plus grande et la plus petite base de ce même tronc. Mais ces deux dernières bases, pouvant se rapprocher l'une de l'autre autant qu'on le veut, leur différence peut évidemment être rendue aussi petite qu'on le veut relativement à chacune d'elles. Donc l'onglet est lui-même infiniment petit, relativement à la tranche à laquelle il appartient.

Cela posé, nommons T et T′ les volumes des deux tranches ; p et p' les portions prismatiques ; q et q' les onglets : nous aurons

$$T = p + q, \quad T' = p' + q', \quad \text{ou} \quad p = T - q \quad \text{et} \quad p' = T' - q'.$$

Mais p et p' sont des prismes de bases équivalentes et de même hauteur ; donc on a $p = p'$ ou $T - q = T' - q'$; négligeant q et q' qui sont, on vient de le voir, infiniment petits relativement à T et T′, on a $T = T'$.

Comme cette équation n'est pas dégagée de l'infini, nous ne pouvons encore savoir si elle est exacte ou seulement imparfaite ; mais comme on peut appliquer à toutes les tranches ce que nous venons de dire de deux d'entre elles, il s'ensuit qu'en nommant P et P′ les volumes entiers des deux pyramides, on aura $P = P'$. Or, ces deux volumes des pyramides sont des quantités finies. Donc l'équation $P = P'$, dégagée de toute considération de l'infini, est exacte.

2° *Prouver que l'aire d'une zone sphérique est égale à l'aire d'un cylindre de même hauteur, et dont la base est une circonférence de grand cercle de la sphère.*

Soit AGB (fig. 54) la demi-circonférence génératrice de la surface de la sphère; C le centre, AB le diamètre, ADEB le quadrilatère générateur du cylindre circonscrit, mr une portion infiniment petite de la circonférence génératrice; smp, trq, les perpendiculaires sur le diamètre AB, prolongées jusqu'à sa parallèle DE; mn une perpendiculaire, menée au point m sur trq; Cm le rayon mené au point m. Je vais d'abord prouver que la zone engendrée par le petit arc mr est égale à l'aire de l'anneau cylindrique engendré par pq.

Pour cela, je considère le cercle comme un polygone d'une infinité de côtés, et l'arc mr comme l'un de ces côtés. Cela posé, les triangles semblables mnr, msC, donnent $mn : mr = ms : m\text{C}$; ou parce que l'on a $mn = pq$ et que les circonférences qui ont pour rayons ms, mC, sont entre elles comme ces rayons,

$$pq : mr = \text{circ. } ms : \text{circ. } m\text{C} \quad \text{ou} \quad \text{circ. } ms \times mr = \text{circ. } m\text{C} \times pq.$$

Mais il est évident que le premier membre de cette équation diffère infiniment peu de l'aire convexe du petit cône tronqué engendré par le trapèze $mstr$, ou de la petite zone engendrée par l'arc mr, considéré comme ligne droite; et que le second membre est l'aire de l'anneau cylindrique qui lui correspond. Donc l'aire de la petite zone est égale à celle du petit anneau.

Cette égalité n'étant point dégagée de l'infini, nous ne pouvons encore savoir si elle est exacte ou seulement imparfaite; mais comme nous pouvons appliquer à toutes les zones infiniment petites ce que nous avons dit de la première, nous en concluons que généralement une zone quelconque de grandeur déterminée, est égale à la surface cylindrique qui lui correspond; proposition qui, étant entièrement dégagée de l'infini, est exacte.

§ 4. Méthode d'assimilation. — Notation de Leibnitz appliquée à la méthode des limites.

201. La méthode des infiniment petits peut-être envisagée à un point de vue qui la fait rentrer dans la méthode des limites(*).

On appelle *quantité infiniment petite, toute quantité variable qui a pour limite zéro.*

(*) Voir : Duhamel, *Cours d'analyse de l'École polytechnique.*

Une quantité fixe, peut se présenter de plusieurs manières comme limite de quantités variables.

1° Comme limite du rapport de deux quantités qui tendent simultanément vers zéro, ou comme fonction quelconque de limites de cette espèce.

2° Comme limite d'une somme de quantités variables qui tendent indéfiniment vers zéro, et dont le nombre augmente indéfiniment, ou encore comme fonction de pareilles limites et de limites de l'espèce précédente.

3° Comme limite d'une somme de quantités invariables dont le nombre augmente indéfiniment, et qui décroissent successivement en tendant vers la limite zéro.

Ce dernier point de vue se rapporte au développement en séries et comprend la méthode d'exhaustion; les deux autres constituent le calcul infinitésimal proprement dit, lequel est susceptible de grandes simplifications à l'aide des deux théorèmes suivants :

I. *La limite du rapport de deux quantités infiniment petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres qui ne leur sont pas égales, mais dont les rapports avec elles ont pour limite l'unité; ou, ce qui revient au même, qui n'en diffèrent que de quantités infiniment petites par rapport à l'une quelconque des deux.*

Soit

$$\lim.\frac{\alpha}{\alpha'}=\lim.\frac{\beta}{\beta'}=1,$$

je dis que l'on a

$$\lim.\frac{\alpha}{\beta}=\lim.\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

Car cette égalité se déduit immédiatement de

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}.$$

Si on énonce le théorème de la seconde manière, il faut observer que la différence δ, des deux quantités infiniment petites α et α', est dite infiniment petite par rapport à l'une d'elles, α par exemple, quand le rapport $\frac{\delta}{\alpha}$ a pour limite zéro. Or, dans ce cas, en divisant par α tous les termes de l'égalité $\alpha'-\alpha=\delta$, on trouve

$$\frac{\alpha'}{\alpha}-1=\frac{\delta}{\alpha},\quad \text{d'où}\quad \lim.\frac{\alpha'}{\alpha}=1,$$

ce qui fait rentrer le second énoncé dans le premier.

II. *La limite d'une somme de quantités positives infiniment petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité.*

Soient les infiniment petits $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, dont le nombre augmente indéfiniment ; et $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$, d'autres infiniment petits tels que les rapports

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \cdots, \quad \frac{\alpha_n}{\beta_n},$$

aient tous pour limite l'unité. La fraction

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 \cdots + \beta_n}$$

sera comprise entre la plus grande et la plus petite des précédentes. Car soit $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ la plus grande de celles-ci et désignons en la valeur par M ; on aura

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} <= \mathrm{M}, \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2} <= \mathrm{M}, \cdot \cdot \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \mathrm{M}.$$

donc

$$\alpha_1 <= \mathrm{M}\beta_1, \quad \alpha_2 <= \mathrm{M}\beta_2, \cdots \alpha_n = \mathrm{M}\beta_n$$

et par conséquent

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n} < \frac{\mathrm{M}\beta_1 + \mathrm{M}\beta_2 + \cdots}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots} = \mathrm{M}.$$

La fraction

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 \cdots + \beta_n}$$

est donc moindre que la plus grande des fractions données, et on prouvera de la même manière qu'elle surpasse la plus petite de ces fractions.

Or, toutes les fractions $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \cdots$ ont pour limite l'unité ; donc la fraction $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots}$, comprise entre deux valeurs qui ont l'unité pour limite, a elle-même l'unité pour limite. Les limites des deux sommes sont donc égales.

L'avantage que procurent ces théorèmes, c'est qu'ils permettent souvent de négliger dans les quantités infiniment petites la partie qui en

rend le calcul difficile. Il suffit que cette partie négligée soit infiniment petite relativement à la quantité elle-même, et il n'en résulte aucune erreur dans les résultats où l'on n'a en vue que les limites des sommes ou des rapports de ces quantités infiniment petites. C'est ce qui a lieu quand on substitue les différentielles aux différences finies, ainsi que nous allons l'expliquer.

En désignant par Δy l'accroissement que prend une fonction pour un accroissement Δx de la variable, on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{F}'(x) + \alpha,$$

$\mathrm{F}'(x)$ étant la dérivée, et α une quantité infiniment petite. Car, par définition de la dérivée, on a

$$\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{F}'(x).$$

Ainsi Δy ne diffère de $\mathrm{F}'(x).\Delta x$ que d'une quantité $\alpha\Delta x$, infiniment petite par rapport à Δy lui-même.

On appelle *différentielles* des variables, des quantités infiniment petites dont le rapport est égal à la dérivée ; prenant à volonté la différentielle dx de la variable indépendante, on aura donc, pour différentielle de la variable dépendante, $dy = \mathrm{F}'x.dx$. Cette définition, comme nous l'avons dit plus haut, avait été donnée déjà par Leibnitz. Les quantités Δy et dy ne diffèrent donc que d'une quantité αdx infiniment petite par rapport à elles-mêmes, et peuvent être substituées l'une à l'autre quand il ne s'agit que de limites de rapports ou de sommes.

202. Cette manière d'envisager les infiniment petits a été nommée quelquefois *méthode d'assimilation*, parce qu'on y assimile pour les substituer les uns aux autres, des infiniment petits dont la limite du rapport est l'unité.

On peut remarquer qu'il y a une grande analogie entre cette méthode d'assimilation et la théorie des équations imparfaites de Carnot. Les équations dans lesquelles on substitue les différentielles aux différences finies, sont du genre de celles que Carnot appelle équations imparfaites; et leurs erreurs se compensent dans le résultat du calcul, puisque d'après les deux théorèmes fondamentaux établis ci-dessus, le résultat est rigoureusement exact. Ces deux théorèmes suppléent à ce qu'il y a d'incomplet dans la doctrine de Carnot. Ils démontrent quelles modifications on

peut faire subir aux équations imparfaites sans leur enlever leur caractère essentiel.

203. Pour donner des exemples où l'on peut de cette manière substituer des infiniment petits à d'autres qui n'en diffèrent que de quantités infiniment petites par rapport à eux, nous démontrerons, d'après Duhamel (*Des méthodes dans les sciences de raisonnement*), les deux théorèmes suivants :

I. *Le périmètre d'un polygone inscrit dans une courbe, et dont les côtés tendent indéfiniment vers zéro, a une limite. Cette limite est indépendante de la loi suivant laquelle les côtés tendent vers zéro.*

Une courbe étant donnée on peut la considérer comme convexe, ou composée d'arcs convexes, pour chacun desquels on procèderait comme il suit :

Soit un arc convexe AB (fig. 55), si on joint le point C aux deux extrémités de la corde AB, on aura $AC + CB > AB$. Si on joint ensuite les points D et E respectivement aux deux extrémités des arcs AC et BC, on aura $AD + DC + CE + EB > AC + CB$; en continuant ainsi indéfiniment, le nombre de côtés se doublant toujours, on peut faire en sorte que chaque côté tende vers zéro, et on aura une série de polygones convexes inscrits, chacun desquels aura un périmètre plus grand que celui du polygone précédent.

Le périmètre, bien qu'il soit sans cesse croissant, ne peut cependant dépasser une certaine limite; car il reste toujours moindre que le périmètre d'un polygone fixe enveloppant la courbe, et tracé arbitrairement.

Reste à démontrer qu'on aura la même limite quelle que soit la loi d'inscription des polygones, pourvu que leurs côtés tendent tous vers zéro.

Considérons deux polygones inscrits appartenant à deux lois d'inscription différentes; menons par tous les sommets de l'un et de l'autre des lignes parallèles à une même direction arbitraire; les deux périmètres seront partagés par ces lignes en un même nombre de parties; et celles qui seront comprises entre deux parallèles consécutives auront un rapport d'autant plus près de l'unité que leurs côtés seront plus petits; car leurs directions diffèrent aussi peu qu'on voudra de celle de la tangente à la courbe en l'une de leurs extrémités ou en un point de cette courbe placé entre les mêmes parallèles que les deux petites droites que l'on compare. L'angle que celles-ci comprennent tendra vers zéro; et si l'on

forme un triangle avec ces deux côtés comprenant cet angle, les deux autres angles tendront indéfiniment vers des valeurs supplémentaires l'une de l'autre. Le rapport des côtés qui leur sont opposés est le même que dans un triangle qui aurait les mêmes angles et dans lequel le côté correspondant à l'un des premiers resterait fini. Or, dans ce dernier triangle dont l'angle au sommet tend vers zéro, le second côté tend évidemment vers le premier, et leur rapport vers l'unité ; il en est donc de même du rapport des deux côtés infiniment petits du premier. Il suit de là, d'après le principe fondamental de la méthode d'assimilation, que le rapport des deux périmètres tend vers l'unité à mesure que les côtés tendent vers zéro, et que la limite obtenue est indépendante du mode de division.

Il est bon d'observer qu'on trouverait encore la même limite, si les sommets du polygone n'étaient pas sur la courbe même, mais en étaient infiniment voisins, et que les côtés eussent toujours pour limites de leurs directions celles des tangentes aux points infiniment voisins. On pourrait encore considérer les polygones circonscrits à la courbe; on pourrait même prendre une suite de lignes séparées les unes des autres. Imaginons, par exemple, des parallèles qui coupent l'arc de courbe et soient infiniment voisines les unes des autres : si par chaque point de division, on mène une tangente, la suite discontinue des portions de ces tangentes comprises entre le point de contact et la parallèle voisine, aura d'après les raisonnements précédents, la même limite. Ce procédé a été employé par Fermat. On aurait aussi pu commencer par un polygone circonscrit et passer au suivant en menant des tangentes par des points intermédiaires; on aurait alors un périmètre moindre. En continuant ainsi, les périmètres, toujours décroissants, mais toujours supérieurs à une grandeur fixe, par exemple à la corde, auraient une limite. Cela admis, tout ce qui précède s'ensuivrait.

II. *L'aire d'un polyèdre inscrit dans une surface courbe, dont les faces tendent indéfiniment vers zéro, a une limite. Cette limite est indépendante de la loi suivant laquelle les faces tendent vers zéro.*

Une notion préalable indispensable, est celle du plan tangent. On démontre facilement que toutes les tangentes à une surface, menées par un quelconque de ses points, sont en général dans un même plan; et par suite que, si par ce point et deux autres infiniment voisins pris sur la surface et non en ligne droite avec lui, on fait passer un plan, ce plan

tend vers une limite déterminée à mesure que les deux points variables se rapprochent du premier, et ce plan est le plan tangent.

Cela posé, concevons sur toute l'étendue de la surface en question des points à des distances infiniment petites les uns des autres, joignons-les par des lignes droites qui déterminent une suite continue de triangles inscrits, ayant tous leurs côtés infiniment petits. Substituons indéfiniment à ces triangles d'autres plus petits, en prenant par exemple les milieux d'arcs qu'on tracerait sur la surface entre les sommets du même triangle.

Concevons ensuite un polyèdre inscrit suivant toute autre loi, et dont les faces décroissent indéfiniment; et comparons les surfaces de ces deux polyèdres. Pour cela, par toutes les arêtes du premier, menons des plans parallèles à une même droite; les trois qui partiront des côtés d'un quelconque des triangles comprendront entre eux une portion de la surface du second polyèdre qui sera plane ou composée de plusieurs parties non dans le même plan. Dans ce dernier cas, en menant de nouveaux plans par les arêtes de cette portion de surface, et faisant de même pour toutes les faces du premier polyèdre, les deux surfaces seront décomposées en portions planes ayant deux à deux même projection sur un plan perpendiculaire à tous ceux qui opèrent cette décomposition.

Or, deux quelconques de ces surfaces correspondantes font avec le plan de projection des angles qui tendent à être égaux, puisque leurs directions sont infiniment voisines de celles d'un même plan tangent; leur rapport tend donc indéfiniment vers l'unité, et par conséquent il en est de même des rapports de leurs sommes, ou des surfaces entières des polyèdres inscrits.

La loi suivant laquelle on détermine les sommets des polyèdres inscrits n'influe donc pas sur la limite si elle existe, soit pour une loi particulière d'inscription, soit pour une somme de faces obtenues par une autre voie, et telle que son rapport avec la surface des polyèdres inscrits ait pour limite l'unité.

Pour montrer que la limite existe, concevons d'abord un plan tel, qu'en y projetant la portion de surface dont il s'agit, il ne se trouve pas deux de ses points ayant même projection, ce qui est toujours possible en la subdivisant en parties qu'on considérera séparément. Supposons ensuite une série de plans parallèles entre eux, perpendiculaires au premier, et distants les uns des autres d'une quantité infiniment petite α; puis une seconde série de plans parallèles distants les uns

des autres d'une quantité infiniment petite β, perpendiculaires au premier plan, ainsi qu'à ceux de la première série. La surface proposée se trouvera décomposée en parties dont la projection sera égale au rectangle $\alpha\beta$, ou à une fraction de ce rectangle pour les parties voisines du contour. Dans chacune de ces parties, menons un plan tangent tel qu'il fasse le plus grand angle possible avec le plan de projection. Soit ω cet angle; la portion de plan tangent qui se projette suivant $\alpha\beta$, sera exprimée par $\frac{\alpha\beta}{\cos\omega}$.

Si maintenant on conçoit deux nouvelles séries de plans, parallèles respectivement à ceux des précédentes, et partageant en deux parties égales l'intervalle de deux consécutifs quelconques, chaque portion de la surface se trouvera divisée en quatre autres. Dans chacune de ces nouvelles portions nous mènerons de même le plan tangent faisant le plus grand angle avec le plan de projection, et les quatre portions de ces plans qui remplaceront celle qui se projetait dans le même espace $\alpha\beta$, formeront une somme moindre, puisque pour trois d'entre elles l'angle formé avec le plan de projection sera moindre que celui que formait le plan tangent dans le mode précédent. Tout au plus pourrait-il y avoir égalité.

En appliquant toujours le même procédé, la somme des portions indéfiniment décroissantes des plans tangents ira donc constamment en diminuant. De plus, elle sera toujours supérieure à une quantité fixe, par exemple la projection de la surface entière : donc elle a une limite. Or, les raisonnements faits pour deux polyèdres inscrits, ayant leurs faces infiniment petites dans tous les sens, s'appliquent à toute somme de faces infiniment petites donnant la même projection totale, et faisant avec les plans des faces correspondantes, des angles ayant zéro pour limite. Donc la limite de la somme des portions discontinues de plans tangents que nous avons considérées est aussi celle de la surface de tous les polyèdres inscrits.

Il est bon de remarquer qu'on trouverait encore la même limite si, au lieu de s'assujettir à prendre des faces planes on prenait des surfaces courbes variables telles que, pour les points situés sur une même perpendiculaire au plan de projection, les plans tangents à ces surfaces et à la proposée fissent entre eux des angles infiniment petits.

On voit encore que toute surface convexe est plus petite qu'une surface

qui l'enveloppe de toutes parts, ou qui l'enveloppe et est terminée au même contour.

Et de même, qu'une surface courbe est moindre qu'une surface plane ayant la même projection orthogonale sur un plan, et faisant avec ce plan un angle plus grand que tous ceux que font avec lui les plans tangents à la surface en tous ses points. L'inverse aurait lieu si ces derniers angles étaient, au contraire, plus grands que le premier.

Remarque. — Ces démonstrations qui précèdent sont rigoureuses ou du moins ne soulèvent d'objections qu'en certains points singuliers; mais elles nous paraissent ajouter peu de chose à l'évidence des propositions auxquelles elles s'appliquent. Elles sont fondées, la première sur ce que chaque côté du polygone inscrit s'approche indéfiniment d'*une certaine tangente;* la seconde sur ce que chaque facette d'un polyèdre inscrit s'approche indéfiniment d'*un certain plan tangent;* mais sans qu'on puisse préciser quelle est cette tangente ou quel est ce plan tangent; et par intuition on voit une chose qu'on ne peut faire concourir explicitement à la démonstration. C'est que *toutes les tangentes* dans le premier cas et *tous les plans tangents* dans le second doivent intervenir de la même manière, quelle que soit la loi d'inscription des polygones ou des polyèdres. C'est pour cela que le simple énoncé des propositions dont il s'agit, rapproché de la remarque que les côtés ou facettes tendent vers des tangentes ou plans tangents, fait naître le sentiment de l'évidence.

En tous cas les démonstrations dont nous venons de nous occuper ne sauraient trouver place dans l'enseignement moyen.

§ 5. Méthode des indivisibles.

204. La méthode des indivisibles est une de celles qui s'approchent le plus de la méthode des infiniment petits; et Cavalerius, qui l'inventa, doit être considéré comme un des précurseurs de Leibnitz. Il considérait une ligne comme composée d'une somme de points; une surface comme une somme de lignes; un volume comme une somme de surfaces.

Pour prouver, par exemple, que deux pyramides de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalentes, on les regarde comme composées l'une et l'autre d'une infinité de surfaces planes également distantes, qui en sont les éléments : or comme ces éléments sont égaux chacun à chacun, et que leur nombre est le même de part et d'autre, on en conclut que les

volumes des pyramides, qui sont les sommes respectives de ces éléments, sont égaux entre eux.

Autre exemple. — Soit AB le diamètre d'un demi-cercle AGB (fig. 56); soit ABFD le rectangle circonscrit; CG le rayon perpendiculaire à DF; soient de plus menées les deux diagonales CD, CF, et enfin par un point quelconque m de la droite AD soit menée la droite $mnpg$, perpendiculaire à CG, laquelle coupera la circonférence au point n et la diagonale CD au point p.

Concevons que toute la figure tourne autour de CG comme axe. Le quart de cercle AnG engendrera le volume de la demi-sphère dont le diamètre est AB; le rectangle ADGC engendrera le cylindre droit circonscrit, c'est-à-dire ayant le même diamètre; le triangle isoscèle rectangle CGD engendrera un cône droit ayant les lignes égales CG, DG pour hauteur et pour rayon de sa base, et enfin les trois droites ou segments de droites mg, ng, pg, engendreront chacune un cercle dont le centre sera au point g.

Or, le premier de ces trois cercles est l'élément du cylindre, le second est l'élément de la demi-sphère, et le troisième celui du cône.

De plus, les aires de ces cercles étant comme les carrés de leurs rayons, et ces trois rayons étant respectivement égaux aux trois côtés du triangle rectangle cng, il est clair que le premier de ces cercles est égal à la somme des deux autres : c'est-à-dire que l'élément du cylindre est égal à la somme des éléments correspondants de la demi-sphère et du cône; et comme il en est de même de tous les autres éléments, il s'ensuit que le volume total du cylindre est égal à la somme du volume total de la demi-sphère et du volume total du cône.

Mais on sait d'ailleurs que le volume du cône est le tiers de celui du cylindre; donc celui de la sphère en est les deux tiers. Donc le volume de la sphère entière est les deux tiers du volume du cylindre circonscrit.

Cavalerius avertit que sa méthode n'est autre chose qu'un corollaire de la méthode d'exhaustion, mais qu'il ne saurait en donner une démonstration rigoureuse.

Roberval, dans son *Traité des Indivisibles* explique que quand on considère une ligne, une surface ou un solide comme composés de points, de lignes ou de surfaces, il faut entendre qu'ils sont composés d'une infinité de petites lignes, de petites surfaces ou de petits solides. Il s'agit donc d'une manière particulière de désigner les infiniment petits.

§ 6. De la méthode des fluxions.

205. Le calcul infinitésimal a été présenté par Newton sous une forme qui constitue ce qu'on appelle la méthode des fluxions.

Newton considère une courbe plane comme engendrée par le mouvement d'un point ; il décompose à chaque instant la vitesse constante de ce point en deux autres, l'une parallèle à l'axe des abscisses, et l'autre parallèle à l'axe des ordonnées. Ces vitesses sont ce qu'il appelle les *fluxions* de ces coordonnées, tandis que la vitesse arbitraire du point qui décrit la courbe est la fluxion de l'arc décrit.

Réciproquement, cet arc décrit est appelé la *fluente* de la vitesse avec laquelle il est décrit par le point mobile ; l'abscisse correspondante est appelée fluente de la vitesse de ce point estimée dans le sens de cette abscisse, et l'ordonnée est appelée fluente de la vitesse de ce même point, estimée dans le sens de cette ordonnée.

Puisque la fluxion de l'arc est supposée constante, il est évident, qu'à moins que le chemin du point décrivant ne se fasse en ligne droite, les fluxions de l'abscisse et de l'ordonnée seront variables, et que leur rapport, à chaque instant, dépendra de la nature de la courbe, c'est-à-dire de la relation même de ces coordonnées.

Réciproquement, la relation des coordonnées dépend nécessairement de celle qui existe à chaque instant entre les fluxions de ces coordonnées. On peut donc demander de trouver la relation qui existe entre les fluxions quand on connaît celle qui lie les coordonnées, et réciproquement.

Mais ces premières notions peuvent être généralisées : car, à mesure que le point décrivant parcourt la courbe, non seulement l'abscisse et l'ordonnée changent, mais encore la sous-tangente, la normale, le rayon de courbure, etc.; c'est-à-dire que ces quantités croissent ou décroissent plus ou moins rapidement ainsi que les coordonnées elles-mêmes. Toutes ces quantités ont donc des fluxions dont les rapports sont généralement déterminés par le mouvement du point qui décrit uniformément la courbe ; ainsi ces quantités sont elles-mêmes des fluentes. Or, c'est l'art de déterminer les relations de toutes ces fluxions par l'entremise de leurs fluentes, et réciproquement, que l'on nomme méthode directe et inverse des fluxions, ou méthode des fluxions et fluentes.

Cette méthode s'applique non seulement aux lignes courbes, mais par

analogie on l'étend aux aires que renferment ces courbes, aux surfaces courbes et aux volumes qu'elles terminent, aux forces qui mettent les corps en mouvement, etc.; en un mot à toutes les fonctions de quelque nature qu'elles soient.

Il y a une fluxion principale qui est choisie à volonté, mais qui, étant une fois adoptée, règle toutes les autres; nous avons supposé constante la vitesse du point décrivant; mais on pourrait aussi regarder comme constante la vitesse dans le sens de l'abscisse, ou toute autre.

La notation adoptée dans la méthode des fluxions consiste à surmonter d'un point les lettres qui représentent les quantités dont on veut désigner les fluxions; c'est-à-dire que la fluxion de la variable ou fluente x, par exemple, est représentée par $\dot{x}$. La notation $\dot{x}$ représente donc la quantité finie qui est la vitesse.

De même si l'on conçoit une nouvelle courbe, dont les coordonnées soient les fluxions respectives de x et y, les fluxions de ces nouvelles coordonnées seront des fluxions de fluxions, et devront, d'après la notation indiquée, être exprimées par $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, et ainsi de suite.

206. On a reproché à cette méthode qu'elle introduit dans la géométrie la notion des vitesses, et qu'elle définit une idée qui doit être simple par une autre qui est plus complexe.

On peut répondre à cette objection qu'il y a souvent un certain avantage à introduire, même en géométrie élémentaire, la considération du mouvement, laquelle aide l'imagination, et facilite l'intelligence d'une foule de questions.

Ce serait à tort, toutefois, que l'on prétendrait, par la notion des vitesses, écarter complètement celle des limites. La théorie des fluxions n'est, en réalité, qu'une autre manière de présenter la méthode des infiniment petits ou des limites. Et en effet, dans un mouvement varié, la vitesse n'est autre chose que la limite du rapport d'un chemin infiniment petit parcouru par le mobile, au temps infiniment petit employé à le parcourir. Dans la théorie des fluxions le temps n'a d'ailleurs par lui-même aucune importance. Les valeurs absolues des fluxions peuvent être regardées comme indéterminées; mais leurs rapports sont déterminés, et égaux aux limites des rapports des accroissements infiniment petits et variables.

Au reste, dans le traité des fluxions, la considération des infiniment

petits se rencontre à chaque instant, et elle se trouve dans la démonstration même de la règle établie pour le calcul des fluxions. Celle-ci repose, en effet, sur le principe suivant :

« *Les moments des quantités fluentes (c'est-à-dire leurs parties indéfiniment petites, par l'accession desquelles, dans des parties indéfiniment petites du temps, elles sont continuellement augmentées) sont comme les vitesses de leurs flux ou accroissements.* »

Comme exemple nous nous bornerons à indiquer ici de quelle manière Newton résout, par la méthode des fluxions, le problème des tangentes.

Soit BD l'ordonnée d'une courbe quelconque ED (fig. 57). Faites mouvoir cette ordonnée et faites-lui parcourir un espace indéfiniment petit pour l'amener en bd. Elle aura augmenté du moment cd, tandis que AB aura augmenté du moment Bb auquel Dc est égal et parallèle. Prolongez Dd jusqu'à ce qu'elle rencontre AB en T ; cette ligne touchera la courbe en D ou d, et les triangles dcD, BDT seront semblables, ce qui donne TB : DB = Bb : dc.

La relation de BD à AB ou de y à x est l'équation de la courbe. Tirez de celle-ci le rapport des fluxions $\dot{x} : \dot{y}$. Ce rapport étant le même que Bb : cd, on aura pour valeur de la sous-tangente $\text{TB} = y\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}$, et celle-ci permet de construire la droite TD qui touche la courbe au point D.

On voit que cela revient à regarder la courbe comme un polygone infinitésimal.

§ 7. Théorie des fonctions analytiques ou fonctions dérivées.

207. Aucune des méthodes proposées pour réduire le calcul infinitésimal en algorithme régulier, n'ayant paru à Lagrange réunir au degré désirable, l'exactitude et la simplicité, il a cherché à les remplacer par une méthode purement algébrique, qu'il a exposée dans les deux ouvrages intitulés : *Théorie des fonctions analytiques*, et *Leçons sur le calcul des fonctions*. Elle est fondée sur le développement en série d'une fonction quelconque. Voici la démonstration que donne Lagrange de sa formule fondamentale, qui n'est autre que la formule de Taylor.

Soit une fonction $f(x)$; en donnant à x un accroissement i, et développant en série, on a

$$f(x+i) = fx + pi + qi^2 + \cdots,$$

$p, q, \ldots$ étant des fonctions qui dérivent de $f(x)$. Mais il s'agit de prouver que telle est bien la forme de la série.

Montrons d'abord qu'il ne peut y avoir, dans le développement, des puissances fractionnaires de i.

Il est clair que les radicaux de i ne pourraient venir que des radicaux renfermés dans la fonction primitive $f(x)$ et que la substitution de $x+i$ au lieu de x ne pourrait changer le nombre des radicaux, ni leur nature, tant que x et i sont indéterminés. D'un autre côté, tout radical a autant de valeurs qu'il y a d'unités dans son indice, et toute fonction irrationnelle a, par conséquent, autant de valeurs différentes qu'on peut faire de combinaisons des différentes valeurs des radicaux qu'elle renferme. Donc, si le développement de $f(x+i)$ pouvait contenir un terme de la forme $ui^{\frac{m}{n}}$, la fonction $f(x)$ serait irrationnelle et aurait un certain nombre de valeurs différentes, qui serait le même pour la fonction $f(x+i)$, ainsi que pour son développement. Mais ce développement étant représenté par la série

$$f(x)+pi+\cdots\cdot+ui^{\frac{m}{n}}+\cdots,$$

chaque valeur de $f(x)$ se combinerait avec chacune des n valeurs de $\sqrt[n]{i^m}$, de sorte que la fonction $f(x+i)$ développée aurait plus de valeurs différentes que la même fonction non développée, ce qui est absurde.

Cette première partie de la démonstration de Lagrange ne semble pas rigoureuse; car rien ne prouve que si la fonction $f(x)$ avait effectivement plusieurs valeurs, de même que le radical $ui^{\frac{m}{n}}$, il faudrait nécessairement combiner chaque valeur de $f(x)$ avec chaque valeur de $i^{\frac{m}{n}}$.

L'algèbre offre des cas nombreux où la discussion permet de voir comment il faut combiner les valeurs des radicaux qui entrent dans une expression, pour que celle-ci n'ait exactement que le nombre des valeurs qu'elle doit présenter réellement. Citons comme exemple la formule de Cardan, laquelle détermine neuf valeurs parmi lesquelles il est aisé d'en choisir trois qui vérifient l'équation du troisième degré dont elle est déduite.

Lagrange prouve ensuite que le développement ne peut contenir aucun terme où l'exposant de i soit négatif; et en effet, pour $i=0$, la fonction $f(x+i)$ devrait devenir infinie; par conséquent, il faudrait que $f(x)$

devînt infinie, ce qui ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières de x.

Cela posé, observons que $f(x+i)$ se réduit à $f(x)$ pour $i=0$; de sorte que $f(x+i)$ sera égale à $f(x)$, plus une quantité qui doit disparaître en faisant $i=0$, et qui sera, par conséquent, ou pourra être censée multipliée par une puissance positive de i; et comme nous venons de démontrer que dans le développement de $f(x+i)$ il ne peut entrer aucune puissance fractionnaire de i, il s'ensuit que la quantité dont il s'agit ne pourra être multipliée que par une puissance positive et entière de i: elle sera donc de la forme $i\mathrm{P}$, P étant une fonction de x et i qui ne devient pas infinie pour $i=0$. On aura donc ainsi

$$f(x+i)=f(x)+i\mathrm{P}; \quad \text{d'où} \quad \mathrm{P}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}.$$

Or, on pourra aussi séparer de la fonction P ce qui est indépendant de i et qui, par conséquent, ne s'évanouit pas lorsque i devient nul; et on pourra écrire $\mathrm{P}=p+i\mathrm{Q}$, p étant une fonction de x sans i et Q étant une fonction de x et de i qui ne devient pas infinie pour $i=0$.

On aura de même $\mathrm{Q}=q+i\mathrm{R}$, et ainsi de suite; d'où

$$f(x+i)=f(x)+ip+i^2q+i^3r+\cdots.$$

Si l'on accepte cette première partie de la démonstration, on va voir comment Lagrange établit d'une manière très élégante la loi générale suivant laquelle les fonctions $p, q, r, \ldots$ dérivent de la fonction principale $f(x)$.

Remplaçons x par $x+o$, o étant une indéterminée indépendante de i; on doit évidemment avoir le même résultat en mettant $x+o$ à la place de x, ou $i+o$ à la place de i. Cette dernière substitution donne

$$f(x)+p(i+o)+q(i+o)^2+r(i+o)^3+\text{ etc.};$$

ou en n'écrivant que les deux premiers termes du développement de chaque puissance, parce qu'ils suffiront au but que nous avons en vue,

$$f(x)+pi+qi^2+ri^3+si^4+\cdots+po+2qio+3ri^2o+4si^3o+\cdots.$$

Pour faire autrement la substitution soient

$$f(x)+f'(x)o+\cdots, \quad p+p'o+\cdots, \quad q+q'o+\cdots, \quad r+r'o+\cdots,$$

ce que deviennent respectivement les fonctions $f(x), p, q, r, \ldots$ quand on y remplace x par $x+o$. Si on ne retient du développement que les

termes qui contiennent au plus la première puissance de o, on trouve

$$f(x)+pi+qi^2+ri^3+si^4+\cdots+f'(x)\,o+p'io+q'i^2o+r'i^3o+\cdots.$$

Les deux résultats que nous venons d'obtenir doivent être identiques quels que soient i et o; on aura donc, en comparant les termes qui contiennent le facteur o à la première puissance,

$$p=f'(x);\quad 2q=p';\quad 3r=q';\quad 4s=r';\ \ldots.$$

Lagrange nomme *fonction dérivée* de la fonction donnée $f(x)$, le coefficient $f'(x)$ du second terme de la série qu'on obtient quand on donne à x un accroissement o, et qu'on développe $f(x+o)$ suivant les puissances ascendantes de o. Alors, de même que $f'(x)$ est la première fonction dérivée de $f(x)$, il est clair que p' sera la première dérivée de p, q' la première dérivée de q, et ainsi de suite; donc, si pour plus de simplicité on dénote par $f'(x)$ la première fonction dérivée de $f(x)$, par $f''(x)$ la première fonction dérivée de $f'(x)$; par $f'''(x)$ la première fonction dérivée de $f''(x)$, et ainsi de suite, on aura

$$p=f'(x),\quad \text{d'où}\quad p'=f''(x);$$
$$q=\frac{p'}{2}=\frac{1}{2}f''(x),\quad \text{d'où}\quad q'=\frac{1}{2}f'''(x);$$
$$r=\frac{q'}{3}=\frac{1}{2.3}f'''(x),\quad \text{d'où}\quad r'=\frac{1}{2.3}f^{\text{IV}}(x);$$
$$s=\frac{r'}{4}=\frac{1}{2.3.4}f^{\text{IV}}(x)\ldots$$

Donc,

$$f(x+i)=f(x)+i\,f'(x)+\frac{i^2}{1.2}f''(x)+\frac{i^3}{1.2.3}f'''(x)+\cdots.$$

Quand on sait former la première fonction dérivée d'une fonction primitive quelconque, il est aisé de former toutes les fonctions dérivées que la série renferme. Or, Lagrange montre, pour les diverses fonctions élémentaires qui peuvent entrer dans une formule quelconque, comment, en les supposant développées en séries, on peut calculer le second terme du développement; c'est-à-dire qu'il donne les règles générales de leur dérivation, d'où l'on conclut ensuite les règles de la dérivation d'une fonction quelconque.

Pour appliquer sa formule fondamentale, Lagrange s'appuie sur ce que, dans tout polynôme ordonné suivant les puissances croissantes d'une

variable i, on peut prendre i assez petit pour qu'un terme quelconque devienne plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent.

208. Cette méthode, indépendamment des objections qu'on peut faire à la démonstration de la formule fondamentale, ne semble pas pouvoir être considérée comme complètement dégagée de toute considération de limites, ainsi que l'annonçait son illustre inventeur.

En effet, le développement en série n'a de sens que si la série est convergente, c'est-à-dire si la somme que l'on obtient en prenant un nombre de termes de plus en plus considérable, tend vers une limite fixe, dont la valeur est égale à celle de la fonction que cette série doit représenter. Les raisonnements fondés sur la considération d'une série dont la convergence n'a pas été préalablement démontrée, peuvent même conduire à des erreurs.

Il ne paraît pas possible de se passer complètement de la considération des limites, lorsque l'on veut conserver une entière rigueur. Il est certain que quand on donne un accroissement à une variable, toute fonction de celle-ci prend aussi un accroissement, dont le rapport au premier tend en général vers une certaine limite déterminée, quand les deux accroissements tendent simultanément vers zéro. C'est là un fait indépendant des méthodes dont nous faisons usage, existant en dehors d'elles, et auquel nous ne pouvons rien changer; et il n'est pas étonnant que la considération de cette limite s'impose dans une foule de questions dont la solution exige l'emploi de la fonction dont elle dérive.

Pour ce motif, il nous semble que la méthode des limites doit être adoptée dans les éléments, et que pour les hautes études, la méthode des infiniment petits, convenablement interprétée, de manière à la faire rentrer dans la méthode des limites, mérite la préférence ; cette dernière joint une grande simplicité à une entière rigueur.

CHAPITRE VI.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

§ 1. Représentation des lieux géométriques dans le plan : coordonnées rectilignes, coordonnées polaires, coordonnées tangentielles.

209. La géométrie analytique a pour objet les applications de l'algèbre à la géométrie. Ces applications peuvent se faire de bien des manières; mais Descartes a créé une méthode particulièrement remarquable, par sa généralité et sa fécondité et qui constitue à proprement parler la géométrie analytique; il a imaginé un moyen de représenter les lieux géométriques par des équations; et comme toute figure se compose de points, de lignes, de surfaces, il suffit d'écrire les équations qui représentent ces divers éléments composants, pour que la figure soit complètement définie. Ces équations contiennent donc implicitement toutes les propriétés de la figure et peuvent servir à les démontrer. On voit par là que *la géométrie analytique est la science qui apprend à représenter les lieux géométriques par des équations et à faire servir ces équations à la résolution des questions de géométrie.*

Le mode de représentation des lieux géométriques imaginé par Descartes repose sur l'emploi de *coordonnées* servant à fixer la position d'un point quelconque. Celles que ce grand géomètre a adoptées portent le nom de *coordonnées cartésiennes.* Mais on peut imaginer une multitude d'autres systèmes de coordonnées. Nous nous proposons de rappeler dans ce qui suit quelques-uns de ceux-ci et de faire connaître la marche qui nous semble la meilleure pour établir les formules servant à passer des uns aux autres.

210. *Coordonnées rectilignes dans le plan.* — On a vu (nº 113) que pour déterminer la position d'un point M sur une droite fixe Ox, il suffit de se donner la distance OM affectée du signe + ou du signe — suivant que ce point tombe d'un côté de l'origine ou du côté opposé; cette distance affectée du signe convenable est appelée l'*abscisse* du point M. On peut convenir, par exemple, que les abscisses sont positives à droite de l'origine O et négatives à gauche de cette origine.

Considérons maintenant deux axes quelconques OX, OY (fig. 58), tracés arbitrairement dans le plan, et satisfaisant seulement à la condition de se couper en un certain point O qui sera l'origine; par un point M, pris à volonté dans le plan, menons les droites MP et MQ parallèles aux axes. Elles rencontreront nécessairement ceux-ci en deux points P et Q que nous appellerons les *projections du point* M sur les axes. Ces projections seront orthogonales si l'angle YOX est droit; autrement elles seront obliques.

Il est clair que, le point M étant donné, les projections P et Q seront déterminées et que, réciproquement, si on se donne ces dernières, elles détermineront complètement la position de M.

Or, pour fixer la position de P, il suffit de donner son abscisse. De même on pourra déterminer le point Q en se donnant la distance OQ affectée du signe + ou du signe — suivant que cette projection tombe sur OY ou sur son prolongement. Cette distance, affectée du signe convenable, est ce qu'on nomme *l'ordonnée du point* Q.

Il résulte de là que si on se donne l'abscisse de P et l'ordonnée de Q le point M est déterminé. C'est pour cela que ces quantités algébriques sont aussi appelées l'abscisse et l'ordonnée du point M, et que, collectivement, elles constituent ce que l'on a appelé les *coordonnées* de ce point. Ce sont des coordonnées *rectilignes* ou coordonnées *cartésiennes*.

211. *Coordonnées polaires.* — Par un point fixe O (fig. 59), que nous appellerons *pôle* faisons passer une droite fixe OX, *appelée axe polaire*. Pour déterminer la position d'un point M pris à volonté dans le plan il suffit évidemment de se donner l'angle MOX et la distance OM.

On a déjà vu que la position d'un point quelconque de la droite fixe OM peut être déterminée par la distance de ce point au point fixe O, affectée d'un signe convenable; nous affecterons du signe + les distances comptées sur OM et du signe — celles qui doivent être portées sur OM'. Cette

grandeur algébrique, analogue à l'abscisse dans le système des coordonnées rectilignes, porte ici le nom de *rayon vecteur*.

Il est clair que pour déterminer l'angle que OM fait avec OX on peut faire tourner OM, dans le sens des aiguilles d'une montre ou en sens opposé à partir de Ox; nous conviendrons que dans ce dernier cas l'angle MOX devra être affecté du signe $+$; un angle compté en sens inverse serait affecté du signe contraire. L'angle dont il s'agit pris avec le signe convenable est ce que nous appellerons l'*angle de position* de la droite OM. D'après cela, si l'on désigne par ρ le rayon vecteur et par ω l'angle de position d'un point quelconque, on aura pour les trois points M, M′, M″ :

$$\mathrm{M}\left\{\begin{array}{l}\rho=+\mathrm{OM}\\ \omega=+\mathrm{MOX}.\end{array}\right.\qquad \mathrm{M}'\left\{\begin{array}{l}\rho=-\mathrm{OM}'\\ \omega=+\mathrm{MOX}\end{array}\right.\qquad \mathrm{M}''\left\{\begin{array}{l}\rho=+\mathrm{OM}''\\ \omega=-\mathrm{M''OX}.\end{array}\right.$$

Il est clair qu'un même point peut être déterminé de plusieurs manières à l'aide des coordonnées ainsi définies. Par exemple, on retrouverait le point M si l'on donnait $\rho=-\mathrm{OM}$, $\omega=180^\circ+\mathrm{MOX}$.

Ces coordonnées sont appelées *coordonnées polaires*. On voit aisément que si l'on déplaçait l'axe polaire en le faisant tourner d'un angle α autour du pôle, les nouveaux angles de position seraient liés aux anciens par la formule $\omega=\omega'+\alpha$, analogue à la formule $x=x'+a$ qui sert à déplacer l'origine sur l'axe des x, et qui est générale comme cette dernière.

Nous définirons plus loin un autre système de coordonnées polaires.

212. *Une équation $\varphi(x, y)=0$ représente une ligne.* — Remarquons d'abord que l'équation $x=a$ convient à tous les points d'une droite PM (fig. 58) parallèle à l'axe des y; car ces points, à l'exclusion des autres points du plan, ont pour abscisse a; de même $y=b$ représente la droite MQ parallèle à OX.

Si on donne maintenant une équation $\varphi(x, y)=0$, il est clair qu'il existe dans le plan une infinité de points dont les coordonnées satisfont à cette équation; et ces points se succèdent sans interruption sur une ligne; car soit $y=f(x)$ une des valeurs de y tirée de cette équation et supposons la fonction $f(x)$ continue; si on fait varier x d'une manière continue, le point P glissera sur l'axe des x; et puisque alors y varie aussi d'une manière continue, le point M glissera en même temps sur l'ordonnée PM. Il décrira donc une certaine ligne MN. Si plusieurs

valeurs de y correspondent à une même valeur de x, dans l'équation $\varphi(x, y) = 0$, la ligne que celle-ci représente coupera les parallèles à l'axe des y en plusieurs points.

Il est évident que si à une valeur de x il ne correspond que des valeurs imaginaires de y, ces systèmes de valeurs ne peuvent représenter aucun point réel; une équation donnée peut donc ne pas représenter une ligne réelle. Dans ce cas, afin de conformer le langage de la géométrie analytique à celui de l'algèbre, on dit que l'équation représente une ligne imaginaire.

213. Un système de deux équations $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ représente évidemment les points de rencontre des deux lignes que ces équations représentent quand on considère chacune d'elles séparément; car les points dont les coordonnées vérifient ces deux équations appartiennent nécessairement aux deux lignes.

Remarque. — Toute équation déduite des équations de deux lignes données représente une troisième ligne passant par les points de rencontre des deux autres; car les coordonnées de ces points, qui vérifient les équations des deux premières lignes doivent, d'après l'hypothèse, vérifier l'équation de la troisième, qui en est une conséquence.

Il résulte aussi de là que si deux équations $f(x, y) = 0$, $F(x, y) = 0$ sont déduites de $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$, tous les points représentés par ce dernier système le sont aussi par le premier; mais le premier, peut en outre fournir des points que ne donne pas le second système; car, les premières équations étant simplement des conséquences des deux autres, il se peut qu'il n'y ait pas réciprocité et que les deux premières équations soient vérifiées pour des systèmes de valeurs qui ne satisfont pas aux deux autres (voir à ce sujet le n° 25; voir aussi le n° 254 et le n° 361 où il s'agit de questions analogues).

214. L'équation d'un lieu géométrique pouvant se présenter sous une forme plus ou moins simple suivant le choix que l'on fait des axes, il est utile qu'on puisse trouver ce que devient cette équation quand on change les axes et chercher ainsi les axes qui facilitent le plus la solution de la question que l'on traite. On fait usage pour cela de formules de transformation des coordonnées. La manière dont on les établit dans certains traités n'en fait pas suffisamment ressortir le caractère de généralité. C'est pourquoi nous croyons devoir insister ici sur cette question.

215. *Formules pour déplacer l'origine.* — Désignons par x et y les coordonnées d'un point M (fig. 60), rapporté aux axes Ox, Oy; par X, Y, celles du même point rapporté à de nouveaux axes O'X, O'Y, parallèles aux premiers et dirigés dans le même sens; par x', y' les coordonnées de la nouvelle origine O', rapportée aux axes primitifs Ox, Oy; soient P et Q les projections de M sur O'X et Ox respectivement et O'' la projection de O' sur Ox. On a $O''Q = O'P$, puisque ce sont des droites parallèles comprises entre parallèles; de plus le point Q est à droite ou à gauche de O'' suivant que P est à droite ou à gauche de O'. Donc, si on veut fixer la position du point Q sur Ox au moyen de son abscisse comptée à partir de O'', cette abscisse sera la même que celle de P sur O'X, c'est-à-dire qu'elle sera en grandeur et en signe égale à X. D'autre part l'abscisse de O'' par rapport à O est x'; donc si, sur l'axe des x, on passe de l'origine O à l'origine O'' pour déterminer la position du point Q on aura la formule $x = X + x'$ qui, d'après les explications données au n° 113 est générale; c'est-à-dire qu'elle est vraie quels que soient les signes de x, X et x'.

On démontrera de même que $y = Y + y'$.

216. *Distance d'un point à l'origine.* — Soit un point M qui a pour coordonnées X, Y quand on le rapporte aux axes O'X, O'Y (fig. 60) et désignons par ω l'angle XOY que font entre eux les deux parties des axes sur lesquelles se comptent les coordonnées positives.

On a, dans le triangle O'PM

$$\overline{O'M}^2 = \overline{O'P}^2 + \overline{MP}^2 - 2O'P.MP\cos O'PM;$$

mais

$$O'P = X,\ MP = Y,\ O'PM = 180° - \omega;$$

donc

$$\overline{O'M}^2 = X^2 + Y^2 + 2XY\cos\omega.$$

Pour faire voir que cette formule est générale, montrons d'abord qu'elle ne change pas quand X devient négatif. Il suffira pour cela de supposer que les X positifs soient comptés sur O'X'; on aura alors

$$O'P = -X,\quad MP = Y,\quad O'PM = \omega,$$

et la substitution dans l'expression de $\overline{O'M}^2$ donne encore

$$\overline{O'M}^2 = X^2 + Y^2 + 2XY\cos\omega.$$

On prouvera de la même manière que la formule s'applique aux cas ou Y est négatif.

217. *Distance de deux points quelconques.* — Considérons maintenant deux points quelconques M et O′, rapportés aux axes Ox, Oy et ayant respectivement pour coordonnées x, y et x', y'. Pour calculer leur distance faisons passer par O′ de nouveaux axes O′X, O′Y, par rapport auxquels les coordonnées du point M seront X et Y. La distance du point X, Y à l'origine O′ est donnée par la formule générale

$$\overline{O'M}^2 = X^2 + Y^2 + 2XY \cos\omega.$$

Mais on a aussi les formules générales $x = X + x'$, $y = Y + y'$. On en conclut, en substituant à X et Y leurs valeurs, la formule suivante, qui est générale comme celles dont elle est déduite :

$$\overline{O'M}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y') \cos\omega.$$

218. *Changement de la direction des axes.* — Admettons qu'on veuille passer des axes Ox, Oy aux axes OX, OY (fig. 61). Pour fixer les positions des nouveaux axes, il faut se donner les angles qu'ils font avec l'axe Ox. Soient ω l'angle xOy que font entre eux les axes primitifs ; α et α' les angles que les nouveaux axes OX, OY font respectivement avec Ox. Pour que la position des nouveaux axes soit complètement fixée, il faut indiquer de quel côté de l'axe Ox les angles α et α' doivent être construits. On convient de former les angles α, α' et ω du même côté de Ox.

Soit un point M, dont nous supposerons les coordonnées positives, aussi bien par rapport aux nouveaux axes que par rapport aux axes primitifs. Menons la droite MS parallèle à OY ; MQ et SR parallèles à Oy et enfin SP parallèle à Ox.

La figure PQRS étant un parallélogramme, on aura

$$y = MQ = MP + SR\,;\quad x = OQ = SP + OR\,;\quad Y = MS\,;\quad X = OS.$$

Des triangles MSP, SOR on tire les proportions :

$$\frac{MP}{\sin MSP} = \frac{SP}{\sin SMP} = \frac{MS}{\sin MPS}\,;\ \text{ou}\ MP = Y\frac{\sin\alpha'}{\sin\omega}\,;\ SP = Y\frac{\sin(\omega - \alpha')}{\sin\omega}.$$

$$\frac{SR}{\sin SOR} = \frac{OR}{\sin OSR} = \frac{OS}{\sin ORS}\,;\ \text{ou}\ SR = X\frac{\sin\alpha}{\sin\omega}\,;\ OR = X\frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega}.$$

Substituant dans les expressions de x et y on a finalement

$$y = \frac{X\sin\alpha + Y\sin\alpha'}{\sin\omega},\quad x = \frac{X\sin(\omega - \alpha) + Y\sin(\omega - \alpha')}{\sin\omega}.$$

Ces formules sont vraies quels que soient les signes des coordonnées x, y, X, Y et quels que soient les angles α, α' et ω. Mais il faudrait pour le démontrer une assez longue discussion que l'on peut éviter en faisant usage de la méthode des projections. C'est ce que nous ferons en employant les projections obliques, qui conduisent à des formules fréquemment employées.

219. *Définition des projections d'une droite.* — Étant donné un segment rectiligne AB, il y a lieu d'en considérer : 1° la longueur ; 2° la direction ; 3° le sens, qui est fixé par le mouvement d'un mobile qui parcourt ce segment. Si ce mobile va de A en B (fig. 62), nous dirons qu'il suit la direction AB ; et s'il va de B en A, nous dirons qu'il suit la direction opposée BA, ce qui impliquera à la fois la direction et le sens.

Cela posé, si nous projetons A et B sur l'axe Ox au moyen de deux droites parallèles à Oy, *le segment* ab, *pris avec un signe convenable, est la projection de* AB *sur* Ox.

En ce qui concerne le signe, observons que si le mobile va de A en B, sa projection va de a en b. Alors, si la direction ab est celle de l'axe des x positifs, on prend ab avec le signe $+$; on prend ab avec le signe $-$ dans le cas contraire (*). D'après ces conventions on a :

projection de AB sur O$x = + ab$; projection de BA sur O$x = - ab$;
» » AB » xO $= - ab$; » » BA » xO $= + ab$.

(*) Dans certains ouvrages, notamment dans le traité de *Géométrie supérieure* de CHASLES tout segment compris entre deux points A et B est considéré comme renfermant implicitement un signe ; quand ce segment est représenté par AB on dit que A est son origine ; s'il est représenté par BA, le point B est considéré comme son origine.

Plusieurs segments étant portés sur une même droite, on regarde comme positifs ceux qui sont dirigés dans un sens à partir de leurs origines et comme négatifs ceux qui sont dirigés en sens inverse ; d'après cette convention on a $AB = - BA$; et si trois points A, B, C, sont en ligne droite on a $AB + BC + CA = 0$ (à comparer avec le n° 285).

Une notation analogue est employée dans la *méthode vectorielle* dont M. RESAL a fait usage dans son *Traité de cinématique pure* et que M. MASSAU a complétée dans son *Cours de mécanique rationnelle de l'Université de Gand*. La notation AB y représente un segment dirigé de A vers B ; BA le segment dirigé de B vers A. Ici les vecteurs, que l'on peut considérer en nombre quelconque, ne sont plus dirigés suivant une même droite ; ils peuvent se combiner de diverses manières d'après des

220. Théorème. — *Si on projette sur deux axes parallèles et dirigés dans le même sens une droite quelconque donnée en grandeur et en direction, les projections sont égales et ont le même signe.*

En effet si $O'x'$ est parallèle Ox (fig. 62), et si l'on projette AB sur ces axes, on aura $ab = a'b'$, puisque ces droites sont parallèles et comprises entre parallèles. De plus, suivant que la projection a' se meut sur $O'x'$ dans le sens des abscisses positives ou négatives, la projection a se meut aussi dans le sens des abscisses positives ou négatives sur Ox.

221. Théorème. — *Si l'on projette sur les axes la droite qui part de l'origine pour aboutir au point x, y les projections ne sont autre chose que les coordonnées x, y de ce point.*

En effet, la projection de OM sur OX (fig. 63) est $+$OP ou $-$OP suivant que la direction de OP coïncide avec celle de Ox, ou avec la direction opposée; c'est-à-dire qu'elle n'est autre chose que x ; et on démontrera de la même manière que la projection de OM sur Oy n'est autre que y.

222. Théorème. — *Si l'on projette sur les axes la droite qui part du point* A (fig. 64) *dont les coordonnées sont x', y' pour aboutir au point* B *dont les coordonnées sont x'', y'', ces projections sont respectivement égales à $x'' - x'$ et $y'' - y'$.*

En effet, si l'on appelle x_1, y_1 les coordonnées du point A rapporté à de nouveaux axes, Ax_1, Ay_1, parallèles aux axes primitifs, on aura, d'après ce qui précède,

$$\text{projection de AB sur } Ox = \text{pr. AB sur } Ax_1 = x_1 = x'' - x'$$

et on fera une démonstration analogue pour l'axe des y. On a donc les formules générales :

$$\text{projection de AB sur } Oy = y'' - y'.$$
$$\text{projection de AB sur } Ox = x'' - x'.$$

223. *Coefficients de projection.* — Par l'origine menons une droite OM (fig. 65), d'une longueur égale à l'unité et parallèle à la droite AB

---

règles fixes constituant la méthode vectorielle, qui est susceptible de nombreuses applications, mais sur laquelle les limites de ce cours ne nous permettent pas de nous étendre ici; la notation AB dont on y fait usage implique que cette expression renferme un signe, de telle façon qu'on a $AB + BA = 0$.

donnée en grandeur et en direction. Les coordonnées l, m du point M sont ce que nous appellerons les *coefficients de projection* de la droite AB. Pour justifier cette dénomination nous prouverons qu'on obtient les projections de AB sur les axes en multipliant la longueur AB par l et m respectivement.

Menons Ax_1 parallèle à Ox; BP et MQ parallèles à Oy; les triangles semblables ABP, OMQ donnent la proportion

$$\frac{AB}{OM}=\frac{AP}{OQ};$$

mais, les projections de AB sur Ox et sur Ax_1 étant égales, on a

$$\text{proj. AB sur } Ox = \pm AP, \quad \text{proj. OM sur } Ox = \pm OQ;$$

les signes supérieurs, de même que les signes inférieurs vont ensemble ; donc,

$$\frac{\text{proj. AB sur } Ox}{\text{proj. OM sur } Ox}=\frac{AP}{OQ}=\frac{AB}{OM};$$

mais, proj. OM sur $Ox = l$; $OM = 1$; donc

$$\text{proj. AB sur } Ox = AB \times l,$$

et on trouvera de la même manière que

$$\text{proj. AB sur } Oy = AB \times m.$$

224. *Soient sur une droite indéfinie* AB (fig. 65), *qui a pour coefficients de projection* l, m, *un point fixe* A *dont les coordonnées sont* x', y', *et un point mobile* M' *ayant pour coordonnées* x, y. *Appelons* ρ *le rayon vecteur du point* M' *compté à partir de* A *et considéré comme positif s'il tombe sur* AB, *et négatif s'il tombe du côté opposé*; *on aura les formules générales*

$$x - x' = l\rho, \quad y - y' = m\rho.$$

En effet, si le point M' tombe sur AB on a (nos 222 et 223)

$$\text{proj. de AM' sur } Ox = x - x' = AM' \times l;$$

mais dans ce cas $AM' = \rho$; donc $x - x' = l\rho$.

Si, au contraire, le point M' tombe en M'' sur le prolongement de AB, on a

$$\text{proj. de M''A sur } Ox = x' - x = M''A \times l;$$

mais alors $M''A = -\rho$; donc on a encore, après avoir changé tous les signes : $x - x' = l\rho$; une démonstration analogue s'applique à l'axe des y ; donc on obtient finalement les formules générales :

$$x - x' = l\rho, \quad y - y' = m\rho.$$

Première remarque. — Les coefficients de projection l et m sont liés par l'équation de condition

$$l^2 + m^2 + 2lm \cos \omega = 1\,;$$

car l et m sont les coordonnées d'un point dont la distance à l'origine est égale à l'unité.

Deuxième remarque. — Si l'on donne deux quantités l', m', proportionnelles aux coefficients de projection l, m, il est facile de déterminer ces coefficients eux-mêmes.

En effet, si l'on désigne par $\pm r$ le rapport de l' et m' à l et m, r étant une quantité positive, on aura

$$\frac{l'}{l} = \frac{m'}{m} = \pm r\,;$$

mais on a aussi

$$l^2 + m^2 + 2lm \cos \omega = 1, \quad \text{d'où} \quad r = \sqrt{l'^2 + m'^2 + 2l'm' \cos \omega}.$$

De là on déduit finalement

$$l = \pm \frac{l'}{r} = \frac{l'}{\pm \sqrt{l'^2 + m'^2 + 2l'm' \cos \omega}},$$

$$m = \pm \frac{m'}{r} = \frac{m'}{\pm \sqrt{l'^2 + m'^2 + 2l'm' \cos \omega}}.$$

Ces valeurs de l et m déterminent deux directions opposées et il sera facile de trouver quels signes il faudra choisir quand on connaîtra le sens de la droite AB.

Troisième remarque. — Si A (fig. 66) est le point dont les coordonnées sont l et m, les quantités l' et m' seront les coordonnées d'un point pris sur OA à la distance r de l'origine.

En effet, soient l_1 et m_1 les coordonnées du point A' tel que $OA' = r$. On aura, à cause des triangles semblables OAM, OA'M',

$$\frac{l_1}{l} = \frac{m_1}{m} = \frac{OA'}{OA} = \frac{r}{1}; \quad \text{d'où} \quad l_1 = lr, \quad m_1 = mr.$$

Si le point A' était pris sur le prolongement de OA, l_1 et m_1 auraient respectivement des signes opposés à ceux de l et de m ; pour embrasser les deux cas il faut donc écrire $l_1 = \pm lr$, $m_1 = \pm mr$. Ces valeurs ne sont autres que celles de l' et m', ce qui démontre la proposition.

Quand le point A' est donné, la direction de OA est connue ; les constantes l', m' suffisent donc pour déterminer la direction d'une droite

aussi bien que les coefficients de projection. C'est pourquoi nous les appellerons *coefficients de direction.*

225. Théorème. — *La somme des projections sur un axe fixe, de tous les côtés d'un polygone fermé, est égale à zéro, le sens dans lequel sont dirigés les côtés étant déterminé par un mobile qui parcourt successivement tous les côtés pour revenir au point de départ.*

Soit le polygone fermé ABCD (fig. 67) dont les côtés sont en nombre quelconque; désignons les abscisses des points A, B, C, D, respectivement par x_1, x_2, x_3, x_4 et considérons les projections des côtés sur Ox. Nous aurons (n° 222) les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \text{proj. AB} &= x_2 - x_1, \\ \text{proj. BC} &= x_3 - x_2, \\ \text{proj. CD} &= x_4 - x_3, \\ \text{proj. DA} &= x_1 - x_4. \end{aligned}$$

Faisant la somme nous aurons

$$\text{proj. AB} + \text{proj. BC} + \text{proj. CD} + \text{proj. DA} = 0.$$

C. Q. F. D.

Cette égalité peut s'écrire sous une forme plus explicite. Désignons par l_1, l_2, l_3, l_4, les coefficients de projection des côtés; ou, en d'autres termes, les abscisses des points situés à l'unité de distance de l'origine sur des droites menées par cette origine parallèlement aux côtés et dans le même sens que ces derniers; nous aurons (n° 223)

$$\text{AB} \times l_1 + \text{BC} \times l_2 + \text{CD} \times l_3 + \text{DA} \times l_4 = 0.$$

Remarque. — Ce théorème peut encore s'énoncer autrement; en effet, la projection de DA est égale et de signe contraire à celle de AD; on a donc

$$\text{proj. AD} = -\text{proj. DA} = \text{proj. AB} + \text{proj. BC} + \text{proj. CD}.$$

C'est-à-dire que *la projection sur l'axe des x d'une droite donnée en grandeur et en direction est égale à la somme des projections des côtés d'une ligne brisée qui aboutit aux mêmes extrémités, pourvu que, pour déterminer dans quel sens sont dirigés les côtés, on chemine en partant de la même extrémité sur la ligne droite ou sur la ligne brisée.*

Il est clair que la même démonstration s'appliquerait à l'axe des y.

226. Théorème. — *Si l'on projette sur une droite quelconque les coordonnées* X, Y *d'un point* M *pris à volonté dans le plan, la somme algébrique des deux projections est égale à la projection sur la même droite du rayon vecteur dirigé de l'origine vers le point* M.

Pour le faire voir observons d'abord que les projections sur deux droites parallèles et dirigées dans le même sens étant toujours égales, on peut supposer que la projection se fasse sur un axe Ox mené par l'origine parallèlement à la droite donnée et dirige dans le même sens (fig. 68).

Cela posé, si le point M est placé dans l'angle XOY des axes positifs, il a pour coordonnées $X = OP$, $Y = MP$; et en vertu du théorème précédent on a, en désignant par l et l' respectivement les coefficients de projection de OX et OY sur Ox

$$\text{proj. de OM sur } Ox = OP \times l + MP \times l' = lX + l'Y.$$

Le théorème est donc démontré pour le cas où X et Y sont positifs.

Supposons maintenant que l'une des coordonnées, X par exemple, soit négative ; et afin de ne pas changer la figure comptons les X positifs dans la direction OX'. Le coefficient de projection de OP sera alors de signe contraire à celui de OX'; si celui-ci est toujours désigné par l, celui de OP sera $-l$; d'autre part, OP sera $-X$; donc la projection de OP devient $(-l)(-X) = +lX$; on est donc conduit à la même formule que précédemment. On prouverait de la même manière que la formule s'applique aussi au cas où Y est négatif. Le théorème est donc démontré dans toute sa généralité.

227. *Formules pour changer les directions des axes.* — Considérons maintenant un point M (fig. 68), rapporté alternativement aux axes OX, OY et Ox, Oy et proposons-nous d'exprimer x et y en fonction de X et Y.

Dans ce qui suit il sera toujours entendu que, deux axes étant coordonnés, la projection sur l'un d'eux se fait parallèlement à l'autre. Cela posé, désignons par l et m les coefficients de projection de la droite OX rapportée aux axes Ox et Oy ; par l', m', ceux de la droite OY rapportée aux mêmes axes ; projetons OM sur Ox; cette projection sera en grandeur et en signe égale à x. Mais, en vertu du théorème précédent, elle a aussi pour expression $lX + l'Y$; on a donc $x = lX + l'Y$.

En projetant ensuite OM sur oy on trouve $y = mX + m'Y$. On aura, par conséquent, les formules

$$x = lX + l'Y, \quad y = mX + m'Y,$$

lesquelles sont vraies quels que soient les signes des diverses quantités qui s'y trouvent. Elles sont, sous une forme abrégée, les mêmes que celles qui ont déjà été établies n° 218. C'est ce qu'on peut démontrer de la manière qui suit.

228. *Exprimer les coefficients de projection d'une droite en fonction des angles que cette droite fait avec les axes.*

Soient l, m, les coordonnées du point M (fig. 69), dont la distance à l'origine est égale à l'unité; appelons ω l'angle des axes et α l'angle que OM fait avec l'axe des x. Ces deux angles sont comptés du même côté de Ox, c'est-à-dire qu'on doit les considérer comme engendrés par la droite Ox, tournant vers Oy comme l'indique une flèche(*); nous supposerons d'abord que l et m soient positifs, ainsi que le montre la figure.

On a alors, dans le triangle MOP

$$(a) \qquad \frac{\text{OP}}{\sin \text{OMP}} = \frac{\text{PM}}{\sin \text{POM}} = \frac{\text{OM}}{\sin \text{OPM}}.$$

Ce qui revient à

$$\frac{l}{\sin(\omega - \alpha)} = \frac{m}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \omega}.$$

Admettons maintenant que l soit seul négatif, et pour ne pas changer la figure, supposons que les x positifs soient comptés sur Ox' au lieu de l'être sur Ox. Si l'on compte toujours les angles positifs dans le sens de la flèche, ω devient $180° + x\text{O}y$ et α devient $180° + \text{POM}$. Il faudra donc, dans les formules (a) faire

$$\text{OMP} = \omega - 180° - (\alpha - 180°), \quad \text{POM} = \alpha - 180°,$$
$$\text{OPM} = 360° - \omega, \quad \text{OP} = -l,$$

ce qui conduit aux égalités

$$\frac{-l}{\sin(\omega - \alpha)} = \frac{m}{-\sin \alpha} = \frac{1}{-\sin \omega},$$

lesquelles ne diffèrent pas de celles trouvées plus haut.

(*) Dans son *Traité de Géométrie supérieure*, CHASLES a adopté pour la manière de compter les angles une convention analogue à celle que nous avons fait connaître dans la note du n° 219 pour les segments d'une droite; de sorte qu'on a, par exemple, angle MOP = — angle POM.

Pour considérer le cas où m seul est négatif, supposons les y positifs comptés sur Oy'; l'angle ω devient alors

$$xOy + 180^0, \quad \text{d'où} \quad xOy = \omega - 180^\circ;$$

il faudra donc dans les égalités (a) faire

$$\text{OMP} = \omega - 180^0 - \alpha, \ \text{POM} = \alpha, \ \text{OPM} = xOy' = 360^0 - \omega, \ \text{PM} = -m,$$

elles deviennent ainsi

$$\frac{l}{-\sin(\omega - \alpha)} = \frac{-m}{\sin \alpha} = \frac{1}{-\sin \omega},$$

ce qui ramène aux mêmes formules que précédemment.

Enfin si l et m sont tous deux négatifs, on pourra supposer que les axes des coordonnées positives soient Ox' et Oy'. Alors on aura

$$\omega = x'Oy', \quad \alpha = 180^0 + \text{POM},$$

et dans les formules (a) on devra faire

$$\text{OMP} = \omega - (\alpha - 180^0), \quad \text{POM} = \alpha - 180^0, \quad \text{OPM} = 180^0 - \omega,$$
$$\text{OP} = -l, \quad \text{MP} = -m,$$

et il viendra

$$\frac{-l}{-\sin(\omega - \alpha)} = \frac{-m}{-\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \omega},$$

formules qui reviennent encore aux précédentes.

On peut maintenant prouver que les formules de transformation du n° 227 coïncident avec celles du n° 218 et qu'ainsi la généralité de ces dernières est démontrée; en effet, α et α' étant les angles que OX et OY font respectivement avec Ox, on a, d'après ce qu'on vient de voir,

$$l = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega}, \quad m = \frac{\sin \alpha}{\sin \omega}, \quad l' = \frac{\sin(\omega - \alpha')}{\sin \omega}, \quad m' = \frac{\sin \alpha'}{\sin \omega}.$$

Remarque. Quand les projections sont orthogonales les coefficients de projection d'une droite sont les cosinus des angles que cette droite fait avec les axes.

En effet, le coefficient de projection sur l'axe des x est $l = \dfrac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega}$. Si la projection est orthogonale, l'axe des y est perpendiculaire à l'axe des x et on a $\omega = 90^\circ$; donc

$$\sin \omega = 1, \quad \sin(\omega - \alpha) = \cos \alpha, \quad l = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega} = \cos \alpha.$$

Dans l'application de cette dernière règle il importe peu que l'angle α soit compté d'un côté ou de l'autre de l'axe sur lequel se fait la projection, puisque l'on a

$$\cos\alpha = \cos(-\alpha).$$

228bis. *Changement de direction des axes avec déplacement de l'origine.* — La transformation peut se faire en deux fois en déplaçant d'abord l'origine, et en changeant ensuite les directions des axes, ce qui montre que les formules les plus générales pour passer d'un système d'axes rectilignes à un autre sont les suivantes :

$$x = lX + l'Y + x', \quad y = mX + m'Y + y'.$$

Remarque. — Dans ces formules x et y sont des fonctions linéaires de X et Y ; il en résulte que le degré de l'équation d'un lieu géométrique ne change pas quand on passe d'un système de coordonnées rectilignes à un autre.

229. *Transformation des coordonnées rectilignes en coordonnées polaires.* — Soient Ox, Oy (fig. 70), les axes rectilignes ; A le pôle, ayant pour coordonnées rectilignes x', y' ; Ax, parallèle à Ox, l'axe polaire.

Considérons un point quelconque M, ayant pour coordonnées rectilignes x, y. Ses coordonnées polaires seront l'angle de position $MAX = \alpha$, et le rayon vecteur $\rho = \pm AM$, le signe supérieur convenant aux points situés sur AM et le signe inférieur à ceux qui se trouvent sur AM' ; nous avons démontré (n° 224) que si l, m sont les coefficients de projection de AM, on a

$$x = x' + l\rho, \quad y = y' + m\rho,$$

formules dans lesquelles, d'après le n° 228, on a

$$l = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega}, \quad m = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega}.$$

Ce sont les formules générales qui servent à passer des coordonnées rectilignes x, y, aux coordonnées polaires ρ, α.

Si les axes xOy sont rectangulaires, on a

$$x = x' + \rho\cos\alpha, \quad y = y' + \rho\sin\alpha.$$

Remarque. — On peut aussi regarder le point M comme ayant pour coordonnées polaires les quantités l, m, ρ, puisque celles-ci fixent complètement la position du point. Ces coordonnées sont en apparence au

nombre de trois; mais en réalité elles se réduisent à deux à cause de l'équation

$$l^2 + m^2 + 2lm \cos \omega = 1.$$

230. *Distance d'un point à une droite.* — Deux données sont nécessaires pour déterminer la position d'une droite dans un plan; par exemple, pour fixer la position de la droite AB (fig. 71), il suffit de se donner l'angle $NOx = \theta$ que fait avec l'axe des x positifs une perpendiculaire PN à cette droite, ainsi que la distance $OP = p$ de cette droite l'origine; on voit, en effet, que θ et p sont des coordonnées polaires qui fixent la position du point P; et la droite OP étant tracée on pourra construire BA.

Cela posé, calculons la distance à cette droite d'un point M qui a pour coordonnées x, y; à cet effet, joignons OM et projetons orthogonalement OM sur ON. On a vu (n° 226) que cette projection est égale à la somme algébrique des projections orthogonales des coordonnées x, y, du point M; elle a donc pour expression

$$x \cos x\text{ON} + y \cos y\text{ON};$$

mais $x\text{ON} = \theta$, et $y\text{ON} = \pm(\omega - \theta)$ suivant que ON tombe d'un côté de Oy ou du côté opposé; donc on a

$$\text{proj. OM sur ON} = x \cos \theta + y \cos(\omega - \theta).$$

D'autre part, la projection de OM est égale aussi à celle de la ligne brisée OPQM; mais la projection de OP est égale à p; celle de PQ est nulle, puisque PQ est perpendiculaire à PN; enfin celle de QM est égale à QM, c'est-à-dire à la distance d que l'on cherche; on a donc

$$\text{proj. de OM sur ON} = p + d.$$

En égalant ces deux expressions de la projection de OM, nous aurons une équation qui nous donnera d. Toutefois, il est à remarquer que pour un point situé comme M', de l'autre côté de AB, la projection de Q'M' serait $-d$. Afin d'avoir une formule générale, applicable dans tous les cas, il faudra donc affecter d d'un double signe, et on aura

$$\pm d = x \cos \theta + y \cos(\omega - \theta) - p.$$

L'angle θ qui entre dans cette formule détermine sans ambiguïté le sens d'une des perpendiculaires, PN ou PO, élevées sur AB au point P; nous appellerons *normale* celle des perpendiculaires dont le sens est ainsi déterminé; cela posé, le signe + convient aux points situés du côté de cette normale, et le signe — aux points situés du côté opposé.

231. *Équation de la ligne droite. Forme normale de Hesse.* — Si le point M est sur AB, on a $d = 0$. La relation qui lie les coordonnées (x,y) d'un point quelconque de cette droite est donc

$$x \cos \theta + y \cos (\omega - \theta) - p = 0\,;$$

c'est l'équation de la ligne droite en fonction des coordonnées polaires de la projection orthogonale de l'origine sur cette droite. Si les axes sont rectangulaires, $\omega = 90°$ et on a

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0\,;$$

cette forme de l'équation de la ligne droite est ce qu'on appelle la *forme normale de Hesse*. On voit que si on remplace x et y par les coordonnées d'un point quelconque, dans le premier membre de cette équation, on obtient l'expression de la distance du point à la droite, et que le signe de cette expression fait connaître si ce point se trouve du côté de la normale ou du côté opposé.

232. *Toute équation du premier degré représente une ligne droite.* — La forme générale de l'équation du premier degré à deux variables x, y est

$$Ax + By + C = 0.$$

Pour prouver qu'elle représente une droite il suffira de faire voir qu'on peut déterminer une droite dont l'équation se ramène à la forme proposée. On pourra, d'ailleurs, dans la démonstration, supposer les coordonnées rectangulaires, puisque le degré d'une équation ne change pas quand on passe d'un système d'axes rectilignes à un autre. Tout se réduit donc à prouver qu'on peut ramener l'équation proposée à la forme normale de Hesse, c'est-à-dire déterminer θ et p de manière qu'elle devienne identique à l'équation

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0.$$

Or, il suffit pour cela qu'on ait

$$\frac{\cos \theta}{A} = \frac{\sin \theta}{B} = \frac{-p}{C} = \lambda,$$

λ étant une inconnue auxiliaire; en élevant au carré on obtient:

$$\frac{\cos^2 \theta}{A^2} = \frac{\sin^2 \theta}{B^2} = \lambda^2 = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{A^2 + B^2},$$

donc, finalement il vient

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \cos\theta = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\theta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Comme p doit être positif la dernière de ces égalités fera connaître le signe qu'il faut donner au radical ; ce signe devant, d'ailleurs, être partout le même, on voit que le sinus et le cosinus de l'angle θ sont déterminés en grandeur et en signe, ce qui fait connaître cet angle sans ambiguïté. La droite que représente l'équation proposée est donc ainsi bien déterminée.

233. *Paramètres.* — L'équation générale d'une droite contient trois coefficients arbitraires A, B, C ; mais, ceux-ci pouvant toujours être remplacés par les rapports de deux d'entre eux au troisième, il n'y a en réalité dans l'équation que deux constantes indéterminées, dont on peut disposer pour assujetir la droite à deux conditions. Ces constantes portent le nom de *paramètres*. On peut choisir ces paramètres d'un grand nombre de manières différentes ; par exemple, dans la forme de Hesse, ce sont la distance de la droite à l'origine et l'angle de la normale avec l'axe des x ; nous allons indiquer quelques autres formes que peut prendre l'équation d'une ligne droite, par un autre choix des paramètres.

234. *Coordonnées à l'origine.* — Pour construire la droite représentée par l'équation

$$Ax + By + C = 0$$

on peut faire usage de divers moyens ; par exemple, déterminer les points A, B où elle coupe les axes (fig. 71).

Pour déterminer le point A, désignons son abscisse par p ; comme son ordonnée est nulle, l'équation de la droite doit être vérifiée quand on y fait $x = p$, $y = 0$ et on trouve par conséquent $p = -\frac{C}{A}$; c'est ce qu'on nomme l'*abscisse à l'origine*.

De même, si on désigne par q l'ordonnée du point B, on aura $q = -\frac{C}{B}$; c'est l'*ordonnée à l'origine*.

On tire de là

$$A = -\frac{C}{p}, \quad B = -\frac{C}{q};$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation donnée, celle-ci devient

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

On a ainsi l'équation de la ligne droite en fonction des coordonnées à l'origine.

Si la droite est parallèle à l'axe des x, p est infini et l'équation se réduit à $y = q$; si elle est parallèle à l'axe des y, q est infini et l'équation se réduit à $x = p$.

235. *Coefficient angulaire; condition du parallélisme de deux droites.* — Si on résout par rapport à y l'équation générale

$$Ax + By + C = 0,$$

il vient, en posant $a = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$,

$$y = ax + b.$$

Dans cette équation b n'est autre chose que l'ordonnée à l'origine ; car c'est la valeur que prend y quand on fait $x = 0$.

Quant à a c'est ce qu'on nomme le *coefficient angulaire*, parce qu'il est égal, comme on va le voir, au rapport des sinus des angles que la droite fait avec les axes.

Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au point B (fig. 72) où la droite donnée BM rencontre l'axe des y. Les coordonnées de la nouvelle origine seront $x' = 0$, $y' = b$, et par conséquent, nous devrons employer les formules de transformation

$$x = X, \quad y = Y + b,$$

ce qui ramènera l'équation de la droite à la forme $Y = aX$.

Soit M un point pris sur la droite à une distance de la nouvelle origine égale à l'unité et désignons ses coordonnées X et Y par l et m ; celles-ci devant vérifier l'équation $Y = aX$, on a $a = \frac{m}{l}$; mais nous avons démontré les formules générales

$$l = \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin \omega}, \quad m = \frac{\sin \alpha}{\sin \omega},$$

α étant l'angle de BM avec l'axe des x; on a donc aussi toujours

$$a = \frac{\sin \alpha}{\sin(\omega - \alpha)}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Quand les coordonnées sont rectangulaires, il vient $a = \operatorname{tg} \alpha$; c'est-à-dire que le coefficient angulaire est alors égal à la tangente trigonométrique de l'angle que la droite fait avec l'axe des x.

Puisque a ne dépend que de α, on voit que toutes les droites parallèles ont le même coefficient angulaire et réciproquement.

La condition du parallélisme des deux droites qui ont pour équations

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0,$$

est donc

$$a = a', \quad \text{ou} \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}.$$

236. *Étant donné le coefficient angulaire d'une droite, trouver le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle que cette droite fait avec l'axe des x.* — La formule $a = \frac{\sin \alpha}{\sin(\omega - \alpha)}$ conduit immédiatement aux suivantes

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \omega}{1 + a \cos \omega} = \frac{-A \sin \omega}{B - A \cos \omega},$$

$$\sin \alpha = \frac{a \sin \omega}{\pm\sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \omega}} = \frac{-A \sin \omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \omega}},$$

$$\cos \alpha = \frac{1 + a \cos \omega}{\pm\sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \omega}} = \frac{B - A \cos \omega}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \omega}}.$$

Dans les deux dernières formules il faut prendre le radical avec le même signe; le double signe détermine les deux directions opposées de la droite; une même tangente correspond à ces deux directions; mais le sinus et le cosinus changent de signe simultanément.

237. *Autre signification géométrique du coefficient angulaire.* — Une droite ON (fig. 72), menée par l'origine parallèlement à la droite donnée OM a pour équation $y = ax$. Si l'on y fait $x = 1$, il vient $y = a$. Donc *le coefficient angulaire a est l'ordonnée d'un point pris sur la parallèle* ON *de manière que son abscisse soit égale à l'unité.* On voit aisément par là comment varie le coefficient angulaire quand, la droite tournant autour de l'origine, l'angle α croît de zéro à 180°; la valeur

de a croît de zéro à $+\infty$ quand α croît de zéro à ω; elle saute ensuite de $+\infty$ à $-\infty$, puis croît de $-\infty$ à zéro quand α croît de ω à 180°. On voit aussi que les droites $y = \pm ax$ interceptent sur une parallèle à l'axe des y un segment divisé en deux parties égales par l'axe des x, et sur une parallèle à l'axe des x un segment divisé en deux parties égales par l'axe des y. Les droites $y = \pm x$ sont les bissectrices des angles des axes.

238. *Équation générale d'une droite passant par un point.* — Si la droite qui a pour équation

$$Ax + By + C = 0$$

doit passer par un point x', y' les paramètres sont liés par l'équation

$$Ax' + By' + C = 0;$$

en éliminant C on obtient pour l'équation demandée

$$A(x - x') + B(y - y') = 0.$$

On peut encore écrire

$$y - y' = -\frac{A}{B}(x - x').$$

Si l'on veut que la droite fasse un angle α avec l'axe des x, il faut faire

$$-\frac{A}{B} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)}, \text{ (n° 235)};$$

l'équation de la droite devient alors

$$\frac{x - x'}{\sin(\omega - \alpha)} = \frac{y - y'}{\sin\alpha}.$$

On serait parvenu directement à cette dernière équation en partant des formules qui servent à passer des coordonnées rectilignes aux coordonnées polaires (n° 229). En effet, si on appelle ρ le rayon vecteur du point de la droite qui a pour coordonnées x, y, ce rayon vecteur étant compté à partir de x', y', on a

$$x = x' + l\rho, \quad y = y' + m\rho;$$

et en remplaçant m et l par leurs valeurs :

$$\frac{x - x'}{\sin(\omega - \alpha)} = \frac{y - y'}{\sin\alpha} = \frac{\rho}{\sin\omega}.$$

On peut aussi écrire plus simplement

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\rho.$$

239. Cette forme symétrique de l'équation de la ligne droite est avantageuse dans un grand nombre de questions, notamment dans la théorie des courbes du second degré. Nous en montrerons ici quelques exemples, notre intention n'étant pas d'étudier en détail les propriétés des lignes du deuxième ordre.

L'équation générale des courbes du second degré (ou des coniques) est de la forme

$$\varphi(x, y) \equiv ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0;$$

si l'on représente par z la longueur prise pour unité, on peut rendre cette équation homogène et l'écrire comme il suit

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0;$$

on vérifiera, d'ailleurs sans peine, que si l'on désigne par $\varphi'(x)$, $\varphi'(y)$, $\varphi'(z)$ les dérivées de la fonction φ prises respectivement par rapport à x, y, z, on a l'identité

$$x\varphi'(x) + y\varphi'(y) + z\varphi'(z) = 2\varphi(x, y, z).$$

On trouvera aussi qu'en remplaçant les variables x et y par $X + x'$ et $Y + y'$, et ordonnant par rapport à X et Y il vient

$$\varphi(X+x', Y+y') = aX^2 + bY^2 + 2hXY + X\varphi'(x') + Y\varphi'(y') + \varphi(x', y');$$

$\varphi'(x')$ et $\varphi'(y')$ désignent ici les fonctions $\varphi'(x)$ et $\varphi'(y)$ dans lesquelles les variables x et y sont remplacées respectivement par x' et y' (*).

Cela posé, proposons-nous de trouver les points de rencontre de la conique avec la droite qui a pour équation

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\rho.$$

Tirons de cette dernière les valeurs de x et de y pour les substituer dans l'équation de la conique ; il suffira pour cela de faire dans l'équation ci-dessus $X = l\rho$ et $Y = m\rho$; et en posant

$$s = al^2 + bm^2 + 2hlm, \quad t = l\varphi'(x') + m\varphi'(y'),$$

(*) Cette formule n'est qu'un cas particulier de la formule de Taylor.

nous obtiendrons, pour déterminer les rayons vecteurs des deux points d'intersection, l'équation du second degré

$$s\rho^2 + t\rho + \varphi(x', y') = 0;$$

de là on déduit diverses conséquences que nous allons succinctement exposer.

1° Si l'on a

$$t = l\varphi'(x') + m\varphi'(y') = 0,$$

les rayons vecteurs des deux points de rencontre sont égaux et de signes contraires. La droite donnée étant considérée comme une corde de la conique, cette corde est alors divisée au point x', y' en deux parties égales.

2° Si l'on a $\varphi'(x') = 0$, $\varphi'(y') = 0$ la condition $t = 0$ est vérifiée pour toutes les valeurs de l et m, c'est-à-dire que toutes les cordes passant par le point x', y' sont divisées en ce point, qu'on nomme *le centre*, en deux parties égales.

3° Si dans l'équation

$$l\varphi'(x') + m\varphi'(y') = 0$$

on regarde l et m comme des constantes, x' et y' comme des variables, elle est la relation qui lie les coordonnées du point milieu d'une corde quelconque, parallèle à la droite fixe dont la direction est déterminée par les constantes l et m. Cette équation étant du premier degré par rapport à x' et y', on en conclut que le lieu géométrique des milieux d'une série de cordes parallèles est une droite. Cette droite, appelée *diamètre*, a pour équation

$$l\varphi'(x) + m\varphi'(y) = 0.$$

4° Si l'on a $s = 0$, un des points de rencontre de la droite et de la conique est à l'infini ; si en même temps $t = 0$, la droite rencontre la conique en deux points à l'infini ; c'est une *asymptote* ; toutefois, si on avait en même temps $\varphi(x', y') = 0$, la droite donnée ferait partie de la conique.

5° Si l'on a

$$t^2 - 4s\varphi(x', y') = 0,$$

les deux points de rencontre coïncident et la droite devient une *tangente* à la courbe.

6° Si dans cette dernière relation on regarde x' et y' comme des variables et qu'on les remplace par x et y, il vient

$$[l\varphi'(x) + m\varphi'(y)]^2 - 4 \,.\, \varphi(x, y)(al^2 + bm^2 + 2hlm) = 0.$$

C'est une relation entre les coordonnées d'un point pris à volonté sur une tangente parallèle aux droites dont la direction est déterminée par les constantes l et m ; ou, en d'autres termes, c'est l'équation de cette tangente ; mais comme elle est du second degré elle représente les deux tangentes parallèles aux droites données. Si l'on veut trouver les points où ces tangentes touchent la courbe, il suffit de considérer comme simultanées leur équation et celle de la conique $\varphi(x, y) = 0$. On trouve ainsi l'équation

$$[l\varphi'(x) + m\varphi'(y)]^2 = 0,$$

ce qui montre que les deux droites et la conique se coupent en deux couples de points coïncidents situés sur le diamètre conjugué des cordes auxquelles les deux tangentes sont parallèles ; ou, en d'autres termes, que les tangentes aux extrémités d'un diamètre sont parallèles aux cordes conjuguées de ce diamètre.

7° Si on élimine l et m entre les équations

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} \quad \text{et} \quad t^2 - 4s \,.\, \varphi(x', y') = 0,$$

on obtient une relation entre les coordonnées x et y d'une tangente menée à la conique par un point extérieur x', y'. En désignant par T et S ce que deviennent t et s quand on y remplace l et m respectivement par $x - x'$ et $y - y'$, on obtient l'équation du second degré

$$(a) \qquad \mathrm{T}^2 - 4 \,.\, \varphi(x', y') \,.\, \mathrm{S} = 0,$$

laquelle représente, par conséquent, les deux tangentes menées par le point x', y'.

On peut donner à cette équation une autre forme qui manifeste clairement le contact ; en effet, on a d'abord

$$\mathrm{T} = (x - x')\varphi'(x') + (y - y')\varphi'(y') = x\varphi'(x') + y\varphi'(y') - [x'\varphi'(x') + y'\varphi'(y')];$$

et, à cause de l'identité

$$x'\varphi'(x') + y'\varphi'(y') + z\varphi'(z') = 2\varphi(x', y', z'),$$

où l'on suppose $z = z' = 1$, cette égalité devient

$$\mathrm{T} = x\varphi'(x') + y\varphi'(y') + z\varphi'(z') - 2\varphi(x', y', z') = \mathrm{P} - 2\varphi(x', y', z').$$

D'autre part, si dans le développement de $\varphi(X + x', Y + y')$ écrit plus haut on remplace X et Y respectivement par $x - x'$ et $y - y'$, il vient

$$\varphi(x,y) = S + T + \varphi(x', y') = S + P - \varphi(x', y').$$

Remplaçant S et T par leurs valeurs dans l'équation (a), on a

$$[P - 2\varphi(x', y')]^2 - 4\varphi(x', y')\,[\varphi(x, y) + \varphi(x', y') - P] = 0$$

ou simplement

$$P^2 - 4 \,.\, \varphi(x', y') \,.\, \varphi(x, y) = 0.$$

Cette dernière forme de l'équation des deux droites montre que celles-ci rencontrent la conique en deux couples de points coïncidents situés sur la droite dont l'équation est $P = 0$, ou

$$x\varphi'(x') + y\varphi'(y') + z\varphi'(z') = 0.$$

Cette dernière droite est la polaire du point x', y' (cf. n° 316).

240. *Droite passant par deux points.* — Si l'on veut que la droite

$$y - y' = -\frac{A}{B}(x - x')$$

qui passe déjà par x', y' passe en outre par un point x'', y'' il faudra déterminer le paramètre $-\dfrac{A}{B}$ de manière à vérifier la condition

$$y'' - y' = -\frac{A}{B}(x'' - x');$$

on a donc pour l'équation cherchée

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x').$$

On parvient encore à celle-ci, simplifiée comme elle peut l'être, en éliminant A, B, C entre les trois équations (*)

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0,\\ A'x' + By' + C &= 0,\\ Ax'' + By'' + C &= 0; \end{aligned}$$

ce qui conduit à l'équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

(*) Nous supposons connus les éléments de la théorie des déterminants.

laquelle peut encore s'écrire :

$$x(y' - y'') + y(x'' - x') + x'y'' - y'x'' = 0.$$

Dans cette équation x et y sont les coordonnées courantes, c'est-à-dire les coordonnées variables d'un point quelconque de la droite.

Si l'on y regarde x et y comme les coordonnées d'un point qui reste fixe comme x', y' et x'', y'', on a l'équation de condition qui exprime que ces trois points sont en ligne droite.

241. *Point de rencontre de deux droites et équation générale d'une droite passant par ce point.* — Les coordonnées du point de rencontre de deux droites doivent vérifier les équations de ces droites. Si celles-ci sont

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0,$$

le point cherché aura donc pour coordonnées

$$x' = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}, \quad y' = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'}.$$

Pour obtenir l'équation générale d'une droite passant par ce point, il suffira de remplacer x' et y' par les valeurs ci-dessus dans l'équation

$$y - y' = a(x - x').$$

Le coefficient angulaire a restera indéterminé.

On peut encore donner à cette équation une autre forme dont on fait fréquemment usage. Pour abréger nous représenterons par L et M les premiers membres des équations données, qui deviendront ainsi $L = 0$, $M = 0$. Multiplions-les respectivement par les indéterminées l et m et additionnons ; nous aurons $Ll + Mm = 0$. Cette équation étant du premier degré représente une droite ; et celle-ci est vérifiée par les coordonnées du point de rencontre des deux droites données, puisqu'on a en ce point $L = 0$ et $M = 0$.

On peut aussi s'assurer que $Ll + Mm = 0$ est l'équation la plus générale d'une droite passant par le point de rencontre des deux autres ; car comme elle contient un paramètre indéterminé $\frac{m}{l}$ on peut s'imposer une seconde condition pour faire coïncider la droite avec l'une quelconque de celles qui passent par le point donné ; par exemple, si l'on veut qu'elle passe par un deuxième point x', y' il faudra que son équation soit vérifiée par les coordonnées x', y' ; donc, désignant par L' et M' ce que

deviennent L et M par cette substitution, on aura $\frac{m}{l} = -\frac{M'}{L'}$, et l'équation cherchée sera $\frac{L}{L'} = \frac{M}{M'}$.

Nous aurons à revenir plus tard sur cette question (nos 247 et 252).

242. *Condition pour que trois droites passent par un même point.* — Soient les équations de ces droites

$$Ax + By + C = 0, \quad A'x + B'y + C' = 0, \quad A''x + B''y + C'' = 0.$$

Pour que les trois droites passent par un même point il faut que leurs équations soient vérifiées par un même système de valeurs de x et de y ce qui exige qu'on ait

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad (AB'C'') = 0,$$

en convenant, d'après une notation admise, de représenter un déterminant par les éléments placés sur la diagonale.

La proposition suivante permet souvent de vérifier très simplement que trois droites passent par un même point. *Soient, sous forme abrégée,* $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, *les équations des trois droites; s'il existe une identité*

$$Ll + Mm + Nn = 0,$$

l, m, n étant différents de zéro, les trois droites passent par un même point.

En effet, $Ll + Mm = 0$ est l'équation d'une droite passant par l'intersection des droites L et M; mais comme on a identiquement $Ll + Mm = -Nn$, cette équation revient à $Nn = 0$; ou à $N = 0$, puisque n n'est pas nul; donc la troisième droite, qui a pour équation $N = 0$, passe par l'intersection des deux premières.

Réciproquement, *si les trois droites passent par un même point, on peut toujours trouver trois constantes l, m, n telles que la somme $Ll + Mm + Nn$ soit identiquement nulle.* — Ceci est une conséquence de ce qui précède; car si $N = 0$ est l'équation d'une droite passant par le point de rencontre de $L = 0$ et $M = 0$, il faut que $N = 0$ ne diffère que par un facteur constant de $Ll + Mm = 0$, c'est-à-dire qu'on doit avoir une identité de la forme

$$Ll + Mm + Nn = 0.$$

Il sera d'ailleurs facile de trouver les valeurs de l, m, n; car il suffira de prendre pour l, m, n les mineurs du déterminant $(AB'C'')$. par rapport aux éléments A, A', A'', ou par rapport à B, B', B'', ou encore par rapport à C, C', C''. Par exemple, faisons

$$l = B'C'' - B''C', \quad m = B''C - BC'', \quad n = BC' - B'C,$$

on aura

$$Ll + Mm + Nn = x(Al + A'm + A''n) + y(Bl + B'm + B''n) + Cl + C'm + C''n;$$

ou

$$Ll + Mm + Nn = x\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} B & B & C \\ B' & B' & C' \\ B'' & B'' & C'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & B & C \\ C' & B' & C' \\ C'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Dans cette égalité les deux derniers déterminants sont identiquement nuls; et quant au premier il est égal à zéro parce que les trois droites passent par un même point. On a donc l'identité

$$Ll + Mm + Nn = 0.$$

243. *Si les trois droites ne passent pas par un même point, l'équation d'une autre droite quelconque peut se mettre sous la forme*

$$Ll + Mm + Nn = 0.$$

Car, soit une droite quelconque

$$ax + by + c = 0.$$

Son équation sera identique à

$$Ll + Mm + Nn = 0,$$

ou à

$$(Ax + By + C)\,l + (A'x + B'y + C')\,m + (A''x + B''y + C'')\,n = 0,$$

si l, m, n sont déterminés par les trois équations

$$Al + A'm + A''n = a, \quad Bl + B'm + B''n = b, \quad Cl + C'm + C''n = c.$$

Or ces trois équations donnent toujours pour l, m, n des valeurs finies et déterminées quand les droites L, M, N forment un triangle, puisque alors le déterminant $(AB'C'')$ est différent de zéro (comparer au n° 259).

244. *Angle de deux droites; condition de perpendicularité.* — Soient les deux droites MN et MP (fig. 73), ayant pour coefficients angulaires a et a'; par l'origine menons les droites OA, OB, respective-

ment parallèles à MN et MP et placées au-dessus de l'axe des x, de manière à déterminer sans ambiguïté un angle AOB = MNP.

L'inspection des coefficients angulaires fera connaître lequel des deux angles $\alpha = \text{AO}x$, ou $\alpha' = \text{BO}x$ est le plus grand; car on sait (n° 237) comment le coefficient angulaire a varie avec l'angle α; soit donc $\alpha > \alpha'$; on aura

$$\text{tg NMP} = \text{tg}(\alpha - \alpha') = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\alpha'}{1 + \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\alpha'}.$$

Or on a (n° 237)

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{a \sin\omega}{1 + a\cos\omega}, \quad \text{tg}\,\alpha' = \frac{a' \sin\omega}{1 + a'\cos\omega};$$

d'où l'on déduit finalement

$$\text{tg NMP} = \frac{(a - a')\sin\omega}{1 + (a + a')\cos\omega + aa'}.$$

D'après la manière dont nous avons établi cette formule l'angle NMP ne peut être négatif; il sera donc aigu ou obtus suivant que la tangente sera positive ou négative.

Si les équations des deux droites sont

$$\text{A}x + \text{B}y + \text{C} = 0, \quad \text{A}'x + \text{B}'y + \text{C}' = 0,$$

on devra faire

$$a = -\frac{\text{A}}{\text{B}}, \quad a' = -\frac{\text{A}'}{\text{B}'},$$

et on aura

$$\text{tg NMP} = \frac{(\text{A}'\text{B} - \text{AB}')\sin\omega}{\text{AA}' + \text{BB}' - (\text{AB}' + \text{BA}')\cos\omega}.$$

Quand les coordonnées sont rectangulaires on trouve

$$\text{tang NMP} = \frac{\text{A}'\text{B} - \text{AB}'}{\text{AA}' + \text{BB}'},$$

$$\cos \text{NMP} = \frac{\text{AA}' + \text{BB}'}{\sqrt{\text{A}^2 + \text{B}^2}\sqrt{\text{A}'^2 + \text{B}'^2}}, \quad \sin \text{NMP} = \frac{\text{A}'\text{B} - \text{AB}'}{\sqrt{\text{A}^2 + \text{B}^2}\sqrt{\text{A}'^2 + \text{B}'^2}}.$$

Le sinus doit être positif et le cosinus doit avoir le même signe que la tangente.

Pour que les deux droites soient perpendiculaires on doit avoir tang NMP $= \infty$. La condition de perpendicularité est donc

$$1 + aa' + (a + a')\cos\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \text{AA}' + \text{BB}' - (\text{AB}' + \text{BA}')\cos\omega = 0.$$

245. *Diverses formes de l'expression de la distance d'un point à une droite.* — Nous avons vu quelle est cette expression en fonction des

coordonnées polaires de la projection orthogonale de l'origine sur la droite; nous avons trouvé

$$\pm d = x \cos \alpha + y \cos (\omega - \alpha) - p.$$

Supposons maintenant que l'équation de la droite soit donnée sous la forme $y = ax + b$; si l'on désigne par x_1, y_1 les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée du point x', y' sur la droite, la distance cherchée aura pour expression

$$d = \sqrt{(x' - x_1)^2 + (y' - y_1)^2 + 2(x' - x_1)(y' - y_1) \cos \omega}.$$

La question est donc ramenée à la détermination de x_1 et y_1 ou en d'autres termes, au calcul des coordonnées du point où la droite $y = ax + b$ est coupée par la perpendiculaire abaissée du point x', y' sur cette droite. Le coefficient angulaire de la perpendiculaire a pour expression (n° 244)

$$a' = -\frac{1 + a \cos \omega}{a + \cos \omega}.$$

Il en résulte qu'on obtiendra x_1 et y_1 en résolvant les deux équations

$$y_1 = ax_1 + b, \quad y_1 - y' = -\frac{1 + a \cos \omega}{a + \cos \omega}(x_1 - x').$$

Le calcul n'offre pas de difficulté, mais nous ferons voir qu'on peut trouver la formule par une méthode plus simple.

Soient AB (fig. 74) la droite donnée et M le point x', y' ; abaissons du point M la perpendiculaire MP sur la droite et menons parallèlement à l'axe des y, la droite MN qui rencontre la droite donnée au point N. Le triangle rectangle MNP nous donne

$$\text{MP} = d = \text{MN} \sin (\omega - \alpha);$$

soit y_1 l'ordonnée du point N, on aura

$$\text{MN} = y' - y_1, \quad \text{d'où} \quad d = (y' - y_1) \sin(\omega - \alpha).$$

Toutefois il faut observer que si le point x', y' se trouvait en M_1 on aurait $M_1N = y_1 - y'$.

En outre si la droite faisait avec l'axe des x un angle plus grand que ω, la perpendiculaire prendrait l'une des positions indiquées en M_2P_2 et M_3P_3 ; et au lieu de $\sin (\omega - \alpha)$ il faudrait écrire $\sin (\alpha - \omega)$.

Afin d'avoir une formule générale, embrassant tous les cas il faut donc écrire

$$d = \pm (y' - y_1) \sin (\omega - \alpha).$$

Pour calculer y_1 observons que le point N qui a pour coordonnées x', y_1, est sur la droite AB, et qu'on a par conséquent, $y_1 = ax' + b$. On aura donc finalement

$$d = \pm \sin(\omega - \alpha)(y' - ax' - b).$$

Il faut prendre le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que les deux facteurs ont le même signe ou des signes contraires. Or, ces signes sont connus; car le premier facteur est positif ou négatif suivant qu'on a $\alpha < \omega$ ou $\alpha > \omega$; et le second facteur est positif pour les points placés au-dessus de la droite, comme M ou M_2, et négatif pour les points placés au-dessous, comme M_1 ou M_3.

Si l'équation de la droite est donnée sous la forme

$$Ax + By + C = 0,$$

il faut faire

$$a = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B},$$

et il vient

$$d = \pm \sin(\omega - \alpha)\frac{Ax' + By' + C}{B};$$

quand B est positif le signe du numérateur de la fraction s'obtient comme il est dit plus haut. On remarquera que, dans tous les cas, le signe $+$ convient aux points situés d'un côté de la droite et le signe $-$ à ceux qui se trouvent du côté opposé.

Cette formule peut encore s'écrire autrement, car on a (nº 236)

$$\sin(\omega - \alpha) = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\omega}{\pm\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\omega}},$$

d'où

$$d = \frac{\pm(y' - ax' - b)\sin\omega}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\omega}} = \frac{\pm(Ax' + By' + C)\sin\omega}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\omega}}.$$

La règle pour déterminer le signe découle de ce qui précède.

Remarque. — Le triangle MNP n'est pas possible quand la droite est parallèle à l'axe des y, c'est-à-dire quand son équation est de la forme $Ax + C = 0$. On peut alors faire usage du triangle MPQ (fig. 75) dans lequel MQ est parallèle à l'axe des x et qui donne $d = MQ\sin\omega$.

Le point Q a pour abscisse

$$x_1 = -\frac{C}{A}; \quad \text{donc} \quad d = (x' - x_1)\sin\omega = \frac{Ax' + C}{A}\sin\omega.$$

Si le point donné se trouvait en M_1, de l'autre côté de la droite, il faudrait faire $M_1Q = x_1 - x'$; on a donc

$$d = \pm \frac{Ax' + C}{A} \sin \omega.$$

C'est ce que donne la formule précédente quand on y fait $B = 0$; on voit, par conséquent, que celle-ci est générale.

246. *Déterminer les coordonnées du point divisant dans un rapport donné la droite qui joint deux points fixes.* — Proposons-nous de trouver sur la droite qui joint deux points A et B (fig. 76) ayant respectivement pour coordonnées x', y' et x'', y'' un point C tel que les segments AC et BC soient entre eux dans un rapport donné $\frac{n}{m}$.

Le point cherché, dont nous désignerons les coordonnées par x_1, y_1, peut se trouver entre A et B ou sur l'un des prolongements de la droite AB.

Dans le premier cas, si $\frac{AC}{BC} = \frac{n}{m}$, on a

$$\frac{n}{m} = \frac{x_1 - x'}{x'' - x_1} = \frac{y_1 - y'}{y'' - y_1};$$

les coordonnées du point C seront donc

$$x_1 = \frac{mx' + nx''}{m + n}, \quad y_1 = \frac{my' + ny''}{m + n};$$

nous dirons alors que le point C coupe la droite intérieurement, ou qu'il est un point de section intérieure.

Si le point cherché tombe en C′ ou en C″, sur l'un des prolongements de la droite, ses coordonnées seront

$$x_2 = \frac{mx' - nx''}{m - n}, \quad y_2 = \frac{my' - ny''}{m - n};$$

nous dirons alors qu'il coupe la droite extérieurement, ou que c'est un point de section extérieure. On voit que, pour obtenir les coordonnées de C′ ou C″, il suffirait de regarder le rapport $\frac{n}{m}$ comme ayant une valeur négative dans les expressions des coordonnées du point C.

On verra également que si le rapport $\frac{n}{m}$ croît de zéro à $+\infty$, le point C se meut depuis A jusqu'en B ; que si ce rapport croît ensuite depuis $-\infty$ jusqu'à -1, le point C' se meut sur BC' depuis le point B jusqu'à l'infini ; enfin que si $\frac{n}{m}$ croît de -1 à zéro, le point C'' se meut sur C''A depuis l'infini jusqu'en A.

Il en résulte que quand on donne le rapport $\frac{n}{m}$ en grandeur et en signe, il détermine la position d'un certain point de la droite AB ; et que, réciproquement, tout point de cette droite peut être déterminé en donnant au rapport $\frac{n}{m}$ une grandeur et un signe convenables. Nous représenterons ce rapport, affecté de son signe, par k ; on peut l'appeler la *coordonnée-rapport* du point C. Tout point de la droite aura alors pour coordonnées cartésiennes des expressions de la forme

$$x=\frac{x'+kx''}{1+k}, \quad y=\frac{y'+ky''}{1+k},$$

dans lesquelles k est positif ou négatif, selon qu'il s'agit d'un point de section intérieure ou d'un point de section extérieure. Nous ferons aussi usage, pour représenter la valeur algébrique de ce rapport, de la notation $\left(\frac{AC}{BC}\right)$, de sorte qu'on aura

$$\left(\frac{AC}{BC}\right)=k=\frac{AC}{BC}, \quad \left(\frac{AC'}{BC'}\right)=k'=-\frac{AC'}{BC'}.$$

247. *Trouver le lieu des points tels que les distances de l'un quelconque d'entre eux à deux droites fixes soient entre elles dans un rapport constant* $\frac{m}{n}$. — Supposons que les équations en coordonnées rectangulaires des deux droites AC, BC (fig. 77) soient respectivement

$$G\equiv Ax+By+C=0, \quad H\equiv A'x+B'y+C'=0;$$

appelons r et s les distances du point M aux deux droites; les valeurs de r et s seront données en fonction des coordonnées x, y du point M par les formules (n° 245)

$$\pm r=\frac{G}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \pm s=\frac{H}{\sqrt{A'^2+B'^2}}.$$

On aura donc $$\pm\frac{r}{s}=\frac{G}{H}\cdot\frac{\sqrt{A'^2+B'^2}}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Dans cette équation $\frac{r}{s}$ est une constante tandis que G et H sont des fonctions du premier degré des coordonnées variables du point M. C'est donc l'équation du lieu cherché et ce lieu est une droite.

On remarquera que G est positif d'un côté de la droite AC et négatif de l'autre côté; de même H est positif d'un côté de BC et négatif du côté opposé. Si on suppose, par exemple, que H soit positif du côté de la perpendiculaire QM', et G du côté de PM, le signe — convient à la droite CM qui traverse les angles ACB et A'C'B', tandis que le signe $+$ correspond à la droite CM' qui traverse les deux autres angles.

L'équation de la droite CM est donc, en posant $\frac{r}{s}=k$,

$$G+k\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A'^2+B'^2}}H=0;$$

et si on change le signe de k, on obtient l'équation de CM'. On peut donc encore ici considérer k comme une quantité algébrique affectée du signe $+$ ou du signe $-$; à chaque valeur de k correspond alors une droite passant par le point C, et réciproquement toute droite qui passe par ce point est complètement déterminée par une certaine valeur de k. Si on fait croître k de zéro à ∞, la droite CM tourne autour de C depuis AC jusqu'en BC. Le rapport k saute ensuite de $+\infty$ à $-\infty$; et quand il croît de $-\infty$ à zéro, la droite tourne depuis BC jusqu'en A'C. Dans les *Leçons sur la Géométrie analytique* de A. Clebsch, la constante k est appelée le *rapport de distance* du rayon mobile aux deux rayons fixes. Cette expression n'est peut-être pas très correcte, mais elle est concise et nous en ferons parfois usage; nous désignerons aussi k sous le nom de coordonnée-rapport de la droite mobile.

Remarque. — Il est à observer que ce rapport est aussi le rapport des sinus des angles que CM fait avec AC et BC; car on a

$$r=\text{CM}\sin\text{ACM},\ s=\text{CM}\sin\text{BCM};$$

d'où $\frac{r}{s}=\frac{\sin\text{ACM}}{\sin\text{BCM}}$; de même, pour le point M' on a $\frac{r}{s}=\frac{\sin\text{ACM}'}{\sin\text{BCM}'}$; donc, dans l'angle ACB, on aura $k=\frac{\sin\text{ACM}}{\sin\text{BCM}}$ et, dans l'angle BCA',

$= -\frac{\sin ACM'}{\sin BCM'}$. Si les deux droites sont perpendiculaires entre elles, on a $k = \operatorname{tg} \alpha$, α étant l'angle que la droite mobile CM fait avec AC.

248. *Coordonnées tangentielles.* — Dans le système des coordonnées cartésiennes une courbe est considérée comme engendrée par le mouvement d'un point. Quand les coordonnées d'un point sont liées par une équation unique permettant de les faire varier d'une manière continue, le point peut être considéré comme se mouvant suivant une loi déterminée, de manière à engendrer une ligne et l'on dit alors que cette ligne, droite ou courbe, est représentée par l'équation donnée.

En chaque point d'une courbe il existe en général, une tangente qui peut être considérée comme une droite joignant deux points infiniment voisins de la courbe. Quand le point de contact décrit la courbe, la tangente se meut également et on dit qu'elle *roule* sur la courbe et que celle-ci est l'*enveloppe* des positions de la tangente ; et de même qu'une tangente est la droite qui joint deux points infiniment voisins, son point de contact peut être considéré comme l'intersection de deux tangentes infiniment voisines.

Une courbe peut donc être regardée comme le lieu des points où une droite mobile touche son enveloppe.

Rappelons maintenant que pour déterminer une droite dans un plan il faut se donner deux éléments, de même qu'il en faut deux pour déterminer la position d'un point. Ces deux éléments sont appelés *les coordonnées de la droite*. Nous allons montrer pourquoi on les nomme coordonnées tangentielles.

Si on donne une équation unique liant les deux coordonnées d'une droite, cette équation est vérifiée par une infinité de systèmes de valeurs à chacun desquels correspond une certaine droite et l'on peut dire, par conséquent, que cette équation représente des droites en nombre infini. Quand les coordonnées varient d'une manière continue, la droite se meut d'un mouvement continu et on peut la considérer comme engendrant la courbe qui est son enveloppe. C'est pourquoi l'on dit que l'équation proposée représente une courbe.

Une courbe peut donc être engendrée par le mouvement d'un point ou par le mouvement d'une droite ; et suivant qu'on la considère à l'un ou l'autre de ces points de vue elle est représentée par une équation entre

les deux coordonnées d'un de ses points ou entre les deux coordonnées d'une de ses tangentes. Dans le premier cas on a l'équation de la courbe en *coordonnées ponctuelles*, et dans le second cas en *coordonnées tangentielles*.

249. On conçoit qu'on peut choisir de bien des manières différentes les deux éléments qui déterminent une droite. *Nous prendrons pour ces coordonnées, que nous désignerons par u et v, les inverses, changés de signe, des coordonnées à l'origine de la droite.*

Si nous désignons comme précédemment par p et q ces coordonnées à l'origine, nous aurons donc, par définition, pour coordonnées tangentielles de la droite

$$u = -\frac{1}{p}, \quad v = -\frac{1}{q}.$$

L'équation de la droite en coordonnées cartésiennes prendra alors la forme

$$ux + vy + 1 = 0\,;$$

mais si on y regarde x et y comme des constantes, u et v comme des variables, elle n'est plus l'équation d'une droite, mais on peut dire qu'elle est l'équation d'un point en coordonnées tangentielles; car c'est la relation qui lie les coordonnées de toute droite passant par le point fixe x, y. Elle est vérifiée par les coordonnées des droites qui passent par ce point et ne l'est par celles d'aucune autre droite ; et par conséquent, on peut dire qu'elle caractérise le point commun à ces droites. On voit par là que l'équation du premier degré, qui représente une droite en coordonnées ponctuelles, représente un point en coordonnées tangentielles.

Il en résulte aussi que quand on a l'équation

$$\mathrm{A}u + \mathrm{B}v + \mathrm{C} = 0,$$

les coordonnées cartésiennes du point qu'elle représente sont données par les formules $x = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$, $y = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}$; et que, réciproquement, si on donne l'équation d'une droite

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0,$$

les coordonnées tangentielles de cette droite sont $u = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$, $v = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}$.

C'est afin d'obtenir cette réciprocité que l'on a choisi les coordonnées tangentielles d'une droite comme on l'a vu plus haut.

250. *Point de rencontre de deux droites.* — Soient u_1, v_1 et u_2, v_2 les coordonnées de deux droites et

$$Au + Bv + C = 0,$$

l'équation de leur point de rencontre. Cette équation devant être vérifiée par les coordonnées des deux droites, on aura les deux équations de condition

$$Au_1 + Bv_1 + C = 0, \quad Au_2 + Bv_2 + C = 0;$$

en éliminant A, B, C entre ces trois équations, on obtient pour l'équation du point de rencontre

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

251. *Distance d'un point à une droite et angle de deux droites.* — Soit un point ayant pour équation en coordonnées tangentielles

$$Au + Bv + C = 0,$$

et une droite ayant pour coordonnées u_0, v_0. Le point aura pour coordonnées cartésiennes $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$; et la droite, dans le même système de coordonnées, supposées d'ailleurs rectangulaires, sera représentée par l'équation

$$u_0x + v_0y + 1 = 0.$$

La distance du point à la droite aura donc pour expression (n° 245)

$$d = \pm \frac{u_0\frac{A}{C} + v_0\frac{B}{C} + 1}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}} = \pm \frac{Au_0 + Bv_0 + C}{C\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}.$$

Soient maintenant deux droites u_0, v_0 et u_1, v_1. Leurs équations en coordonnées rectangulaires seront

$$u_0x + v_0y + 1 = 0, \quad u_1x + v_1y + 1 = 0.$$

L'angle de ces droites sera donc donné par les formules (N° 244).

$$\sin\alpha = \frac{u_0v_1 - u_1v_0}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}\sqrt{u_1^2 + v_1^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{u_0u_1 + v_0v_1}{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}\sqrt{u_1^2 + v_1^2}},$$

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{u_0v_1 - u_1v_0}{u_0u_1 + v_0v_1}.$$

La *condition du parallélisme* est donc $u_0 v_1 - u_1 v_0 = 0$; et la *condition de perpendicularité* $u_0 u_1 + v_0 v_1 = 0$.

252. *Expression générale des coordonnées d'une droite passant par le point de rencontre de deux autres droites.* — Considérons deux droites ayant pour coordonnées tangentielles u', v' et u'', v'' et soit k la valeur algébrique du rapport des distances de ces droites à une droite quelconque passant par leur point de rencontre. Les coordonnées de celle-ci seront

$$u = \frac{u' + \mu u''}{1 + \mu}, \quad v = \frac{v' + \mu v''}{1 + \mu}, \quad \text{en posant} \quad \mu = k \frac{\sqrt{u'^2 + v'^2}}{\sqrt{u''^2 + v''^2}}.$$

En effet, les deux droites fixes respectivement auront pour équations

$$u'x + v'y + 1 = 0, \quad u''x + v''y + 1 = 0,$$

et on a vu (n° 247) que la droite dont le rapport des distances aux deux premières est k, est représentée par l'équation

$$u'x + v'y + 1 + k \frac{\sqrt{u'^2 + v'^2}}{\sqrt{u''^2 + v''^2}} (u''x + v''y + 1) = 0,$$

ou encore

$$(u' + \mu u'')x + (v' + \mu v'')y + 1 + \mu = 0.$$

Les coordonnées de cette droite sont donc

$$u = \frac{u' + \mu u''}{1 + \mu}, \quad v = \frac{v' + \mu v''}{1 + \mu}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On remarquera que μ est le rapport des distances de la droite mobile aux deux droites fixes, multiplié par un facteur qui ne dépend que des deux droites fixes.

253. *Équation générale du point divisant dans un rapport donné la droite qui joint deux points fixes.* — Soient les équations des deux points fixes

$$Au + Bv + C = 0, \quad A'u + B'v + C' = 0.$$

Les coordonnées rectangulaires de ces points seront

$$x_1 = \frac{A}{C}, y_1 = \frac{B}{C} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{A'}{C'}, y_2 = \frac{B'}{C'};$$

or, le point qui divise la distance des deux points fixes dans le rapport k a pour coordonnées

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k};$$

par conséquent, l'équation en coordonnées tangentielles de ce point sera

$$\left(\frac{A}{C} + k\frac{A'}{C'}\right)u + \left(\frac{B}{C} + k\frac{B'}{C'}\right)v + 1 + k = 0,$$

laquelle peut encore s'écrire

$$(Au + Bv + C)\,C' + k\,(A'u + B'v + C')\,C = 0.$$

Désignons par P et Q les premiers membres des équations des deux points, et posons $\mu = k\frac{C}{C'}$; nous aurons finalement pour l'équation cherchée $P + \mu Q = 0$.

Donc, en résumé, les équations de deux points fixes étant écrites sous la forme $P = 0$, $Q = 0$, tout point de la droite qui joint ces deux points aura pour équation

$$P + \mu Q = 0, \quad \mu = k\frac{C}{C'}.$$

Il est à observer que le facteur μ est égal à la valeur algébrique du rapport des distances du point mobile aux deux points fixes, multiplié par une constante $\frac{C}{C'}$, qui ne dépend que des deux points fixes.

254. *Un système de deux équations $\varphi(u, v) = 0$, $\psi(u, v) = 0$ représente les tangentes communes aux deux courbes que ces équations représentent quand chacune d'elles est considérée isolément.*

Car, tout système de valeurs de u et v qui vérifie ces deux équations détermine une droite tangente à la fois aux deux courbes φ et ψ. Si les équations proposées sont du premier degré, chacune d'elles détermine un point et, prises ensemble, elles représentent la droite qui joint ces deux points.

On voit aussi que toute équation déduite des deux équations proposées représente une courbe qui touche les tangentes communes aux deux autres; car les valeurs de u et v qui vérifient ces dernières équations vérifient également celle qui en est déduite. Si les équations données sont du premier degré elles représentent deux points, et celle qu'on en déduit, une ligne passant par ces points. C'est ainsi que les équations de deux

points $P = 0$, $Q = 0$, conduisent à l'équation $P + \mu Q = 0$, représentant un point de la droite qui joint les deux points donnés (n° 253).

Remarque. — Il se présente ici une remarque analogue à celle du n° 213. Soient $\varphi(u, v) = 0$ et $\psi(u, v) = 0$ les équations de deux courbes. Deux équations $f(u, v) = 0$, $F(u, v) = 0$ qui en seraient déduites représenteraient les tangentes communes à ces courbes; mais elles pourraient en outre représenter d'autres droites s'il n'y avait pas réciprocité.

255. *Si les deux équations $\varphi(u, v) = 0$, $\psi(u, v) = 0$ contiennent un paramètre indéterminé, elles représentent une ou plusieurs droites mobiles, et l'élimination du paramètre arbitraire fournit l'équation de la courbe enveloppe de ces droites mobiles.* — Car l'équation résultante, étant une conséquence des deux premières, représente une courbe qui touche les droites dont celles-ci sont les équations. Et comme cette résultante ne dépend pas du paramètre variable, la courbe qu'elle détermine touche les droites mobiles dans toutes leurs positions; en d'autres termes, elle en est l'enveloppe Toutefois, d'après la remarque du n° 254 il faut que l'élimination n'introduise pas de solutions étrangères.

§ 2. Coordonnées trilinéaires ponctuelles et tangentielles.

256. Soit un triangle quelconque ABC (fig. 78), que nous appellerons *triangle de référence* et soient les équations des trois côtés

$$(1)\qquad \begin{cases} (\mathrm{BC}) & a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ (\mathrm{CA}) & a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \\ (\mathrm{AB}) & a_3 x + b_3 y + c_3 = 0. \end{cases}$$

Si l'on désigne par p_1, p_2, p_3 les distances d'un point F ayant pour coordonnées x, y, aux trois côtés de ce triangle, on aura

$$(2)\qquad \begin{cases} p_1 = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \\ p_2 = \dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \\ p_3 = \dfrac{a_3 x + b_3 y + c_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}. \end{cases}$$

A la rigueur nous aurions dû donner au radical le double signe $\pm$. Mais dans ce qui va suivre p_1 sera considéré comme une valeur algébrique qui sera affectée du signe $+$ pour les points situés par rapport à BC du même côté que le sommet A et du signe $-$ pour les points situés du côté opposé. C'est ce qu'on obtiendra aisément en donnant aux coefficients les signes convenables dans l'équation de BC. De même p_2 sera regardé comme positif pour les points situés par rapport à CA du même côté que B, et p_3 pour les points situés par rapport à AB du même côté que C.

Deux quelconques des trois valeurs p_1, p_2, p_3, suffisent évidemment pour déterminer la position du point F. Car si l'on donne, par exemple, $p_1 = 3$, $p_2 = -2$, on pourra tracer GF, parallèle à BC et à une distance égale à 3, du côté de A, et HF, parallèle à AC, à une distance égale à 2 du côté opposé à B. Ces droites se couperont au point cherché F. Les quantités p_1, p_2, p_3 peuvent donc être regardées comme un système de coordonnées, que l'on appelle coordonnées *trilinéaires* ou *triangulaires*.

257. Nous allons faire voir que l'on peut remplacer ces coordonnées par d'autres, plus générales, dont on peut les faire dépendre, et dont l'emploi offre souvent de grands avantages.

Observons d'abord que, puisque deux des coordonnées trilinéaires suffisent pour fixer la position d'un point, la troisième doit être une fonction des deux autres, c'est-à-dire que les quantités p_1, p_2, p_3 doivent être liées par une équation de condition. Il sera, d'ailleurs, facile d'obtenir celle-ci, car il suffira d'éliminer x et y entre les équations (2). La relation que l'on trouvera ainsi sera évidemment linéaire par rapport à p_1, p_2, p_3.

Il résulte aussi évidemment de là que l'on peut déterminer, à l'aide de cette équation de condition, les valeurs de p_1, p_2, p_3, quand on connaît trois quantités qui leur sont proportionnelles ; par conséquent, on pourra aussi regarder comme coordonnées triangulaires d'un point trois quantités proportionnelles à p_1, p_2, p_3.

Il sera même possible d'aller plus loin. Au lieu de mesurer les distances du point F aux trois côtés du triangle de référence sur des perpendiculaires à ces côtés, on peut mesurer chacune de ces distances parallèlement à une droite fixe oblique par rapport au côté correspondant, ce qui revient à multiplier chaque distance par un certain facteur arbitraire mais invariable.

On peut donc, avec Clebsch (*), définir de la manière suivante les coordonnées triangulaires d'un point :

Les coordonnées d'un point sont trois nombres ayant entre eux les mêmes rapports que les distances du point aux côtés d'un triangle, chaque distance étant multipliée par une constante arbitraire, mais fixe.

En désignant les coordonnées triangulaires d'un point par x_1, x_2, x_3, et les distances du point aux côtés du triangle de référence affectées des signes convenables par p_1, p_2, p_3, on aura par conséquent,

(3) $$\rho x_1 = \varepsilon_1 p_1, \quad \rho x_2 = \varepsilon_2 p_2, \quad \rho x_3 = \varepsilon_3 p_3.$$

Le facteur de proportionnalité ρ est totalement indéterminé. Quant à ε_1, ε_2, ε_3, ce sont des constantes arbitraires dont on pourra ultérieurement disposer de façon à faciliter la solution des questions que l'on se proposera de résoudre.

258. Quand on se donne x_1, x_2, x_3, il est facile de retrouver p_1, p_2, p_3 et, par conséquent, de construire le point F si on le juge utile.

En effet, en posant $e_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$, on a

$$\rho x_1 = \varepsilon_1 p_1 = \frac{\varepsilon_1 (a_1 x + b_1 y + c_1)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = e_1 (a_1 x + b_1 y + c_1);$$

et si l'on désigne par e_2 et e_3 des expressions analogues à e_1, on obtient les trois relations

$$a_1 x + b_1 y + c_1 - \rho \frac{x_1}{e_1} = 0,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 - \rho \frac{x_2}{e_2} = 0,$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 - \rho \frac{x_3}{e_3} = 0.$$

Eliminons x et y entre ces trois équations en posant $R = (a_1 b_2 c_3)$. Ce déterminant ne saurait évidemment être nul ; car la condition $R = 0$ exprimerait que les trois côtés du triangle passeraient par un même

(*) A. Clebsch, *Leçons sur la géométrie*, recueillies et complétées par F. Lindemann, traduites par A. Benoist.

point. En désignant par C_1, C_2, C_3 les mineurs relatifs à la dernière colonne de ce déterminant, nous aurons

$$R = \rho\left[C_1\frac{x_1}{e_1} + C_2\frac{x_2}{e_2} + C_3\frac{x_3}{e_3}\right].$$

De cette égalité on conclura la valeur de ρ et dès lors on aura

$$p_1 = \frac{\rho x_1}{\varepsilon_1}, \quad p_2 = \frac{\rho x_2}{\varepsilon_2}, \quad p_3 = \frac{\rho x_3}{\varepsilon_3}.$$

259. *Formules pour passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées trilinéaires d'un point et réciproquement.*

Si l'équation d'une ligne est donnée en coordonnées rectangulaires sous la forme $f(x, y) = 0$, il sera facile de trouver son équation en coordonnées triangulaires. Il suffira évidemment de tirer des équations (2) les valeurs de x et de y en fonction de p_1, p_2, p_3, ou ce qui revient au même en fonction de x_1, x_2, x_3, en ayant égard aux équations (3). Il est clair, d'ailleurs, que nous pourrons poser

$$\varepsilon_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \quad \varepsilon_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2},$$

sans que ces constantes cessent d'être arbitraires. Car, comme on peut multiplier, sans les altérer, chacune des équations (1) par un facteur quelconque, les trois radicaux ci-dessus peuvent prendre telles valeurs que l'on veut. Les équations (2) deviennent ainsi

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho x_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1, \\ \rho x_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2, \\ \rho x_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3. \end{aligned}\right.$$

L'élimination de x et y, donne l'équation de condition

$$R = \rho(C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3);$$

et si on multiplie ensuite les équations (4) successivement par A_1, A_2, A_3 et B_1, B_2, B_3, mineurs des deux premières colonnes de R, on aura

$$Rx = \rho(A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3),$$
$$Ry = \rho(B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3),$$

d'où

$$(5)\qquad x = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3}, \quad y = \frac{B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3}.$$

Remplaçant x et y par ces valeurs dans $f(x, y) = 0$, on aura l'équation de la courbe proposée en coordonnées trilinéaires ponctuelles. On voit immédiatement que cette équation sera, après qu'on l'aura multipliée par une puissance convenable du dénominateur commun, homogène par rapport aux nouvelles coordonnées x_1, x_2, x_3 et du même degré que l'équation en coordonnées rectangulaires.

Inversement on passerait d'une équation en coordonnées homogènes à l'équation en coordonnées rectangulaires en remplaçant x_1, x_2, x_3, par leurs valeurs en x et y tirées des équations (4). Le degré ne change pas et le facteur indéterminé ρ disparaît évidemment comme entrant au même degré dans tous les termes de l'équation finale.

Il résulte de ce qui précède qu'en particulier une équation du premier degré en coordonnées ponctuelles trilinéaires représente une droite, et une équation du second degré une conique.

Il est clair aussi qu'un système de deux équations en coordonnées trilinéaires ponctuelles représente les points d'intersection de deux lignes, et que toute équation qui en est déduite représente une ligne passant par les points de rencontre des deux autres.

260. *Coordonnées trilinéaires tangentielles.* — On peut aussi employer des coordonnées triangulaires tangentielles dont les définitions sont analogues à celles des coordonnées trilinéaires ponctuelles.

Les coordonnées des trois sommets du triangle de référence s'obtiennent évidemment en résolvant par rapport à x et y les équations (1) considérées deux à deux ; on obtient ainsi, en conservant les notations admises plus haut

$$\text{pour le sommet A,} \quad x = \frac{A_1}{C_1}, \quad y = \frac{B_1}{C_1};$$

$$\text{» » » B,} \quad x = \frac{A_2}{C_2}, \quad y = \frac{B_2}{C_2};$$

$$\text{» » » C,} \quad x = \frac{A_3}{C_3}, \quad y = \frac{B_3}{C_3}.$$

Par conséquent, en cordonnées rectangulaires tangentielles les trois sommets du triangle de référence seront représentés par les équations

$$\begin{cases} A \ \dots \ A_1 u + B_1 v + C_1 = 0, \\ B \ \dots \ A_2 u + B_2 v + C_2 = 0, \\ C \ \dots \ A_3 u + B_3 v + C_3 = 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant une droite ayant pour coordonnées tangentielles rectangulaires u, v; les distances de cette droite aux trois sommets du triangle de référence, affectées du signe $+$ ou du signe $-$ seront, comme on l'a vu au nº 251,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} q_1 &= \frac{A_1u + B_1v + C_1}{C_1\sqrt{u^2+v^2}},\\ q_2 &= \frac{A_2u + B_2v + C_2}{C_2\sqrt{u^2+v^2}},\\ q_3 &= \frac{A_3u + B_3v + C_3}{C_3\sqrt{u^2+v^2}}. \end{aligned}\right.$$

On sait que les valeurs de q_1, q_2, q_3, sont positives ou négatives suivant que le sommet correspondant se trouve d'un côté de la droite que l'on considère ou du côté opposé.

261. Deux quelconques des rapports de ces trois valeurs suffisent pour déterminer la droite et permettent de la construire. En effet, soit PQR (fig. 79) la droite qui a pour coordonnées u, v et considérons un des points où elle rencontre les côtés du triangle de référence, par exemple le point P, que nous supposerons d'abord point de section extérieure. Les perpendiculaires abaissées des sommets B et C du triangle de référence sur la droite u, v tomberont évidemment alors du même côté de cette droite et, par conséquent, les expressions q_2 et q_3 auront le même signe. A cause de la similitude des triangles PBb, PCc, on aura donc alors

$$\frac{BP}{CP} = \frac{Bb}{Cc} = \frac{q_2}{q_3}.$$

Mais si l'on désigne par k_1 la valeur algébrique du rapport qui fixe la position de P sur BC, ce point étant un point de section extérieure et k_1 étant, par conséquent, négatif, on aura

$$k_1 = \left(\frac{BP}{CP}\right) = -\frac{BP}{CP} = -\frac{q_2}{q_3}.$$

Si, au contraire, on considère un point de section intérieure, tel que Q, les deux expressions q_1 et q_3 sont de signes contraires, et si l'on désigne par k_2 la coordonnée-rapport du point Q, qui est ici positive, on aura

$$k_2 = \left(\frac{CQ}{AQ}\right) = +\frac{CQ}{AQ} = \frac{Cc}{Aa} = -\frac{q_3}{q_1}.$$

Donc chacun des rapports, pris en signe contraire, de deux des quantités q_1, q_2, q_3, détermine un des points de rencontre de la droite avec les côtés du triangle de référence. Il suffira donc de connaître deux de ces rapports, ou, en d'autres termes, trois quantités proportionnelles à q_1, q_2, q_3, pour pouvoir construire deux points de la droite, et par conséquent, tracer la droite elle-même. A cause de cela *nous pourrons considérer ces trois quantités comme coordonnées trilinéaires tangentielles de la droite.*

On peut même, avec Clebsch, donner des coordonnées triangulaires tangentielles la définition plus générale que voici :

Les coordonnées d'une droite sont trois nombres ayant entre eux le même rapport que les distances de cette droite aux sommets du triangle de référence, chaque distance étant multipliée par une constante arbitraire, mais fixe.

En désignant par u_1, u_2, u_3 les coordonnées triangulaires d'une droite ainsi définies, par q_1, q_2, q_3 les distances de cette droite aux sommets du triangle, affectées des signes convenables, et par σ le facteur arbitraire de proportionnalité on aura donc

$$(7) \qquad \sigma u_1 = \lambda_1 q_1, \quad \sigma u_2 = \lambda_2 q_2, \quad \sigma u_3 = \lambda_3 q_3,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant les constantes arbitraires mais fixes. Bien que ces constantes puissent être choisies à volonté, nous montrerons qu'il convient de les faire dépendre de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, de sorte que celles-ci resteront seules complètement indéterminées.

On voit immédiatement que les coordonnées u_1, u_2, u_3, déterminent les rapports de q_1, q_2, q_3, et suffisent, par conséquent, comme nous l'avons fait voir, pour fixer la position de la droite, et au besoin pour la construire.

262. *Formules pour passer des coordonnées rectangulaires d'une droite aux coordonnées trilinéaires ou réciproquement.* — Quand on donne les coordonnées rectangulaires d'une droite, on peut immédiatement déduire des équations (6) et (7) ses coordonnées triangulaires. Toutefois, nous venons de dire qu'il convient d'établir entre les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, d'une part, et les facteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, d'autre part, certaines relations.

Nous verrons, en effet, qu'il est avantageux de poser

$$\lambda_1 = C_1 = a_2 b_3 - b_2 a_3, \quad \lambda_2 = C_2 = a_3 b_1 - b_3 a_1, \quad \lambda_3 = C_3 = a_1 b_2 - b_1 a_2;$$

de façon que, tandis que les coefficients

$$\varepsilon_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \quad \varepsilon_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2},$$

peuvent être arbitrairement déterminés en multipliant les coefficients des équations (1) par des constantes convenables, les coefficients λ_1, λ_2, λ_3 prendront, après la détermination de ε_1, ε_2 et ε_3, des valeurs qu'on ne sera plus maître de changer.

Remarquons encore maintenant que, les coordonnées u_1, u_2, u_3 étant simplement des nombres proportionnels à q_1, q_2, q_3, le dénominateur commun $\sqrt{u^2+v^2}$ que contiennent les seconds membres des équations (6), peut être considéré comme entrant dans le facteur de proportionnalité σ. Les équations (6) et (7) conduisent donc aux suivantes

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma u_1 &= A_1 u + B_1 v + C_1, \\ \sigma u_2 &= A_2 u + B_2 v + C_2, \\ \sigma u_3 &= A_3 u + B_3 v + C_3, \end{aligned}\right.$$

lesquelles fourniront les coordonnées triangulaires d'une droite en fonction de ses coordonnées rectangulaires.

Si l'on veut ensuite obtenir les coordonnées rectangulaires de la droite en fonction de ses coordonnées trilinéaires, il suffira d'ajouter membre à membre les équations (8), après les avoir multipliées respectivement par a_1, a_2, a_3 et d'opérer ensuite de la même manière à l'aide de b_1, b_2, b_3 et c_1, c_2, c_3. On trouvera ainsi

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) &= Ru, \\ \sigma(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3) &= Rv, \\ \sigma(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3) &= R; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$(10)\qquad u = \frac{a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3}{c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3}, \quad v = \frac{b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3}{c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3}.$$

Par conséquent, si on donne l'équation $f(u, v) = 0$, représentant une courbe quelconque en coordonnées rectangulaires tangentielles, il suffira d'y remplacer u et v par les expressions (10) pour obtenir l'équation de cette courbe en coordonnées trilinéaires tangentielles. Il est manifeste que la nouvelle équation sera homogène et de même degré que l'équation primitive après la disparition des dénominateurs.

263. Montrons maintenant quel est l'avantage qui résulte du choix que nous avons fait pour les valeurs de λ_1, λ_2, λ_3.

On a vu que l'équation

$$ux + vy + 1 = 0$$

représente à volonté un point ou une droite. Elle représente un point si nous considérons u, v comme les coordonnées variables d'une droite et x, y comme les coordonnées constantes d'un point par lequel passe cette droite ; elle représente une droite si nous considérons x, y comme les coordonnées variables d'un point et u, v comme les coordonnées constantes d'une droite sur laquelle se trouve ce point. Cette équation est symétrique par rapport à x, y et u, v ; et il en résulte que l'équation

$$Ax + By + C = 0,$$

en coordonnées rectangulaires, représente une droite dont les coordonnées tangentielles sont $u = \frac{A}{C}$, $v = \frac{B}{C}$; tandis que l'équation en coordonnées tangentielles

$$Au + Bv + C = 0,$$

représente un point dont les coordonnées cartésiennes sont $x = \frac{A}{C}$, $y = \frac{B}{C}$.

Ceci est une conséquence de la définition que nous avons adoptée pour les coordonnées d'une droite, et Clebsch énonce cette particularité en disant que l'équation

$$ux + vy + 1 = 0$$

exprime *la réunion de situation d'un point et d'une droite.*

Si on veut maintenant exprimer cette réunion de situation du point et de la droite par une équation en coordonnées triangulaires, il est aisé de voir que cette équation sera

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0.$$

En effet, des équations (4) et (8) combinées par voie de multiplication et d'addition, on déduit la relation

$$\rho\sigma (u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3) = \sum_{i=1}^{i=3} (a_i x + b_i y + c_i)(A_i u + B_i v + C_i) ;$$

mais, attendu que A_i, B_i, C_i sont des mineurs du déterminant R, on a les égalités

$$\begin{array}{lll} \Sigma a_i A_i = R, & \Sigma a_i B_i = 0, & \Sigma a_i C_i = 0, \\ \Sigma b_i A_i = 0, & \Sigma b_i B_i = R, & \Sigma b_i C_i = 0, \\ \Sigma c_i A_i = 0, & \Sigma c_i B_i = 0, & \Sigma c_i C_i = R, \end{array}$$

desquelles il résulte

$$\rho\sigma(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3) = \mathrm{R}(ux + vy + 1);$$

et comme ρ, σ et R sont nécessairement différents de zéro, on voit que chacune des équations

$$ux + vy + 1 = 0, \quad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$

entraîne nécessairement l'autre; et, par conséquent, la première, qui exprime la réunion de situation d'une droite et d'un point en coordonnées rectangulaires, se transforme quand on emploie les coordonnées homogènes, en

(11) $$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0;$$

celle-ci exprime donc la réunion de situation de cette droite et de ce point en coordonnées trilinéaires. Elle est symétrique par rapport à x_1, x_2, x_3 et u_1, u_2, u_3; de telle façon qu'une équation du premier degré, en coordonnées trilinéaires ponctuelles, telle que

$$\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}x_2 + \mathrm{C}x_3 = 0,$$

représente une droite ayant pour coordonnées trilinéaires tangentielles A, B, C; tandis que si cette même équation est interprétée en coordonnées trilinéaires tangentielles, ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{A}u_1 + \mathrm{B}u_2 + \mathrm{C}u_3 = 0,$$

elle représente un point dont les coordonnées trilinéaires ponctuelles sont aussi A, B, C.

Il est aisé de voir qu'on ne serait pas arrivé à la forme si simple de l'équation (11) si l'on avait pris pour λ_1, λ_2, λ_3 des valeurs autres que celles que nous avons choisies.

264. *Droite de l'infini.* — Des formules (5) découle une conséquence importante. L'équation

(12) $$\mathrm{C}_1x_1 + \mathrm{C}_2x_2 + \mathrm{C}_3x_3 = 0,$$

étant du premier degré, doit être considérée comme représentant une droite. Mais les équations (5) montrent que, pour tous les points de cette droite, et uniquement pour ces points, x et y sont infinis. L'ensemble des points situés à l'infini dans le plan vérifie donc l'équation (12), ce qu'on énonce en disant que cette équation représente la *droite de l'infini*. Il est clair que c'est là une conception purement analytique, qui signifie que l'ensemble des points rejetés à l'infini se comporte analytiquement

comme si ces points étaient en ligne droite. Quand on donne l'équation d'une ligne quelconque, cette équation combinée avec l'équation (12) détermine les points à l'infini de la ligne dont il s'agit. Une droite, par exemple, est alors considérée comme n'ayant qu'un point à l'infini, puisque son équation est du premier degré. Toute ligne du second degré a deux points à l'infini, réels ou imaginaires, et enfin une ligne du degré n a n points à l'infini.

265. *Formules pour changer le triangle de référence.* — Supposons qu'on veuille rapporter les coordonnées, tant ponctuelles que tangentielles, à un nouveau triangle de référence, et désignons ces nouvelles coordonnées respectivement par y_1, y_2, y_3 et v_1, v_2, v_3. Il s'agit de trouver les expressions de x_1, x_2, x_3 en fonction de y_1, y_2, y_3, celles de u_1, u_2, u_3 en fonction de v_1, v_2, v_3, et réciproquement.

Nous ferons observer d'abord que les coordonnées triangulaires y_1, y_2, y_3 seront liées aux coordonnées rectangulaires par des formules analogues aux équations (4) et (5). Nous aurons, par exemple,

$$(13)\quad \begin{cases} \rho' y_1 = m_1 x + n_1 y + p_1, & R'x = \rho'(M_1 y_1 + M_2 y_2 + M_3 y_3),\\ \rho' y_2 = m_2 x + n_2 y + p_2, & R'y = \rho'(N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3),\\ \rho' y_3 = m_3 x + n_3 y + p_3; & R' = \rho'(P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3); \end{cases}$$

équations dans lesquelles $M_1, M_2, M_3, N_1, \ldots$ sont les mineurs du déterminant $R' = (m_1, n_2, p_3)$. On remarquera également que si on multiplie par R' les deux membres des équations (4) et si ensuite on remplace $R'x$, $R'y$ et R' par leurs valeurs tirées des équations (13), on aura trois relations dans lesquelles x_1, x_2 et x_3 seront exprimées par des fonctions linéaires de y_1, y_2, y_3; on pourra donc les écrire de la manière suivante, en faisant entrer R' dans le coefficient de proportionnalité

$$(14)\quad \begin{cases} \mu x_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3,\\ \mu x_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3,\\ \mu x_3 = a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3; \end{cases}$$

et en résolvant celles-ci par rapport à y_1, y_2, y_3, et désignant par $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, \ldots$ les mineurs du déterminant (a_{11}, a_{22}, a_{33}) on aura

$$(15)\quad \begin{cases} \mu' y_1 = A_{11} x_1 + A_{21} x_2 + A_{31} x_3,\\ \mu' y_2 = A_{12} x_1 + A_{22} x_2 + A_{32} x_3,\\ \mu' y_3 = A_{13} x_1 + A_{23} x_2 + A_{33} x_3. \end{cases}$$

Pour obtenir maintenant les formules analogues en coordonnées tangentielles, observons que l'équation qui exprime la réunion de situation du point et de la droite est, suivant qu'on emploie les coordonnées rectangulaires ou les coordonnées triangulaires rapportées à l'un ou l'autre des deux triangles de référence,

$$ux + vy + 1 = 0, \quad x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0, \quad y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 = 0;$$

de sorte que quand on passe d'un système à un autre, les premiers membres des trois équations ci-dessus doivent aussi se transformer l'un dans l'autre, à un facteur constant près. Or, si on multiplie les équations (15) respectivement par v_1, v_2, v_3 et qu'on les ajoute membre à membre, il vient

$$\begin{aligned}\mu'(y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3) = x_1(&A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + A_{13}v_3)\\ + x_2(&A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + A_{23}v_3)\\ + x_3(&A_{31}v_1 + A_{32}v_2 + A_{33}v_3);\end{aligned}$$

et comme le second membre doit, à un facteur constant près, se réduire à $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$, on a nécessairement

$$(16)\qquad \begin{cases} \sigma u_1 = A_{11}v_1 + A_{12}v_2 + A_{13}v_3,\\ \sigma u_2 = A_{21}v_1 + A_{22}v_2 + A_{23}v_3,\\ \sigma u_3 = A_{31}v_1 + A_{32}v_2 + A_{33}v_3; \end{cases}$$

et l'on trouverait de la même manière, à l'aide des équations (14),

$$(17)\qquad \begin{cases} \upsilon v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3,\\ \upsilon v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3,\\ \upsilon v_3 = a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3. \end{cases}$$

Ces dernières peuvent, d'ailleurs, s'obtenir aussi en résolvant les équations (16) par rapport à v_1, v_2, v_3.

La signification géométrique des coefficients qui entrent dans ces formules de transformation est facile à trouver. En effet, par rapport au triangle primitif, les équations des côtés et des sommets de ce triangle sont respectivement

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0;$$

par conséquent, on voit immédiatement que :

D'après les équations (15), les coordonnées des anciens sommets,

D'après les équations (17) les coordonnées des anciens côtés,

rapportées au nouveau triangle, sont

$$A_{11},\quad A_{12},\quad A_{13};$$
$$A_{21},\quad A_{22},\quad A_{23};$$
$$A_{31},\quad A_{32},\quad A_{33}.$$

rapportées au nouveau triangle, sont

$$a_{11},\quad a_{12},\quad a_{13};$$
$$a_{21},\quad a_{22},\quad a_{23};$$
$$a_{31},\quad a_{32},\quad a_{33}.$$

De même, par rapport au nouveau triangle, les équations des côtés et des sommets de ce triangle sont respectivement

$$y_1 = 0,\quad y_2 = 0,\quad y_3 = 0 \quad \text{et} \quad v_1 = 0,\quad v_2 = 0,\quad v_3 = 0;$$

d'où l'on conclut d'après les équations (14) et (16), que l'on a

pour les coordonnées des sommets du nouveau triangle, rapportées au triangle primitif,

$$a_{11},\quad a_{21},\quad a_{31};$$
$$a_{12},\quad a_{22},\quad a_{32};$$
$$a_{13},\quad a_{23},\quad a_{33}.$$

pour les coordonnées des côtés du nouveau triangle, rapportées au triangle primitif,

$$A_{11},\quad A_{21},\quad A_{31};$$
$$A_{12},\quad A_{22},\quad A_{32};$$
$$A_{13},\quad A_{23},\quad A_{33}.$$

266. En comparant les textes mis en regard ci-dessus, on remarquera qu'il existe entre eux une grande analogie. Les équations sont les mêmes, mais elles sont interprétées d'une manière différente; c'est une remarque qu'on a, d'ailleurs, déjà pu faire antérieurement dans plusieurs cas, et de semblables analogies se reproduiront fréquemment dans la suite, quand il ne s'agira que des propriétés descriptives des figures; elles proviennent de ce qu'à toute ligne considérée comme engendrée par le mouvement d'un point, et qui est, par conséquent, représentée par une équation en coordonnées ponctuelles, il en correspond une autre, engendrée par le mouvement d'une droite et représentée par la même équation en coordonnées tangentielles; et de ce qu'en outre, à la droite qui joint deux points et qui est représentée par une équation du premier degré en coordonnées ponctuelles, correspond, dans le second mode de génération, le point de rencontre de deux droites, lequel est représenté par une équation du premier degré en coordonnées tangentielles.

Le point ne peut être engendré par le mouvement d'un point ni la droite par le mouvement d'une droite. C'est pourquoi le point ne peut être représenté par une équation unique en coordonnées ponctuelles, ni la droite en coordonnées tangentielles; et il faut, dans l'un comme dans l'autre cas, un système de deux équations.

De cette double manière d'envisager la génération d'une figure dérive un principe important, connu sous le nom de *principe de dualité*, que nous démontrerons plus tard dans toute sa généralité, mais qui apparaît dès à présent parce que certains théorèmes démontrés à l'aide des coordonnées ponctuelles conduisent immédiatement à d'autres théorèmes quand on interprète les équations en coordonnées tangentielles.

Les relations métriques ne se transportent pas aussi simplement des figures de l'une des deux catégories à celles de l'autre. Néanmoins nous verrons plus tard qu'il existe aussi des moyens d'y parvenir.

Dans ce qui va suivre nous placerons fréquemment en regard des propositions qui peuvent se déduire l'une de l'autre au moyen du principe de dualité. Nous commencerons par étendre aux coordonnées trilinéaires quelques formules précédemment établies pour les coordonnées rectangulaires.

267. *Établir en coordonnées trilinéaires l'équation de la droite qui joint deux points et celle du point d'intersection de deux droites.*

Soient x'_1, x'_2, x'_3 et x''_1, x''_2, x''_3 les coordonnées trilinéaires des deux points donnés, et x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un point mobile sur la droite qui joint les deux premiers. L'équation de celle-ci sera de la forme

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0,$$

avec les conditions

$$Ax'_1 + Bx'_2 + Cx'_3 = 0,$$
$$Ax''_1 + Bx''_2 + Cx''_3 = 0.$$

Soient u'_1, u'_2, u'_3 et u''_1, u''_2, u''_3 les coordonnées trilinéaires des deux droites données, et u_1, u_2, u_3 les coordonnées d'une droite mobile passant par le point d'intersection des deux premières. L'équation de ce point sera

$$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0,$$

avec les conditions

$$Au'_1 + Bu'_2 + Cu'_3 = 0,$$
$$Au''_1 + Bu''_2 + Cu''_3 = 0.$$

Éliminant A, B, C on trouve l'équation cherchée

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ u''_1 & u''_2 & u''_3 \end{vmatrix} = 0.$$

On en déduit immédiatement que les coordonnées trilinéaires de

la droite, et les coordonnées trilinéaires du point sont respectivement :

coordonnées de la droite

$$\rho u_1 = x'_2 x''_3 - x'_3 x''_2,$$
$$\rho u_2 = x'_3 x''_1 - x'_1 x''_3,$$
$$\rho u_3 = x'_1 x''_2 - x'_2 x''_1.$$

coordonnées du point

$$\rho x_1 = u'_2 u''_3 - u'_3 u''_2,$$
$$\rho x_2 = u'_3 u''_1 - u'_1 u''_3,$$
$$\rho x_3 = u'_1 u''_2 - u'_2 u''_1.$$

268. Proposons-nous maintenant d'étendre aux coordonnées trilinéaires, ponctuelles et tangentielles, les formules démontrées aux nos 246 et 252.

Déterminer les coordonnées du point divisant dans le rapport k la droite qui joint deux points fixes x'_1, x'_2, x'_3 et x''_1, x''_2, x''_3.

Désignons les coordonnées rectangulaires du point mobile et des deux points fixes respectivement par (x, y), (x', y'), (x'', y'') ; on a vu que l'on a (n° 246)

$$x = \frac{x' + kx''}{1 + k}, \quad y = \frac{y' + ky''}{1 + k}.$$

D'autre part, les coordonnées trilinéaires des mêmes points étant (x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3), (x'_1, x_2, x'_3) on aura (n° 259)

$$\rho x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$\rho' x'_1 = a_1 x' + b_1 y' + c_1,$$
$$\rho'' x''_1 = a_1 x'' + b_1 y'' + c_1.$$

A la seconde de ces équations ajoutons la troisième multipliée par k ; puis remplaçons $x' + kx''$ et $y' + ky''$ respectivement par $x(1 + k)$ et $y(1 + k)$; nous trouverons alors, eu égard à la première des trois

$$\rho' \left(x'_1 + k \frac{\rho''}{\rho'} x'_1 \right) = (1 + k) \rho x_1.$$

Déterminer les coordonnés d'une droite connaissant le rapport k qui détermine sa position par rapport à deux droites u'_1, u'_2, u'_3 et u'_1, u''_2, u''_3.

Les coordonnées rectangulaires de la droite mobile et des deux droites fixes étant respectivement (u, v), (u', v'), (u'', v''), on a (n° 252)

$$\mu = k \frac{\sqrt{u'^2 + v'^2}}{\sqrt{u''^2 + v''^2}}, \quad u = \frac{u' + \mu u''}{1 + \mu}, \quad v = \frac{v' + \mu v''}{1 + \mu}.$$

D'autre part, les coordonnées trilinéaires des mêmes droites étant (u_1, u_2, u_3), (u'_1, u'_2, u'_3), (u''_1, u''_2, u''_3) on a (n° 262)

$$\sigma u_1 = A_1 u + B_1 v + C_1,$$
$$\sigma' u'_1 = A_1 u' + B_1 v' + C_1,$$
$$\sigma'' u''_1 = A_1 u'' + B_1 v'' + C''_1.$$

A la seconde de ces équations ajoutons la troisième multipliée par μ ; puis remplaçons $u' + \mu u''$ et $v' + \mu u'$ respectivement par $u(1 + \mu)$ et $v(1 + \mu)$; nous trouverons alors, eu égard à la première des trois

$$\sigma' \left(u'_1 + \mu \frac{\sigma''}{\sigma'} u'_1 \right) = (1 + \mu) \sigma u_1.$$

Les constantes $1+k$ et ρ' peuvent être introduites dans le facteur de proportionnalité ρ; et si l'on pose $\mu = k\frac{\rho''}{\rho'}$, il vient

$$\rho x_1 = x'_1 + \mu x''_1.$$

En opérant de la même manière sur x_2 et x_3 on trouvera les trois expressions

$$\rho x_1 = x'_1 + \mu x''_1,$$
$$\rho x_2 = x'_2 + \mu x''_2,$$
$$\rho x_3 = x'_3 + \mu x''_3.$$

Ce sont les coordonnées d'un point mobile de la droite joignant deux points fixes et divisant la distance de ces points dans un rapport k. Le paramètre μ est égal à la valeur algébrique de k, multipliée par une constante qui ne dépend que des deux points fixes.

Les constantes $1+\mu$ et σ' peuvent être introduites dans le facteur de proportionnalité σ; et le facteur $\frac{\sigma''}{\sigma'}$ dans μ; on a ainsi

$$\sigma u_1 = u'_1 + \mu u''_1.$$

En opérant de la même manière sur u_2 et u_3 on trouvera les trois expressions

$$\sigma u_1 = u'_1 + \mu u''_1,$$
$$\sigma u_2 = u'_2 + \mu u''_2,$$
$$\sigma u_3 = u_3 + \mu u''_3.$$

Ce sont les coordonnées d'une droite mobile passant par le point de rencontre de deux droites fixes. Le paramètre μ est égal à la valeur algébrique de la coordonnée-rapport k, multipliée par une constante qui ne dépend que des deux droites fixes.

269. Proposons-nous maintenant d'étendre aux coordonnées trilinéaires les formules des nos 247 et 253.

Trouver en coordonnées trilinéaires l'équation d'une droite mobile autour du point de rencontre de deux droites fixes, connaissant le rapport des distances d'un point de la droite mobile aux deux droites fixes.

Soient les équations des deux droites fixes

$$G \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$
$$H \equiv a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = 0.$$

Les coordonnées de ces droites seront, en faisant entrer les fac-

Trouver en coordonnées trilinéaires l'équation d'un point mobile sur une droite fixe, connaissant le rapport des distances de ce point mobile à deux points donnés de la droite fixe.

Soient les équations des deux points fixes

$$P \equiv au_1 + bu_2 + cu_3 = 0,$$
$$Q \equiv a'u_1 + b'u_2 + c'u_3 = 0.$$

Les coordonnées de ces points seront, en faisant entrer les fac-

teurs de proportionnalité dans les coefficients de G et de H,

$$u'_1 = a,\quad u'_2 = b,\quad u'_3 = c;$$
$$u''_1 = a',\quad u''_2 = b',\quad u''_3 = c'.$$

Les coordonnées de la droite dont le rapport des distances à ces droites fixes est k sont donc, d'après ce qu'on vient de voir,

$$\sigma u_1 = u'_1 + \mu u''_1 = a + \mu a',$$
$$\sigma u_2 = u'_2 + \mu u''_2 = b + \mu b',$$
$$\sigma u_3 = u'_3 + \mu u''_3 = c + \mu c'.$$

Donc, l'équation de la droite sera

$$G + \mu H = 0.$$

teurs de proportionnalité dans les coefficients de P et de Q,

$$x'_1 = a,\quad x'_2 = b,\quad x'_3 = c,$$
$$x''_1 = a',\quad x''_2 = b',\quad x''_3 = c'.$$

Les coordonnées du point divisant la distance de ces points dans le rapport k sont, d'après ce qu'on vient de voir,

$$\rho x_1 = x'_1 + \mu x''_1 = a + \mu a',$$
$$\rho x_2 = x'_2 + \mu x''_2 = b + \mu b',$$
$$\rho x_3 = x'_3 + \mu x''_3 = c + \mu c'.$$

Donc, l'équation du point sera

$$P + \mu Q = 0.$$

C'est l'équation que nous avions déjà trouvée dans le cas des coordonnées rectangulaires.

Les droites qui passent par le point de rencontre de deux droites fixes constituent ce qu'on nomme un *faisceau de rayons*. On voit donc que si $G = 0$, $H = 0$, sont les équations de deux droites fixes, en coordonnées rectangulaires ou trilinéaires, un rayon quelconque du faisceau qui passe par leur point de rencontre a pour équation

$$G + \mu H = 0,$$

μ étant le rapport des distances d'un point la droite mobile du faisceau aux deux droites fixes, multiplié par un facteur qui ne dépend que de ces droites fixes.

Les points de la droite qui joint deux points fixes constituent ce qu'on nomme une *série de points*. On voit donc que si $P = 0$, $Q = 0$, sont les équations de deux points fixes, en coordonnées rectangulaires ou trilinéaires, un point quelconque de la série qui joint ces deux points fixes sera représenté par l'équation

$$P + \mu Q = 0,$$

μ étant le rapport des distances du point mobile de la série aux deux points fixes, multiplié par un facteur qui ne dépend que de ces deux points fixes.

270. *Construire la droite dont on donne l'équation en coordonnées trilinéaires ponctuelles,*

$$Lx_1 + Mx_2 + Nx_3 = 0,$$

ou le point dont on donne l'équation en coordonnées trilinéaires tangentielles

$$Lu_1 + Mu_2 + Nu_3 = 0.$$

1° Considérons d'abord le cas particulier où l'équation de la droite ne contient que deux des coordonnées x_1, x_2, x_3; admettons, par exemple, qu'elle se réduise à

$$Mx_2 + Nx_3 = 0.$$

Elle représente alors une droite passant par le point de rencontre des deux droites $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, c'est-à-dire par le sommet A du triangle de référence; et pour la construire, il suffira de déterminer le point P (fig. 80) où elle coupe le côté BC. En supposant d'abord que ce point soit un point de section intérieure, la valeur algébrique du rapport qui fixe la position de ce point sur BC sera

$$k_1 = \frac{BP}{CP} = \frac{PM \cdot \sin C}{PN \cdot \sin B}.$$

Mais les distances PM et PN ne sont autres que p_3 et p_2, et de l'équation proposée on déduit, en ayant égard au n° 257

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{\varepsilon_2 x_3}{\varepsilon_3 x_2} = -\frac{M\varepsilon_2}{N\varepsilon_3};$$

on a donc

$$k_1 = \frac{p_3 \sin C}{p_2 \sin B} = -\frac{M\varepsilon_2 \sin C}{N\varepsilon_3 \sin B}.$$

On trouverait la même expression dans le cas où la droite cherchée couperait BC en un point exté-

1° Considérons d'abord le cas particulier où l'équation du point ne contient que deux des coordonnées u_1, u_2, u_3; admettons, par exemple, qu'elle se réduise à

$$Mu_2 + Nu_3 = 0.$$

Elle représente alors un point de la droite qui joint les points $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, c'est-à-dire du côté BC du triangle de référence (fig. 80bis); et pour le construire, il suffira de déterminer le rapport k_1 dans lequel il divise la distance de ces deux points.

Mais de l'équation proposée on tire

$$\frac{u_3}{u_2} = -\frac{M}{N};$$

et, d'après la définition des coordonnées trilinéaires tangentielles, on a aussi

$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{\lambda_3 q_3}{\lambda_2 q_2};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{q_3}{q_2} = -\frac{M\lambda_2}{N\lambda_3}.$$

D'autre part, on a vu également (n° 261) qu'on a toujours, aussi bien quand P est un point de section extérieure que quand c'est un point de section intérieure, $k_1 = -\frac{q_2}{q_3}$;

rieur tel que P'. Ce rapport, qui fixe la position du point P, détermine donc aussi la droite cherchée AP.

2° Considérons maintenant le cas le plus général, l'équation de la droite étant

$$Lx_1 + Mx_2 + Nx_3 = 0.$$

Il suffira évidemment de déterminer deux des points où la droite coupe les côtés du triangle de référence. Cherchons, par exemple, le point P où elle coupe BC (fig. 81). Il faudra pour cela, dans l'équation donnée, faire $x_1 = 0$. Le point P a donc pour équations

$$x_1 = 0, \quad Mx_2 + Nx_3 = 0;$$

mais la seconde de ces équations prouve, comme on vient de le voir, que le point P est déterminé sur BC par le rapport

$$\left(\frac{BP}{CP}\right) = k_1 = -\frac{M\varepsilon_2 \sin C}{N\varepsilon_3 \sin B}.$$

On trouverait de même que le point Q est déterminé par le rapport

$$\left(\frac{CQ}{AQ}\right) = k_2 = -\frac{N\varepsilon_3 \sin A}{L\varepsilon_1 \sin C};$$

et le point R par le rapport

$$\left(\frac{AR}{BR}\right) = k_3 = -\frac{L\varepsilon_1 \sin B}{M\varepsilon_2 \sin A}.$$

Deux des trois points P, Q, R déterminent la droite cherchée.

par conséquent, il vient $k_1 = \frac{N\lambda_3}{M\lambda_2}$, rapport qui fixe la position de P.

2° Considérons maintenant le cas le plus général, l'équation du point étant

$$Lu_1 + Mu_2 + Nu_3 = 0.$$

Il suffira évidemment pour construire ce point, que nous supposerons en O (fig. 81[bis]), de déterminer deux des droites AP, BQ, CR qui le joignent aux trois sommets du triangle de référence. Pour avoir AO il faut faire $u_1 = o$; les équations de cette droite sont donc

$$u_1 = 0, \quad Mu_2 + Nu_3 = 0;$$

mais la seconde de ces équations prouve, comme on vient de le voir, que AO divise la droite BC dans le rapport

$$\left(\frac{BP}{CP}\right) = k_1 = \frac{N\lambda_3}{M\lambda_2}.$$

On trouverait de même que le point Q est déterminé par le rapport

$$\left(\frac{CQ}{AQ}\right) = k_2 = \frac{L\lambda_1}{N\lambda_3};$$

et le point R par le rapport

$$\left(\frac{AR}{BR}\right) = k_3 = \frac{M\lambda_2}{L\lambda_1}.$$

Deux des trois droites AP, BQ, CR déterminent le point cherché.

271. De ces démonstrations découlent les propositions suivantes :

Si un triangle ABC *est coupé par une transversale* PQR, *celle-ci par-*

Étant pris à volonté un point O *dans le plan d'un triangle* ABC,

tage les côtés du triangle en six segments tels que le produit de trois segments qui n'ont pas d'extrémité commune est égal au produit des trois autres. Les trois points P, Q, R, *ou un seul d'entre eux se trouvent sur les prolongements des côtés du triangle.*

les droites AO, BO, CO *partagent les côtés en six segments tels que le produit de trois segments qui n'ont pas d'extrémité commune est égal au produit des trois autres. Deux des trois points* P, Q, R *se trouvent sur les prolongements des côtés du triangle, ou il n'y en a aucun sur ces prolongements.*

En effet, si l'on multiplie entre eux les trois rapports de segments obtenus ci-dessus (N° 270), on trouve

$$\left(\frac{BP}{CP}\right)\times\left(\frac{CQ}{AQ}\right)\times\left(\frac{AR}{BR}\right)=-1.$$

Le signe — du second membre prouve que le nombre des points de section extérieure est impair ; c'est-à-dire qu'il y a un ou trois points sur les prolongements des côtés.

$$\left(\frac{BP}{CP}\right)\times\left(\frac{CQ}{AQ}\right)\times\left(\frac{AR}{BR}\right)=+1.$$

Le signe + du second membre indique que le nombre des points de section extérieure est pair ; donc il y a deux points sur des prolongements ou il n'y en a aucun.

Les réciproques de ces deux propositions sont vraies et se démontrent facilement par la réduction à l'absurde.

272. *Triangles homologiques.* — On appelle *triangles homologiques* deux triangles dont les trois sommets sont situés deux à deux sur trois droites qui se coupent en un même point. Ce point est appelé *centre d'homologie.* Les deux sommets placés sur l'une des droites passant par le centre d'homologie sont dits homologues. Les côtés homologues sont ceux qui joignent des sommets homologues. Cela posé, nous démontrerons que *les côtés homologues se coupent deux à deux sur une droite qui est appelée l'axe d'homologie.*

Soient les triangles abc, ABC (fig. 82), tels que les droites Aa, Bb, Cc, concourent en un même point S. Les côtés AB et ab se coupent au point R ; BC et bc au point P ; CA et ca au point Q. Je dis que les points P, Q, R sont en ligne droite.

En effet, le triangle Sac, coupé par la transversale AC donne

$$\left(\frac{SA}{aA}\right)\times\left(\frac{aQ}{cQ}\right)\times\left(\frac{cC}{SC}\right)=-1.$$

Le triangle Sba, coupé par AB donne

$$\left(\frac{aA}{SA}\right) \times \left(\frac{bR}{aR}\right) \times \left(\frac{SB}{bB}\right) = -1.$$

Enfin le triangle Scb, coupé par CB donne

$$\left(\frac{bB}{SB}\right) \times \left(\frac{cP}{bP}\right) \times \left(\frac{SC}{cC}\right) = -1.$$

D'où l'on déduit, en multipliant membre à membre,

$$\left(\frac{aQ}{cQ}\right) \times \left(\frac{bR}{aR}\right) \times \left(\frac{cP}{bP}\right) = -1.$$

Et cette dernière relation prouve que les points P, Q, R sont en ligne droite sur les côtés du triangle abc.

273. *Classe d'une courbe.* — Le degré d'une équation en coordonnées ponctuelles indique, comme on sait, *l'ordre* de cette courbe, et une ligne de l'ordre n est coupée par une droite en n points.

Le degré de l'équation d'une courbe, en coordonnées tangentielles, indique ce que l'on nomme *la classe* de cette courbe ; et une courbe de la $n^{ième}$ classe est telle que par un point on peut lui mener n tangentes, réelles ou imaginaires.

En effet, soient une courbe et un point représentés respectivement par l'équation $\varphi(u, v) = 0$, du degré n, et l'équation $ux + vy + 1 = 0$. Si on considère ces équations comme simultanées, les valeurs de u et v qui y satisfont sont les coordonnées des tangentes à la courbe passant par le point donné ; mais ces systèmes de valeurs sont en nombre n ; donc par le point donné on peut mener n tangentes à la courbe.

Ceci s'applique aussi aux coordonnées trilinéaires tangentielles, puisque le degré d'une équation est le même soit que l'on adopte les coordonnées triangulaires ou les coordonnées rectangulaires.

Les lignes de la première classe se réduisent à des points, puisque en coordonnées tangentielles une équation du premier degré représente un point. *On ne peut pas représenter un point par une équation au point de de vue de l'ordre*, puisque en coordonnées ponctuelles il faut deux équations pour représenter un point. De même, *la ligne droite ne peut être représentée par une équation au point de vue de la classe*, puisqu'il faut deux équations pour représenter une droite en coordonnées tangentielles.

Enfin, comme dans certains cas une équation du second degré, $\varphi(u, v) = 0$, se décompose en deux équations du premier degré, *dans le système des coordonnées tangentielles une équation du second degré peut représenter deux points*, de même qu'en coordonnées ponctuelles elle peut représenter deux droites.

274. *Trouver l'équation de la tangente en un point donné d'une courbe dont on connaît l'équation en coordonnées ponctuelles, ou celle du point de contact d'une tangente donnée à une courbe dont on connaît l'équation en coordonnées tangentielles.*

Soit $\varphi(X_1, X_2, X_3) = 0$ l'équation d'une courbe en coordonnées trilinéaires ponctuelles.

La tangente au point x_1, x_2, x_3 de la courbe peut être considérée comme une droite passant par ce point et par un second point de la courbe infiniment voisin du premier et dont nous représenterons les coordonnées par

$$x_1 + dx_1, \quad x_2 + dx_2, \quad x_3 + dx_3.$$

L'équation de la tangente sera donc de la forme

$$AX_1 + BX_2 + CX_3 = 0,$$

avec les conditions

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0,$$
$$Adx_1 + Bdx_2 + Cdx_3 = 0.$$

Éliminant A, B, C, il vient

$$X_1(x_2dx_3 - x_3dx_2) + X_2(x_3dx_1 - x_1dx_3) + X_3(x_1dx_2 - x_2dx_1) = 0.$$

Comme les deux points infiniment voisins appartiennent à la courbe, on a aussi

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$
$$\frac{d\varphi}{dx_1}dx_1 + \frac{d\varphi}{dx_2}dx_2 + \frac{d\varphi}{dx_3}dx_3 = 0.$$

Soit $\varphi(U_1, U_2, U_3) = 0$ l'équation d'une courbe en coordonnées trilinéaires tangentielles.

Le point de contact de la tangente u_1, u_2, u_3 à la courbe peut être considéré comme le point d'intersection de cette tangente et d'une tangente infiniment voisine dont nous représenterons les coordonnées par

$$u_1 + du_1, \quad u_2 + du_2, \quad u_3 + du_3.$$

L'équation cherchée du point de contact sera donc de la forme

$$AU_1 + BU_2 + CU_3 = 0,$$

avec les conditions

$$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 0,$$
$$Adu_1 + Bdu_2 + Cdu_3 = 0.$$

Éliminant A, B, C, il vient

$$U_1(u_2du_3 - u_3du_2) + U_2(u_3du_1 - u_1du_3) + U_3(u_1du_2 - u_2du_1) = 0.$$

Les deux tangentes infiniment voisines devant toucher la courbe, on a aussi

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0,$$
$$\frac{d\varphi}{du_1}du_1 + \frac{d\varphi}{du_2}du_2 + \frac{d\varphi}{du_3}du_3 = 0.$$

La première de ces équations peut s'écrire d'une autre manière ; car, puisqu'elle est homogène, en supposant qu'elle soit du degré m, on aura l'identité

$$x_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + x_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + x_3 \frac{d\varphi}{dx_3} = m\varphi(x_1, x_2, x_3).$$

Pour abréger nous représenterons les trois dérivées qui entrent dans ces équations respectivement par $\varphi'(x_1)$, $\varphi'(x_2)$, $\varphi'(x_3)$.

On aura donc

$$x_1\varphi'(x_1) + x_2\varphi'(x_2) + x_3\varphi'(x_3) = 0,$$
$$dx_1\varphi'(x_1) + dx_2\varphi'(x_2) + dx_3\varphi'(x_3) = 0;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\varphi'(x_1)}{x_2dx_3 - x_3dx_2} = \frac{\varphi'(x_2)}{x_3dx_1 - x_1dx_3} = \frac{\varphi'(x_3)}{x_1dx_2 - x_2dx_1}.$$

L'équation de la tangente au point x_1, y_1, z_1 sera donc définitivement de la forme

$$X_1\varphi'(x_1) + X_2\varphi'(x_2) + X_3\varphi'(x_3) = 0.$$

La première de ces équations peut s'écrire d'une autre manière ; car, puisqu'elle est homogène, en supposant qu'elle soit du degré m, on aura l'identité

$$u_1 \frac{d\varphi}{du_1} + u_2 \frac{d\varphi}{du_2} + u_3 \frac{d\varphi}{du_3} = m\varphi(u_1, u_2, u_3).$$

Pour abréger nous représenterons les trois dérivées qui entrent dans ces équations respectivement par $\varphi'(u_1)$, $\varphi'(u_2)$, $\varphi'(u_3)$.

On aura donc

$$u_1\varphi'(u_1) + u_2\varphi'(u_2) + u_3\varphi'(u_3) = 0,$$
$$du_1\varphi'(u_1) + du_2\varphi'(u_2) + du_3\varphi'(u_3) = 0;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\varphi'(u_1)}{u_2du_3 - u_3du_2} = \frac{\varphi'(u_2)}{u_3du_1 - u_1du_3} = \frac{\varphi'(u_3)}{u_1du_2 - u_2du_1}.$$

L'équation du point de contact de la tangente u_1, u_2, u_3 sera donc définitivement de la forme

$$U_1\varphi'(u_1) + U_2\varphi'(u_2) + U_3\varphi'(u_3) = 0.$$

Il est clair que si l'on avait fait usage de coordonnées rectangulaires au lieu de coordonnées triangulaires, on aurait trouvé des équations de même forme ; en effet, pour rendre ces équations homogènes il aurait suffi de remplacer x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, ou u et v par $\frac{u}{w}$ et $\frac{v}{w}$. On aurait trouvé dans le premier cas

$$X\varphi'(x) + Y\varphi'(y) + Z\varphi'(z) = 0;$$

et dans le second

$$U\varphi'(u) + V\varphi'(v) + W\varphi'(w) = 0;$$

dans ces équations on devrait faire

$$Z = z = 1 \quad \text{et} \quad W = w = 1.$$

275. *Trouver l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles connaissant son équation en coordonnées ponctuelles, et réciproquement.*

Soit $\varphi(X_1, X_2, X_3) = 0$ l'équation d'une courbe en coordonnées ponctuelles; l'équation de la tangente en un point x_1, x_2, x_3 de cette courbe sera, comme on vient de le voir,

$$X_1\varphi'(x_1)+X_2\varphi'(x_2)+X_3\varphi'(x_3)=0.$$

Les coordonnées de cette tangente seront, par conséquent, proportionnelles à $\varphi'(x_1)$, $\varphi'(x_2)$, $\varphi'(x_3)$ et on aura

$$\frac{\varphi'(x_1)}{u_1}=\frac{\varphi'(x_2)}{u_2}=\frac{\varphi'(x_3)}{u_3};$$

et comme le point x_1, x_2, x_3 appartient à la courbe, on a aussi

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Les coordonnées u_1, u_2, u_3 d'une tangente quelconque à la courbe, sont donc exprimées en fonction des paramètres variables x_1, x_2, x_3, liés par une équation de condition. Bien qu'en apparence ces paramètres soient au nombre de trois, il suffira des trois équations ci-dessus pour les éliminer, puisque ces équations sont homogènes. La résultante sera une équation

$$\psi(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

entre les coordonnées d'une tangente quelconque à la courbe. Elle ne sera donc autre chose que l'équation de cette courbe en coordonnées tangentielles quand on y regardera u_1, u_2, u_3 comme des variables.

Soit $\varphi(U_1, U_2, U_3) = 0$ l'équation d'une courbe en coordonnées tangentielles; l'équation du point de contact d'une tangente u_1, u_2, u_3 à cette courbe sera, comme on vient de le voir,

$$U_1\varphi'(u_1)+U_2\varphi'(u_2)+U_3\varphi'(u_3)=0.$$

Les coordonnées de ce point de contact seront, par conséquent, proportionnelles à $\varphi'(u_1)$, $\varphi'(u_2)$, $\varphi'(u_3)$ et l'on aura

$$\frac{\varphi'(u_1)}{x_1}=\frac{\varphi'(u_2)}{x_2}=\frac{\varphi'(u_3)}{x_3};$$

et comme la tangente u_1, u_2, u_3 touche la courbe, on a aussi

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Les coordonnées x_1, x_2, x_3 d'un point quelconque de la courbe, sont donc exprimés en fonction des paramètres variables u_1, u_2, u_3, liés par une équation de condition. Bien qu'en apparence ces paramètres soient au nombre de trois, il suffira des trois équations ci-dessus pour les éliminer, puisque ces équations sont homogènes. La résultante sera une équation

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

entre les coordonnées d'un point quelconque de la courbe. Elle ne sera donc autre chose que l'équation de cette courbe en coordonnées ponctuelles quand on y regardera x_1, x_2, x_3 comme des variables.

Si la fonction φ est du second degré ses dérivées sont du premier degré; d'où il suit que la fonction ψ est du second degré; donc *les lignes du second ordre sont de la seconde classe, et réciproquement.*

Nous avons fait usage ici des coordonnées triangulaires; mais il est clair que la méthode pourrait être appliquée exactement de la même manière si l'on employait les coordonnées rectangulaires.

§ 3. Rapports anharmoniques et rapports harmoniques. — Involution.

276. Considérons une série de points $1, 2, 3, \ldots, m, n, p$, (fig. 83)

Fig. 83.

1 2 3 ... m n p

0 x_1 x_2 x_3 ... x_m x_n x_p

situés sur une droite fixe et désignons leurs abscisses, comptées à partir d'une origine 0, par $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$.

Soit ρ_{12} le rayon vecteur du point 2, compté à partir de 1, c'est-à-dire la distance 12 prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$ suivant que le point 2 tombe par rapport à 1 du côté des abscisses positives, ou du côté des abscisses négatives. On sait (voir n° 215) qu'on a $\rho_{12} = x_2 - x_1$, quels que soient les signes des trois valeurs algébriques qui entrent dans cette formule; on aurait de même $\rho_{21} = x_1 - x_2$, et en général, d'après cette convention,

$$\rho_{mn} = x_n - x_m.$$

Soit k la coordonnée-rapport du point m par rapport aux points 1 et 2; on a quelle que soit la position du point m (n° 246)

$$x_m = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}; \quad \text{d'où} \quad k = -\frac{x_m - x_1}{x_m - x_2} = -\frac{\rho_{1m}}{\rho_{2m}};$$

et, plus généralement, le rapport qui fixe la position d'un point p par rapport aux deux points m et n est

$$k = -\frac{\rho_{mp}}{\rho_{np}} = -\frac{x_p - x_m}{x_p - x_n}.$$

277. *Rapport anharmonique.* — Soient quatre points 1, 2, 3, 4 et désignons par k et k' les coordonnées-rapports qui déterminent les positions de deux de ces points par rapport aux deux autres. Le quotient

$k:k'$ est ce que l'on nomme le rapport anharmonique de ces quatre points.

Il résulte de cette définition qu'on peut former le rapport anharmonique de quatre points de vingt-quatre manières correspondant aux vingt-quatre permutations des nombres 1, 2, 3, 4; toutefois on n'obtient que six valeurs différentes.

En effet, on peut former d'abord les trois rapports

$$\alpha = \frac{\rho_{13}}{\rho_{23}} : \frac{\rho_{14}}{\rho_{24}}, \quad \beta = \frac{\rho_{14}}{\rho_{34}} : \frac{\rho_{12}}{\rho_{32}}, \quad \gamma = \frac{\rho_{12}}{\rho_{42}} : \frac{\rho_{13}}{\rho_{43}}.$$

Pour former le rapport α on a pris 1 et 2 pour points de base, et divisé la coordonnée-rapport du point 3 par celle du point 2. Puis dans α on a effectué la permutation circulaire des indices 2, 3 et 4, ce qui a fourni les rapports β et γ.

Désignons maintenant par la notation (m, n, p, q) le rapport $\frac{\rho_{mp}}{\rho_{np}} : \frac{\rho_{mq}}{\rho_{nq}}$; les vingt-quatre manières de former le rapport anharmonique nous donneront les valeurs suivantes :

$$(1, 2, 3, 4) = \alpha, \quad (1, 2, 4, 3) = \frac{1}{\alpha}, \quad (2, 1, 3, 4) = \frac{1}{\alpha}, \quad (2, 1, 4, 3) = \alpha,$$

$$(1, 3, 4, 2) = \beta, \quad (1, 3, 2, 4) = \frac{1}{\beta}, \quad (3, 1, 4, 2) = \frac{1}{\beta}, \quad (3, 1, 2, 4) = \beta,$$

$$(1, 4, 2, 3) = \gamma, \quad (1, 4, 3, 2) = \frac{1}{\gamma}, \quad (4, 1, 2, 3) = \frac{1}{\gamma}, \quad (4, 1, 3, 2) = \gamma,$$

$$(2, 3, 1, 4) = \gamma, \quad (2, 3, 4, 1) = \frac{1}{\gamma}, \quad (3, 2, 1, 4) = \frac{1}{\gamma}, \quad (3, 2, 4, 1) = \gamma,$$

$$(2, 4, 3, 1) = \beta, \quad (2, 4, 1, 3) = \frac{1}{\beta}, \quad (4, 2, 3, 1) = \frac{1}{\beta}, \quad (4, 2, 1, 3) = \beta,$$

$$(3, 4, 1, 2) = \alpha, \quad (3, 4, 2, 1) = \frac{1}{\alpha}, \quad (4, 3, 1, 2) = \frac{1}{\alpha}, \quad (4, 3, 2, 1) = \alpha.$$

En résumé, on n'a donc que les trois valeurs α, β, γ et leurs inverses $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$. Il est à observer que chacune des valeurs du rapport anharmonique de quatre points peut s'écrire sous quatre formes différentes ; c'est ainsi, par exemple, que α peut se mettre sous les quatre formes

$$(1, 2, 3, 4) = (2, 1, 4, 3) = (3, 4, 1, 2) = (4, 3, 2, 1).$$

278. Quand trois points sont donnés sur une droite il suffit, pour fixer sur celle-ci la position d'un quatrième point, de donner le rapport anharmonique de ces quatre points sous une quelconque des six formes que nous venons d'indiquer. Car, si on connaît, par exemple, les positions des points 1, 2, 3 et le rapport anharmonique α, on aura pour déterminer le quatrième point, la relation

$$\alpha = \frac{\rho_{13}}{\rho_{23}} : \frac{\rho_{14}}{\rho_{24}};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\rho_{14}}{\rho_{24}} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{\rho_{13}}{\rho_{23}}.$$

Le second membre est connu et détermine en grandeur et en signe le rapport $\frac{\rho_{14}}{\rho_{24}}$, qui fixe la position du point 4 par rapport aux points 1 et 2.

D'où il résulte que si on connaît un seul des rapports anharmoniques qu'on peut former au moyen de quatre points, les autres rapports peuvent s'en déduire. On verra d'ailleurs de la manière suivante, comment les valeurs de β et γ peuvent s'obtenir en fonction de α. On a

$$1 - \alpha = \frac{\rho_{14}(\rho_{13} - \rho_{12}) - \rho_{13}(\rho_{14} - \rho_{12})}{\rho_{14}(\rho_{13} - \rho_{12})} = \frac{\rho_{12}(\rho_{13} - \rho_{14})}{\rho_{14}(\rho_{13} - \rho_{12})} = \frac{1}{\beta};$$

$$1 - \beta = \frac{\rho_{12}(\rho_{14} - \rho_{13}) - \rho_{14}(\rho_{12} - \rho_{13})}{\rho_{12}(\rho_{14} - \rho_{13})} = \frac{\rho_{13}(\rho_{14} - \rho_{12})}{\rho_{12}(\rho_{14} - \rho_{13})} = \frac{1}{\gamma};$$

$$1 - \gamma = \frac{\rho_{13}(\rho_{12} - \rho_{14}) - \rho_{12}(\rho_{13} - \rho_{14})}{\rho_{13}(\rho_{12} - \rho_{14})} = \frac{\rho_{14}(\rho_{12} - \rho_{13})}{\rho_{13}(\rho_{12} - \rho_{14})} = \frac{1}{\alpha}.$$

279. *Si quatre points sont déterminés sur une droite par leurs coordonnées-rapports k_1, k_2, k_3, k_4, relatives à deux points fixes donnés sur cette droite, le rapport anharmonique de ces quatre points a pour expression*

$$\alpha = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4}.$$

En effet, si on désigne par x_1, x_2, x_3, x_4 les abscisses des quatre points comptées à partir d'une origine fixe, arbitrairement choisie sur la droite, on aura

$$\alpha = \frac{\rho_{13}}{\rho_{23}} : \frac{\rho_{14}}{\rho_{24}} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.$$

Mais si on désigne par x' et x'' les abscisses des deux points de base servant à déterminer les coordonnées-rapports, on aura aussi

$$x_3 - x_1 = \frac{x' + k_3 x''}{1 + k_3} - \frac{x' + k_1 x''}{1 + k_1} = \frac{(x' - x'')(k_1 - k_3)}{(1 + k_3)(1 + k_1)};$$

$$x_3 - x_2 = \frac{x' + k_3 x''}{1 + k_3} - \frac{x' + k_2 x''}{1 + k_2} = \frac{(x' - x'')(k_2 - k_3)}{(1 + k_3)(1 + k_2)};$$

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} \cdot \frac{1 + k_2}{1 + k_1}.$$

De la même manière on trouvera, en permutant les indices 3 et 4,

$$\frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4} \cdot \frac{1 + k_2}{1 + k_1}.$$

De là on déduit finalement

$$\alpha = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4};$$

et l'on trouverait de la même manière

$$\beta = \frac{k_1 - k_4}{k_3 - k_4} : \frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_2};$$

$$\gamma = \frac{k_1 - k_2}{k_4 - k_2} : \frac{k_1 - k_3}{k_4 - k_3}.$$

Remarque. — Les binômes $x_3 - x_1$, $x_3 - x_2$, $x_4 - x_1$, $x_4 - x_2$ sont indépendants de la position de l'origine arbitraire à partir de laquelle on compte les abscisses, aussi bien que des points de base x' et x''. Le rapport anharmonique α est donc une fonction qui ne dépend que des positions relatives des quatre points x_1, x_2, x_3, x_4. C'est pour cela que quand on se donne le rapport anharmonique de ces points et la position de trois d'entre eux, on peut déterminer le quatrième, pourvu bien entendu qu'on indique l'ordre dans lequel il faut prendre les quatre points pour former le rapport donné.

Observons encore que si l'on donne les équations des quatre points,

$$P + \mu_1 Q = 0, \quad P + \mu_2 Q = 0, \quad P + \mu_3 Q = 0, \quad P + \mu_4 Q = 0,$$

leur rapport anharmonique sera égal à

$$\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4};$$

car, les valeurs de μ sont égales à celles de k multipliées par un facteur constant qui ne dépend que de P et Q.

280. *Faisceaux anharmoniques.* — Considérons maintenant un faisceau de rayons passant par un point A (fig. 84). Soient AB et AC les rayons de base, AR_1 et AR_2 deux rayons quelconques du faisceau, k_1 la coordonnée-rapport de AR_1 et k_2 la coordonnée-rapport de AR_2; on sait que k_1 et k_2 déterminent complètement les droites AR_1 et AR_2. Si l'on prend ensuite le quotient $\frac{k_1}{k_2}$, on obtient ce qu'on nomme le *rapport anharmonique* des quatre droites du faisceau. Il est clair que quand on se donne les trois droites AB, AC, AR_1, ainsi que le rapport anharmonique $\frac{k_1}{k_2}$, on peut déterminer le rayon AR_2.

Les deux droites AB et AC du faisceau ont été prises ici pour rayons de base; mais nous allons montrer comment on peut trouver le rapport anharmonique de quatre droites quelconques indépendamment de ces rayons.

Nous ferons d'abord observer que si les équations des rayons de base sont $G = 0$, $H = 0$, celles des deux autres rayons peuvent se mettre sous la forme

$$G + \mu_1 H = 0, \quad G + \mu_2 H = 0,$$

μ_1 et μ_2 n'étant autres que les rapports k_1 et k_2, multipliés par un facteur qui dépend de G et H (nº 269), et qu'en conséquence le rapport anharmonique du faisceau sera aussi exprimé par $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{k_1}{k_2}$.

281. Nous démontrerons maintenant deux propositions corrélatives qui sont très importantes parce qu'elles servent à établir les relations métriques qui existent entre les figures corrélatives en général.

Quand on joint quatre points en ligne droite à un point extérieur, on forme un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à celui des quatre points.

Soient B, C, R_1, R_2 (fig. 84) les quatre points en ligne droite, A le

Quand on coupe un faisceau de quatre rayons par une transversale quelconque, on obtient quatre points dont le rapport anharmonique est égal à celui du faisceau.

Soient AB, AC, AR_1, AR_2 les quatre rayons du faisceau, BC la

point extérieur, ayant pour coordonnées x_0, y_0 et soient les équations de B et C

$$P \equiv au + bv + 1 = 0,$$
$$Q \equiv \alpha u + \beta v + 1 = 0.$$

Ces points auront pour coordonnées

$$x' = a,\ y' = b \quad \text{et} \quad x'' = \alpha,\ y'' = \beta.$$

Les droites AB et AC auront donc pour équations

$$G \equiv \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$H \equiv \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

D'autre part, les équations des points R_1 et R_2, pris à volonté sur la droite BC, seront de la forme

$$P + \mu_1 Q = 0 \quad \text{et} \quad P + \mu_2 Q = 0;$$

et le rapport anharmonique des quatre points B, C, R_1, R_2 sera $\frac{\mu_1}{\mu_2}$.

Mais l'équation

$$P + \mu_1 Q = 0$$

revient à

$$(a + \alpha\mu_1)u + (b + \beta\mu_1)v + 1 + \mu_1 = 0.$$

Le point R_1 a donc pour coordonnées

$$x_1 = \frac{a + \alpha\mu_1}{1 + \mu_1}, \quad y_1 = \frac{b + \beta\mu_1}{1 + \mu_1};$$

et la droite qui le joint au point

transversale, ayant pour coordonnées u_0, v_0, et soient les équations de AB et AC

$$G \equiv ax + by + 1 = 0,$$
$$H \equiv \alpha x + \beta y + 1 = 0.$$

Ces droites auront pour coordonnées

$$u' = a,\ v' = b \quad \text{et} \quad u'' = \alpha,\ v'' = \beta.$$

Les points B et C auront donc pour équations

$$P \equiv \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_0 & v_0 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$Q \equiv \begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_0 & v_0 & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

D'autre part, les équations des droites AR_1 et AR_2, menées à volonté par A, seront de la forme

$$G + \mu_1 H = 0 \quad \text{et} \quad G + \mu_2 H = 0;$$

et le rapport anharmonique des droites AB, AC, AR_1, AR_2 sera $\frac{\mu_1}{\mu_2}$.

Mais l'équation

$$G + \mu_1 H = 0$$

revient à

$$(a + \alpha\mu_1)x + (b + \beta\mu_1)y + 1 + \mu_1 = 0.$$

La droite AR_1 a donc pour coordonnées

$$u_1 = \frac{a + \alpha\mu_1}{1 + \mu_1}, \quad v_1 = \frac{b + \beta\mu_1}{1 + \mu_1},$$

et le point R_1 où elle rencontre la

(x_0, y_0) aura, par conséquent, pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ a+\alpha\mu_1 & b+\beta\mu_1 & 1+\mu_1 \end{vmatrix} = 0;$$

celle-ci revient à

$$G + \mu_1 H = 0.$$

On trouverait de la même manière pour l'équation de la droite AR_2

$$G + \mu_2 H = 0.$$

Donc, le faisceau AB, AC, AR_1, AR_2 a pour rapport anharmonique $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ et, par conséquent, ce rapport est le même que celui des quatre points B, C, R_1, R_2.

C. Q. F. D.

transversale aura, par conséquent, pour équation

$$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ u_0 & v_0 & 1 \\ a+\alpha\mu_1 & b+\beta\mu_1 & 1+\mu_1 \end{vmatrix} = 0;$$

celle-ci revient à

$$P + \mu_1 Q = 0.$$

On trouverait de la même manière pour l'équation du point R_2

$$P + \mu_2 Q = 0.$$

Donc, le rapport anharmonique des quatre points B, C, R_1, R_2 est $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ et, par conséquent, ce rapport est égal à celui des quatre rayons du faisceau AB, AC, AR_1, AR_2.

C. Q. F. D.

Au fond ces deux propositions corrélatives sont évidemment les mêmes. Les équations des quatre droites ou celles des quatre points peuvent, d'ailleurs, être considérées indifféremment comme écrites en coordonnées rectangulaires ou trilinéaires.

Pour trouver maintenant du rapport anharmonique d'un faisceau une expression indépendante des rayons de base, considérons les quatre rayons

$$G + \mu_1 H = 0, \quad G + \mu_2 H = 0, \quad G + \mu_3 H = 0, \quad G + \mu_4 H = 0,$$

et coupons ce faisceau par une transversale; les quatre points d'intersection pourront être représentés, d'après ce qui précède, par les équations

$$P + \mu_1 Q = 0, \quad P + \mu_2 Q = 0, \quad P + \mu_3 Q = 0, \quad P + \mu_4 Q = 0.$$

Mais on a vu que le rapport anharmonique de ces points est

$$x = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4};$$

et, d'autre part, il est prouvé que le rapport anharmonique des quatre points est égal à celui du faisceau; donc cette même expression est celle

du rapport anharmonique des quatre rayons du faisceau. On fait usage de la notation (BCR_1R_2) pour désigner le rapport anharmonique des quatre points, et (A, BCR_1R_2) pour désigner celui des quatre rayons ; on a donc

$$(BCR_1R_2) = (A, BCR_1R_2) = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4}.$$

Remarque. — Le rapport anharmonique des quatre points ne change pas si la transversale coupe certains rayons sur leurs prolongements ; si on a, par exemple, les deux séries A, B, C, D et A′, B′, C′, D′ (fig. 85), et si on considère d'abord le faisceau (S, ABCD) en prenant SA et SB pour rayons de base ; si ensuite on considère le faisceau (S, A′B′C′D′) en prenant pour rayons de base SA′ et SB, on voit que les rapports de distances de SC et SD à ces rayons de base sont, dans le premier cas, égaux et de signes contraires à ce qu'ils sont dans le second. Leurs quotients, c'est-à-dire les rapports anharmoniques des faisceaux sont donc les mêmes dans les deux cas et, par conséquent, on a aussi (ABCD) = (A′B′C′D′).

282. *Rapport anharmonique dans les systèmes imaginaires.* — Pour donner à un grand nombre de théorèmes le degré de généralité qu'ils comportent, il est nécessaire que la démonstration en soit applicable à certains cas où des points et des droites en nombre quelconque deviennent imaginaires. Or, nous avons vu que quand une démonstration semble impliquer que les grandeurs que l'on y envisage sont réelles, on ne peut pas considérer comme rigoureuses les conclusions auxquelles on arriverait en étendant immédiatement les propositions ainsi établies à des systèmes imaginaires ; de semblables extensions ne sont permises que quand elles reposent sur des considérations purement analytiques. C'est pourquoi nous donnerons de quelques formules des démonstrations qui permettent de les appliquer aussi bien à des systèmes imaginaires qu'à des systèmes réels.

283. L'équation d'une ligne droite peut être vérifiée par une infinité de systèmes de valeurs imaginaires des variables x et y. Chacun de ces systèmes est considéré comme déterminant un point imaginaire de la droite. Si l'on donne à x deux valeurs imaginaires conjuguées, les valeurs correspondantes de y sont aussi conjuguées. On a ainsi deux points imaginaires que l'on dit conjugués.

Une équation de la forme

$$(a+a'\sqrt{-1})x+(b+b'\sqrt{-1})y+(c+c'\sqrt{-1})=0.$$

est ce qu'on nomme l'équation d'une droite imaginaire ; en désignant $\sqrt{-1}$ par i on peut écrire

$$ax+by+c+i(a'x+b'y+c')=0,$$

ce qui montre que toute droite imaginaire passe par un point réel, intersection des deux droites représentées par les équations

$$ax+by+c=0 \quad \text{et} \quad a'x+b'y+c'=0.$$

284. L'équation d'une droite réelle peut être mise sous la forme

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\rho.$$

Si, pour plus de simplicité, on suppose les coordonnées rectangulaires et que l'on désigne par α l'angle que la droite fait avec l'axe des x, on pourra faire $a=\cos\alpha$, $b=\sin\alpha$, et alors ρ sera la distance du point x, y au point x', y' prise avec le signe convenable. On a vu que si pour aller du point x', y' vers le point x, y on chemine dans celle des deux directions opposées de la droite donnée qui fait avec l'axe des x positifs l'angle α, la valeur de ρ sera positive. Elle sera négative dans le cas contraire. On peut encore dire que ρ est le rayon vecteur du point x, y, le pôle étant au point x', y' et α étant l'angle de position.

On peut étendre ceci au cas d'une droite imaginaire. Soit l'équation

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0,$$

dans laquelle les coefficients sont réels ou imaginaires. Soient x' et y' les coordonnées de l'un quelconque des points de la droite que représente cette équation ; on aura la condition

$$\mathrm{A}x'+\mathrm{B}y'+\mathrm{C}=0,$$

qui permet d'éliminer C et de ramener l'équation donnée à

$$\mathrm{A}(x-x')+\mathrm{B}(y-y')=0.$$

Or cette dernière peut toujours s'écrire sous la forme

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b},$$

avec la condition

$$a^2+b^2=1,$$

en donnant aux constantes a et b des valeurs convenables ; car il suffit de déterminer a et b par les deux équations

$$\frac{A}{\frac{1}{a}} = \frac{B}{-\frac{1}{b}} \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = 1,$$

ce qui donne les valeurs réelles ou imaginaires

$$a = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad b = \frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Le radical peut être pris à volonté avec le signe + ou avec le signe — ; mais il doit avoir le même signe dans les deux expressions.

Cela posé, si la droite est imaginaire, *ces valeurs de a et b seront, par définition, le cosinus et le sinus, respectivement, de l'angle que la droite fait avec l'axe des x*. On dira que les valeurs $+a$ et $+b$ déterminent une des directions de la droite, et les valeurs $-a$ et $-b$ la direction opposée. Si l'on pose maintenant

$$\frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b} = \rho,$$

cette valeur de ρ sera considérée comme le rayon vecteur du point x, y compté à partir de x', y' dans la direction déterminée par a et b. C'est la distance des deux points, affectée du signe convenable, distance qui est, comme on le voit, exprimée par les mêmes formules, soit qu'il s'agisse de deux points réels ou de deux points imaginaires ; on aura d'ailleurs ainsi, dans tous les cas,

$$\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

285. On peut additionner et soustraire les rayons vecteurs imaginaires à l'aide des mêmes formules que les rayons vecteurs réels ; en effet, en conservant les notations précédemment admises, si l'on a trois points déterminés par les abscisses x_m, x_n, x_p, on a les formules générales (n° 284).

$$\rho_{mp} = \frac{x_p - x_m}{a}, \quad \rho_{mn} = \frac{x_n - x_m}{a}, \quad \rho_{np} = \frac{x_p - x_n}{a};$$

d'où l'on déduit, par addition,

$$\rho_{mp} = \rho_{mn} + \rho_{np} \text{(*)},$$

(*) On a aussi $\rho_{mn} + \rho_{np} + \rho_{pm} = 0$ (à comparer à la note du n° 219).

formule générale, qui s'applique aux systèmes imaginaires comme aux systèmes réels. Le point p peut, d'ailleurs, être considéré indifféremment comme point de section intérieure ou extérieure sur mn.

La situation du point p sera alors déterminée sur mn par la coordonnée-rapport $k = -\frac{\rho_{mp}}{\rho_{np}}$; d'où l'on conclut $k = -\frac{x_p - x_m}{x_p - x_n}$.

La valeur de k pourrait s'exprimer de la même manière à l'aide des ordonnées y_m, y_n, y_p; de sorte que l'on a

$$x_p = \frac{x_m + kx_n}{1+k}, \quad y_p = \frac{y_m + ky_n}{1+k},$$

formules qui restent les mêmes, que le système soit imaginaire ou qu'il soit réel.

286. Soient maintenant un point x', y' et deux droites

$$G \equiv Ax + By + C = 0, \quad H \equiv A'x + B'y + C' = 0;$$

quand le système sera imaginaire, on aura *par définition* (les coordonnées étant supposées rectangulaires) les formules suivantes, pour exprimer les distances du point à ces droites :

$$r = \pm \frac{G}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad s = \pm \frac{H}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}, \quad \mu = \pm \frac{r\sqrt{A^2 + B^2}}{s\sqrt{A'^2 + B'^2}};$$

d'où l'on tire

$$G + \mu H = 0,$$

ce qui est l'équation d'une droite passant par le point de rencontre des droites G et H, et telle que le rapport des distances d'un de ses points aux deux droites G et H ne diffère de μ que par un facteur constant qui dépend uniquement des deux droites fixes; d'ailleurs, suivant le signe donné à μ, cette droite sera considérée comme traversant l'un des angles formés par G et H ou l'angle supplémentaire.

Il résulte encore de là que les coordonnées tangentielles de cette droite peuvent être calculées comme on l'a fait au n° 252 et qu'elles sont, par conséquent,

$$u = \frac{u' + \mu u''}{1+\mu}, \quad v = \frac{v' + \mu v''}{1+\mu}.$$

Et de même, l'équation du point divisant dans un rapport donné la droite qui joint deux points fixes pourra être établie comme au n° 253 et sera

$$P + \mu Q = 0.$$

Quand on voudra ensuite passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées trilinéaires, on n'aura qu'à reprendre les calculs algébriques effectués dans l'hypothèse où il ne s'agissait que de systèmes réels, ce qui conduira aux mêmes formules que dans cette hypothèse.

Enfin, c'est aussi par des considérations purement analytiques que nous avons trouvé l'expression du rapport anharmonique de quatre points sous la forme

$$\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4};$$

cette formule peut donc aussi être étendue à un système de quatre points imaginaires, et il en est de même du rapport anharmonique d'un faisceau de quatre rayons.

287. *Rapport harmonique.* — Quand un des rapports anharmoniques α, β, γ formés par quatre points, est égal à -1, les deux autres sont respectivement égaux à $\frac{1}{2}$ et à 2; car si on a, par exemple, $\alpha = -1$, on trouve

$$\beta = 1 - \frac{1}{\alpha} = 2, \quad \gamma = 1 - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2},$$

et les trois rapports inverses sont

$$\frac{1}{\alpha} = -1, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\gamma} = 2.$$

Le rapport α prend alors le nom de *rapport harmonique*.

Les points 3 et 4 sont dits conjugués harmoniques sur la droite qui joint les points 1 et 2; et il est aisé de voir que, réciproquement, les points 1 et 2 sont conjugués harmoniques sur la droite qui joint les points 3 et 4. Car on a vu (n° 277) qu'on a

$$\alpha = (1, 2, 3, 4) = (3, 4, 1, 2) \quad \text{d'où} \quad (3, 4, 1, 2) = -1.$$

La valeur d'un rapport harmonique étant négative, les deux points conjugués sont l'un intérieur et l'autre extérieur par rapport aux deux points de base. Si les points 1 et 2 sont en A et B (fig. 86), les points conjugués 3 et 4 seront en C et D.

Fig. 86.

A O C B D

288. *Si deux points* C *et* D *divisent harmoniquement la droite* AB, *on a la relation*

$$\overline{AO}^2 = \overline{OB}^2 = OC \,.\, OD,$$

le point O *étant le milieu de* AB (fig. 86).

En effet, on a par hypothèse

$$\alpha = -1 = \frac{AC}{BC} : -\frac{AD}{BD}; \quad \text{d'où la proportion} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

Mais celle-ci peut s'écrire de la manière suivante

$$\frac{AO + OC}{AO - OC} = \frac{AO + OD}{OD - AO},$$

De là on tire

$$2AO : 2OC = 2OD : 2AO,$$

ou encore

$$\overline{AO}^2 = \overline{OB}^2 = OC.OD.$$

Cette démonstration n'exige pas que les quatre points soient réels. S'ils étaient imaginaires il faudrait regarder la figure comme purement symbolique. Les distances AC, CB, ... seraient les valeurs imaginaires $\rho_{13}, \rho_{32}, \ldots$ et le point O serait le point ayant pour coordonnées les moyennes arithmétiques de celles des points A et B, d'où il résulterait que les expressions des distances AO et OB seraient égales.

Réciproquement, *si on a la relation* $\overline{OB}^2 = OC.OD$, *les points* C *et* D *sont conjugués harmoniques sur* AB. On le démontrera sans peine par la réduction à l'absurde.

De là un moyen de trouver le point O, conjugué harmonique de C sur AB, dans un système réel. Il suffit de construire OD, troisième proportionnelle aux longueurs OC et OB.

289. La relation $\overline{OB}^2 = OC.OD$ peut encore s'écrire sous la forme

$$\overline{OB}^2 = (AC - AO)(AD - AO);$$

ou, en simplifiant,

$$AC.AD = AO(AC + AD) = \frac{AB}{2}(AC + AD),$$

ce qui donne

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AC}.$$

Toutes les fois que C et D sont conjugués harmoniques sur AB, les trois longueurs AC, AB, AD sont donc liées par cette relation; et réciproquement, quand cette relation existe, C et D sont conjugués harmoniques sur AB, comme on le démontrerait sans peine par la réduction à l'absurde. La longueur AB est dite *moyenne harmonique* entre les deux longueurs AC et AD.

290. *Cas où l'un des quatre points s'éloigne jusqu'à l'infini.* Quand dans un système de quatre points l'un quelconque d'entre eux s'éloigne jusqu'à l'infini, le rapport anharmonique de ces quatre points se réduit, à la limite, à la valeur algébrique, changée de signe, du rapport qui détermine la position d'un des trois points restés fixes, par rapport aux deux autres.

Soient, par exemple, les quatre points A, B, C, D dont le rapport anharmonique peut s'écrire sous l'une des trois formes

$$\alpha = \frac{\rho_{13}}{\rho_{23}} : \frac{\rho_{14}}{\rho_{24}}, \quad \beta = \frac{\rho_{14}}{\rho_{34}} : \frac{\rho_{12}}{\rho_{32}}, \quad \gamma = \frac{\rho_{12}}{\rho_{42}} : \frac{\rho_{13}}{\rho_{43}};$$

ou, ce qui revient au même,

$$\alpha = \left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}\right) : \left(\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}\right), \quad \beta = \left(\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}}\right) : \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CB}}\right), \quad \gamma = \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{DB}}\right) : \left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{DC}}\right).$$

Si le point D s'éloigne jusqu'à l'infini, le rapport de ses distances à deux quelconques des trois autres points tend vers l'unité en valeur absolue; et comme ce point est nécessairement alors un point de section extérieure, ce rapport doit être affecté du signe —; on a, par conséquent,

$$\frac{\rho_{14}}{\rho_{24}} = -1, \quad \frac{\rho_{14}}{\rho_{34}} = -1, \quad \frac{\rho_{42}}{\rho_{43}} = -1.$$

Substituant dans les valeurs de α, β, γ, et remarquant que cette dernière revient à

$$\gamma = \frac{\rho_{12}}{\rho_{42}} : \frac{\rho_{13}}{\rho_{43}} = \frac{\rho_{12}}{\rho_{13}} : \frac{\rho_{42}}{\rho_{43}},$$

on aura à la limite, quand D sera rejeté à l'infini,

$$\alpha = -\frac{\rho_{13}}{\rho_{23}} = -\left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}\right), \beta = -\frac{\rho_{23}}{\rho_{21}} = -\left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}}\right), \gamma = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{13}} = -\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}\right).$$

Dans le cas où le rapport α serait harmonique, on aurait

$$\alpha = -1, \quad \text{d'où} \quad -\left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}\right) = -1, \quad \left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}\right) = +1.$$

On en conclut que C tombe entre A et B, et se trouve à égale distance de ces points; donc *quand le point* D *s'éloigne jusqu'à l'infini sur* BC, *son conjugué harmonique se rapproche indéfiniment du point* O, *milieu de* AB, *avec lequel il se confond à la limite.*

291. *Faisceau harmonique.* — Quand le rapport anharmonique d'un faisceau est égal à -1, on dit qu'il est harmonique. Il est clair que ce faisceau coupe alors une transversale quelconque harmoniquement.

Si un faisceau harmonique est coupé par une transversale parallèle à l'un des rayons, les trois autres rayons déterminent sur cette transversale deux segments égaux (fig. 87).

Car quand un des quatre points A, B, C, D, par exemple le point D, se transporte à l'infini, son conjugué harmonique C se trouve en γ, au milieu de AB. Donc, si la sécante EF est parallèle à SD, le point D étant à l'infini sur cette sécante, son conjugué harmonique est en C au milieu de EF; c'est-à-dire que les trois rayons SA, SC, SB déterminent sur la transversale EF, parallèle au rayon SD, deux segments égaux EC, CF.

De là on déduit la construction suivante pour trouver le point D, conjugué harmonique de C sur une droite donnée AB.

Prenons à volonté le point S hors de la droite AB et joignons SA, SB. Menons CK parallèle à SB et prenons EK = KS; joignons EC et enfin menons SD parallèle à ECF; le point D sera le point demandé. Car, d'après la construction, on a CE = CF; le point C étant le milieu de EF, son conjugué harmonique sera à l'infini sur EF; il sera donc sur la droite SD, parallèle à EF; par conséquent, le faisceau (S, ECFD) est harmonique, et coupe la transversale AB harmoniquement en C et en D.

292. *Si le rayon* $S\gamma$ *est la bissectrice de l'angle* ASB, *son conjugué harmonique* $S\delta$ *sera la bissectrice de l'angle supplémentaire, c'est-à-dire qu'il sera perpendiculaire à* $S\gamma$.

Car, si on mène la transversale AB, perpendiculaire à $S\gamma$, les deux segments $A\gamma$, $B\gamma$ seront égaux. Le conjugué harmonique de γ sera donc à l'infini sur AB, c'est-à-dire qu'il sera sur $S\delta$, parallèle à AB; ou, en d'autres termes, sur une perpendiculaire à la bissectrice $S\gamma$. Les rayons $S\gamma$, $S\delta$ bissectrices des angles compris entre SA et SB, forment donc avec ces dernières droites un faisceau harmonique.

On prouvera sans peine la réciproque; c'est-à-dire que si l'un des

rayons d'un faisceau harmonique est perpendiculaire à son conjugué, ces rayons seront les bissectrices des angles formés par les deux autres. Car si $S\delta$ est perpendiculaire à $S\gamma$ et si on mène la transversale AB parallèle à $S\delta$, les deux segments $A\gamma$ et $B\gamma$ seront égaux; et puisque, par hypothèse, $S\gamma$ est perpendiculaire à AB, les deux angles $AS\gamma$ et $BS\gamma$ seront aussi égaux.

Première remarque. — La propriété fondamentale des faisceaux harmoniques appartient aux systèmes imaginaires aussi bien qu'aux systèmes réels. Car le faisceau harmonique n'est qu'un cas particulier du faisceau anharmonique, lequel peut faire partie d'un système imaginaire.

Deuxième remarque. — Si quatre points A, B, C, D sont représentés par des équations de la forme

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad P + \mu Q = 0, \quad P - \mu Q = 0,$$

les deux derniers sont conjugués harmoniques sur la droite qui joint les deux autres, puisque le rapport anharmonique de ces points est égal à -1.

Et, de même, quand quatre droites ont pour équations

$$G = 0, \quad H = 0, \quad G + \mu H = 0, \quad G - \mu H = 0,$$

elles forment un faisceau harmonique.

293. *Quadrilatère complet.* — Nous venons de voir un moyen de construire le conjugué harmonique d'un point sur une droite. Nous indiquerons un autre moyen, très simple, fondé sur les propriétés d'une figure connue sous le nom de quadrilatère complet.

Un quadrilatère complet est formé par quatre droites qui se coupent deux à deux (fig. 88). Ce quadrilatère a quatre côtés AB, AC, PB, PR; il a six sommets A, B, C, P, Q, R et trois diagonales AP, BQ, CR. La propriété fondamentale de la figure consiste en ce que *chacune des trois diagonales est coupée harmoniquement par les deux autres.*

Afin de le démontrer, prenons ABC pour triangle de référence et soient

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

respectivement, les équations des trois côtés BC, CA, AB.

L'équation de QR, quatrième côté du quadrilatère complet, pourra alors s'écrire sous la forme (n° 243)

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0;$$

dès lors les points A et P seront représentés respectivement par les équa-

tions de AB et AC et par celles de PA et PB, considérées comme simultanées ; ces équations sont

$$A \begin{cases} \gamma = 0, \\ \beta = 0; \end{cases} \quad P \begin{cases} \alpha = 0, \\ l\alpha + m\beta + n\gamma = 0. \end{cases}$$

L'équation de la droite AP sera, par conséquent,

$$AP \ldots m\beta + n\gamma = 0;$$

car celle-ci est vérifiée par les coordonnées de A et par celles de P.

On verra ensuite que les équations des points B et Q sont

$$B \begin{cases} \alpha = 0, \\ \gamma = 0, \end{cases} \quad Q \begin{cases} \beta = 0, \\ l\alpha + m\beta + n\gamma = 0; \end{cases}$$

et qu'en conséquence on aura pour l'équation de BQ

$$BQ \ldots l\alpha + n\gamma = 0;$$

de la même manière on trouvera pour les équations de C et R

$$C \begin{cases} \beta = 0, \\ \alpha = 0, \end{cases} \quad R \begin{cases} \gamma = 0, \\ l\alpha + m\beta + n\gamma = 0; \end{cases}$$

et pour celle de CR

$$CR \ldots l\alpha + m\beta = 0.$$

Retranchons l'équation de CR de celle de BQ ; l'équation résultante sera celle d'une droite passant par le point E, intersection de BQ et CR; mais comme elle ne contiendra plus que β et γ ce sera aussi l'équation d'une droite passant par A ; partant, ce sera l'équation de AE ; on a donc pour AE

$$AE \ldots n\gamma - m\beta = 0.$$

Il résulte de là que les quatre droites AB, AC, AE, AP sont représentées respectivement par les équations

$$\gamma = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma - \frac{m}{n}\beta = 0, \quad \gamma + \frac{m}{n}\beta = 0;$$

elles forment donc un faisceau harmonique ; celui-ci coupe les transversales BQ et CR harmoniquement ; d'où l'on conclut que la diagonale BQ est divisée harmoniquement par les deux autres en E et G, et que la diagonale CR est divisée harmoniquement par les deux autres en E et F.

Enfin si l'on joint BF et si l'on considère le faisceau de quatre rayons que l'on forme ainsi au point B, on a

$$(CERF) = (B, CERF) = (PGAF);$$

mais le premier de ces trois rapports étant harmonique il en est de même des deux autres; donc la diagonale PA est aussi coupée harmoniquement par les deux autres diagonales en G et en F.

On remarquera encore que le faisceau harmonique (A, BEQG) coupe le côté BC harmoniquement en H et en P, et le côté RQ en K et en P.

De là un moyen commode pour obtenir le conjugué harmonique d'un point H sur une droite donnée BC. En effet, il suffit de prendre à volonté le point extérieur A; de joindre AB, AC, AH; puis de joindre les points B et C à un point E pris à volonté sur AH; ces droites coupent AB et AC respectivement en R et Q; enfin la droite RQ détermine sur BC le point P, conjugué harmonique de H.

On voit encore que si deux droites AB, AC (fig. 89) sont coupées par un système d'autres droites OM, OM′, OM″, ... passant par un même point O et si l'on trace les diagonales MB et NC, MN′ et M′N, M′N″ et N′M″, ... celles-ci se coupent deux à deux en des points P, P′, P″, ... situés en ligne droite. Car cette droite n'est autre que le rayon conjugué harmonique de AO dans le faisceau (A, BPCO).

294. *Systèmes homographiques.* — Soient les deux séries ponctuelles représentées par les équations

$$P + \mu Q = 0, \quad P' + \mu Q' = 0.$$

Considérons dans les deux figures deux éléments déterminés par une même valeur de μ et appelons-les *éléments correspondants*. Alors à chaque point d'une série est associé un point de l'autre et réciproquement. On dit que ces deux séries sont *homographiques* ou encore que l'une des séries est *projective* par rapport à l'autre; les points correspondants sont dits *homologues*.

De même, si deux faisceaux de rayons sont représentés par les équations

$$G + \mu H = 0, \quad G' + \mu H' = 0,$$

à chaque rayon de l'un des faisceaux on peut associer le rayon de l'autre qui correspond à la même valeur de μ; on obtient ainsi deux faisceaux homographiques, ou encore deux faisceaux en relation projective.

Un faisceau de rayons peut aussi, dans les mêmes conditions, se trouver en relation projective avec une série ponctuelle; on conçoit également que la projectivité peut se trouver établie entre plusieurs séries ou plusieurs faisceaux; et que quand deux figures sont projectives par rapport à une troisième, elles le sont aussi l'une par rapport à l'autre.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition de la projectivité :

Si deux figures sont projectives, quatre des éléments de l'une et les quatre éléments correspondants de l'autre ont le même rapport anharmonique.

Car ces rapports anharmoniques ne dépendent que des valeurs des paramètres μ qui déterminent les quatre éléments, et ces valeurs sont les mêmes pour les deux figures; il est clair que cette proposition s'applique au cas d'une série ponctuelle et d'un faisceau, aussi bien qu'à celui de deux faisceaux ou de deux séries ponctuelles.

Réciproquement, *si deux séries sont telles que les points se correspondent deux à deux de manière que le rapport anharmonique de quatre points quelconques de la première est égal à celui des quatre points correspondants de la seconde, ces deux séries sont projectives.*

En effet, $P = 0$, $Q = 0$ étant les équations de deux points de la première série et $P' = 0$, $Q' = 0$ celles des deux points correspondants de la seconde série, les équations de ces séries pourront être écrites comme il suit

$$P + \mu_1 Q = 0, \quad P + \mu_2 Q = 0, \quad P + \mu_3 Q = 0, \cdots;$$
$$P' + \mu'_1 Q' = 0, \quad P' + \mu'_2 Q' = 0, \quad P' + \mu'_3 Q' = 0, \cdots;$$

et, puisque par hypothèse le rapport anharmonique de quatre points quelconques de la première série est égal à celui des quatre points correspondants, on a

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu'_1}{\mu'_2}, \quad \frac{\mu_1}{\mu_3} = \frac{\mu'_1}{\mu'_3}, \quad \frac{\mu_1}{\mu_4} = \frac{\mu'_1}{\mu'_4}, \cdots$$

ou

$$\frac{\mu'_1}{\mu_1} = \frac{\mu'_2}{\mu_2} = \frac{\mu'_3}{\mu_3} = \frac{\mu'_4}{\mu_4} = \cdots = \lambda.$$

Donc, si l'on pose $\lambda Q' = Q''$, les équations de la deuxième série deviennent

$$P' + \mu_1 Q'' = 0, \quad P' + \mu_2 Q'' = 0, \quad P' + \mu_3 Q'' = 0, \cdots$$

ce qui démontre la proposition.

La même proposition est vraie évidemment dans le cas de deux faisceaux de rayons ou dans celui d'une série et d'un faisceau.

295. La construction des figures projectives repose sur le théorème suivant : *On peut faire correspondre trois éléments d'une figure*

(série ou faisceau) à trois éléments d'une autre figure, de telle façon qu'à chaque quatrième élément de la première corresponde un quatrième élément de la seconde, et qu'ainsi la projectivité soit établie.

On peut donner de cette proposition plusieurs démonstrations, parmi lesquelles nous choisirons la suivante :

Considérons deux séries ponctuelles sur deux droites quelconques, et sur chacune de celles-ci prenons trois points, que nous désignerons respectivement par A, B, C et A′, B′, C′. Comptons les abscisses à partir du point A pris pour origine sur la première droite et à partir du point A′ pris pour origine sur la seconde. Désignons par b et c les abscisses de B et C; par b' et c' celles de B′ et C′. Prenons à volonté un point X ayant pour abscisse x, sur la première droite ; il s'agit de prouver qu'on peut toujours déterminer sur la seconde un point X′, ayant pour abscisse x', de telle manière que les rapports anharmoniques (A, B, C, X) et (A′, B′, C′, X′) soient égaux, ce qui s'exprime par l'équation

$$\frac{c}{c-b}:\frac{x}{x-b}=\frac{c'}{c'-b'}:\frac{x'}{x'-b'};$$

or celle-ci, développée, prend la forme

$$xx'(c'b-cb')-bc(c'-b')x'+b'c'(c-b)x=0;$$

d'où l'on tire

$$x'=\frac{-b'c'(c-b)x}{(c'b-cb')x-bc(c'-b')}.$$

Cette valeur de x' ne serait constante que si l'on avait une des égalités

$$b=0,\quad c=0,\quad b'=0,\quad c'=0,\quad b=c,\quad b'=c';$$

il faudrait pour cela qu'il y eût coïncidence de deux des points A, B, C ou de deux des points A′, B′ C′, hypothèses que nous écartons; donc, à chaque valeur de x correspond une valeur unique et déterminée de x'; donc la projectivité est établie. On voit aussi que les deux séries sont identiques si trois points coïncident avec leurs correspondants, car on a alors $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$; d'où $x=x'$.

Réciproquement, *deux séries de points sur deux droites sont homographiques si à chaque point de la première série correspond dans la seconde un point déterminé par une relation de la forme*

$$Axx'+Bx+Cx'+D=0,$$

A, B, C, D *étant des constantes telles qu'on ait* $AD-BC \lesseqgtr 0$.

En effet, soient x, y, z, u les abscisses de quatre points pris à volonté

dans la première série ponctuelle, et x', y', z', u' les abscisses des points correspondants de la deuxième série, l'origine étant arbitraire sur chacune des deux droites ; pour faire voir que les deux séries sont homographiques il suffit de montrer que le rapport anharmonique des quatre premiers points est égal à celui des quatre autres, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{x-z}{y-z}:\frac{x-u}{y-u}=\frac{x'-z'}{y'-z'}:\frac{x'-u'}{y'-u'}.$$

Or, la relation qui lie les abscisses de deux points correspondants donne

$$x=-\frac{Cx'+D}{Ax'+B},\quad y=-\frac{Cy'+D}{Ay'+B},\quad z=-\frac{Cz'+D}{Az'+B},\quad u=-\frac{Cu'+D}{Au'+B};$$

et si, dans le premier rapport anharmonique écrit ci-dessus, on remplace x, y, z, u par leurs valeurs, on trouve d'abord

$$x-z=\frac{(Cz'+D)(Ax'+B)-(Cx'+D)(Az'+B)}{(Ax'+B)(Az'+B)}=\frac{(x'-z')(AD-BC)}{(Ax'+B)(Az'+B)};$$

puis

$$y-z=\frac{(y'-z')(AD-BC)}{(Ay'+B)(Az'+B)};$$

de là on conclut immédiatement

$$\frac{x-z}{y-z}=\frac{x'-z'}{y'-z'}\cdot\frac{Ay'+B}{Ax'+B}\quad\text{et}\quad\frac{x-u}{y-u}=\frac{x'-u'}{y'-u'}\cdot\frac{Ay'+B}{Ax'+B};$$

et finalement, si on divise ces dernières égalités membre à membre, on trouve celle qu'il s'agit de démontrer.

Remarque. — Dans les démonstrations ci dessus on pourrait aux abscisses substituer les coordonnées-rapports qui fixent les positions des points relativement à deux points de base. On voit aussi qu'elles s'appliqueraient à des faisceaux de rayons pourvu qu'on y remplace les abscisses des points par les paramètres μ qui fixent les positions des rayons; de sorte que les paramètres des rayons correspondants de deux faisceaux homographiques sont liés par une relation de la forme

$$A\mu\mu'+B\mu+C\mu'+D=0.$$

296. Quand un faisceau est projectif par rapport à une série ponctuelle, si chaque rayon passe par le point qui lui correspond, on dit que les figures sont en *position perspective*.

Les séries et les faisceaux qui sont projectifs peuvent toujours être mis en position perspective.

Soient a, b, c trois points d'une série; α, β, γ les rayons correspondants d'un faisceau; ce dernier peut être déplacé, sans être modifié, de manière que α passe par a, β par b et γ par c. En effet, construisons sur ab un segment capable de l'angle compris entre α et β, et sur bc un segment capable de l'angle compris entre β et γ. Si l'on prend l'intersection de ces deux segments capables pour sommet d'un faisceau, celui-ci détermine sur la droite abc une seconde série de points avec laquelle il est en position perspective et qui coïncide avec la première, puisque, dans ces deux séries projectives, les points en a, b, c coïncident; d'ailleurs, le second faisceau, d'après sa construction, peut être mis en coïncidence avec le premier à cause que les angles compris entre trois rayons du premier considérés deux à deux, sont respectivement égaux aux angles formés par les rayons correspondants du second faisceau. Donc, en mettant le premier faisceau en coïncidence avec le second il sera mis en position perspective par rapport à la série donnée.

297. *Deux séries projectives sont dites en position perspective quand les droites qui joignent deux à deux les points correspondants concourent en un même point.* — On peut toujours obtenir cette situation en déplaçant l'une des séries, sans la modifier, de telle manière qu'un de ses points a coïncide avec le point a', qui lui correspond dans l'autre série (fig. 90); car si l'on joint alors deux points b, c de la première série ainsi placée aux points correspondants b', c' de l'autre, puis le point de rencontre i des droites bb', cc' au point commun a des deux séries, on obtiendra un faisceau ai, bi, ci, ... lequel sera projectif par rapport à chacune des séries a, b, c, ... et a', b', c', ... ; mais chacune de ces deux séries a trois points communs avec l'une des séries données et par conséquent coïncide avec elle. Donc aussi les deux séries proposées sont mises en position perspective. Le sommet i du faisceau est appelé *centre de perspective.*

298. *Deux faisceaux projectifs sont dits perspectifs quand les rayons correspondants se coupent deux à deux sur une même droite.* — On peut toujours obtenir cette position en déplaçant l'un des faisceaux, sans le modifier, de manière à faire coïncider un de ses rayons $S'a$ (fig. 91) avec son correspondant Sa dans l'autre faisceau. En effet, si l'on joint les points b et c où deux rayons $S'b$, $S'c$ du premier faisceau sont respectivement coupés par les rayons correspondants Sb, Sc du second, cette transversale bc coupera le rayon commun en un point a,

lequel détermine avec b et c une série qui sera projective par rapport à chacun des deux faisceaux S, abc... et S', abc .. Si l'on considère dans le premier faisceau un quatrième rayon S'd, coupant en d la transversale, le rapport anharmonique (S', $abcd$) est égal au rapport ($abcd$); mais si on joint Sd, on a aussi (S, $abcd$) $=$ ($abcd$); donc (S', $abcd$) $=$ S ($abcd$); le rayon Sd est donc celui qui correspond à S'd dans les deux faisceaux homographiques. Donc, deux rayons correspondants se coupent sur ac, et les deux faisceaux sont perspectifs.

La droite ab est appelée *axe de perspective*.

299. *Détermination des points qui correspondent à l'infini dans deux séries homographiques.* — Deux points correspondants sont déterminés par la relation

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0.$$

Supposons que le point de la première série s'éloigne jusqu'à l'infini et soit I' l'abscisse du point correspondant de la seconde; l'équation ci-dessus devra donner $x' = I'$ pour $x = \infty$; de même, si l'on représente par I l'abscise du point de la première série qui correspond à l'infini de la seconde, on aura $x = I$, pour $x' = \infty$; il résulte de là $AI' + B = 0$ et $AI + C = 0$; l'équation qui lie deux points correspondants peut donc s'écrire

$$A(xx' - I'x - Ix') + D = 0.$$

300. *Points doubles de deux séries homographiques formées sur une même droite.* — Quand deux séries homographiques sont placées sur une même droite il existe deux points, réels ou imaginaires, tels que chacun, considéré comme appartenant à la première série, coïncide avec son correspondant dans la seconde.

En effet, on peut dans ce cas compter à partir d'une origine commune les abscisses des deux séries; et pour qu'un point quelconque de la première série coïncide avec son homologue pris dans la seconde série, on doit avoir $x = x'$, d'où l'équation

$$Ax^2 + (B + C)x + D = 0.$$

Les deux valeurs de x tirées de cette équation seront les abscisses des deux points réels ou imaginaires où se produit la coïncidence de deux points homologues. Ces points remarquables portent le nom de points *doubles*.

Le milieu de l'intervalle entre les points doubles coïncide avec le milieu de l'intervalle des deux points qui correspondent à l'infini.

En effet, l'abscisse du milieu de l'intervalle entre les points doubles est la demi-somme des abscisses de ces points, soit la demi-somme des racines de l'équation du second degré qui les détermine ; elle est donc égale à $-\frac{B+C}{2A}$.

L'abscisse du milieu de l'intervalle entre les deux points qui correspondent à l'infini est, d'autre part, $\frac{1}{2}(I+I')$.

Mais on a

$$\frac{1}{2}(I+I') = -\frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}+\frac{C}{A}\right),$$

égalité qui démontre la proposition énoncée.

Dans le cas particulier où

$$(B+C)^2 - 4AD = 0$$

les deux points doubles coïncident avec le milieu de l'intervalle des deux points I et I′ qui correspondent à l'infini.

301. *Dans deux divisions homographiques, placées sur une même droite, deux points homologues quelconques font avec les deux points doubles un rapport anharmonique constant.* — En effet, si l'on prend quatre points a, b, c, d appartenant à la première série ponctuelle, et les quatre points homologues a', b', c', d' de la seconde série, on obtiendra deux rapports anharmoniques égaux $(abcd) = (a'b'c'd')$.

Si l'on regarde a et b comme les deux points doubles, ils coïncideront avec a' et b', et on aura, par conséquent, $(abcd) = (abc'd')$. Cette dernière égalité peut s'écrire $(abcc') = (abdd')$ et démontre la proposition, puisqu'elle prouve que deux points homologues quelconques d et d' font avec les points doubles a et b un rapport anharmonique constant, égal à $(abcc')$.

302. *Rayons doubles de deux faisceaux homographiques qui ont le même centre.* — Quand deux faisceaux homographiques ont le même centre il existe deux rayons doubles réels ou imaginaires.

En effet, si l'on mène une transversale quelconque, les deux faisceaux déterminent sur celle-ci deux séries ponctuelles homographiques qui auront deux points doubles; et les rayons qui passent par ces points seront évidemment des rayons doubles des deux faisceaux.

Deux rayons homologues de ces faisceaux font avec les deux rayons doubles un rapport anharmonique constant. Car les points homologues où ils rencontrent une transversale quelconque forment avec les points doubles situés sur cette transversale un rapport anharmonique constant.

303. Involution. — *Un système de points en involution se compose de deux séries ponctuelles homographiques, situées sur une même droite et telles que chaque point, considéré comme appartenant à l'une ou à l'autre série, correspond toujours au même point.*

Mais pour que cette définition puisse être admise il faut prouver que deux séries homographiques peuvent satisfaire à cette condition, et il faut faire voir comment celle-ci peut être réalisée.

A cet effet, remarquons que si les deux séries situées sur la même droite sont déterminées par la relation

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0,$$

à chaque point X de la première série, il correspond un point X′ de la seconde; si l'on considère ensuite X′ comme un point de la première série, on ne retrouvera pas, en général, le point X comme point correspondant de la seconde, parce qu'en remplaçant x par x' dans l'équation ci-dessus, l'expression de x' ne se change pas en celle de x; mais si on a $B = C$ l'équation est symétrique par rapport à x et x', et si l'on change x en x', x' devra être remplacé par x, c'est-à-dire que les deux points X et X′ se correspondent toujours quand on considère successivement l'un des deux comme appartenant à la première série ou à la seconde. On exprime cette circonstance en disant qu'il y a réversibilité pour les points X et X′. L'involution est donc exprimée par l'équation

$$Axx' + B(x + x') + D = 0,$$

dans laquelle x et x' sont les abscisses de deux points conjugués.

Il résulte évidemment de cette définition que *dans un système de points en involution le rapport anharmonique de quatre points quelconques est égal à celui des quatre points conjugués.* — On voit facilement aussi que quand la réversibilité existe pour deux points homologues quelconques, autres que les points doubles des deux systèmes homographiques, elle existe pour tous les autres points conjugués considérés deux à deux; en effet, si on désigne par x et x' les abscisses des deux points pour lesquels il y a réversibilité, on aura les relations

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0 \quad \text{et} \quad Ax'x + Bx' + Cx + D = 0;$$

et en retranchant ces égalités membre à membre

$$(B - C)(x - x') = 0.$$

Or, le point X n'étant pas un point double, on a $x \lessgtr x'$ et, par conséquent, $B = C$; on en conclut que si dans deux séries ponctuelles homo-

graphiques situées sur une même droite, il existe deux points qui se correspondent, soit que l'on considère l'un d'eux comme appartenant à la première ou à la seconde série, il en est de même pour tous les autres points homologues considérés deux à deux, et que ces deux séries sont en involution.

304. *Diverses relations qui expriment l'involution de six points.* — Considérons six points A et A′, B et B′, C et C′, conjugués deux à deux dans un système en involution. Chacun de ces points peut, d'après la définition de l'involution, être considéré, à volonté, comme faisant partie d'une première série ponctuelle ou d'une seconde série homographique à la première. Si l'on prend quatre points considérés comme appartenant à la première série, leur rapport anharmonique sera égal à celui des quatre conjugués; et en exprimant de toutes les manières possibles l'égalité de ces rapports anharmoniques, on obtiendra diverses relations qui devront toutes être vérifiées dans un système de six points en involution.

Ces relations sont au nombre de sept. En effet, en prenant de toutes les manières possibles quatre des six points et les quatre conjugués, et en excluant les combinaisons dans lesquelles il n'entre que deux points et leurs conjugués, lesquelles ne donnent lieu qu'à des identités, il reste les six combinaisons suivantes :

1° A, B, C, A′ et A′, B′, C′, A,	4° A, B, A′, C′ et A′, B′, A, C,
2° A, B, C, B′ » A′, B′, C′, B,	5° A, B, B′, C′ » A′, B′, B, C,
3° A, B, C, C′ » A′, B′, C′, C.	6° A, C, B′, C′ » A′, C′, B, C.

Dans chacune de ces combinaisons on peut exprimer par trois équations différentes que le rapport anharmonique des quatre premiers points est égal à celui des quatre autres. Cela donne dix-huit relations; mais onze d'entre elles rentrent dans les sept autres qui sont les suivantes :

$$(1)\qquad \left(\frac{AC}{A'C}\right):\left(\frac{AB}{A'B}\right)=\left(\frac{A'C'}{AC'}\right):\left(\frac{A'B'}{AB'}\right),$$

$$(2)\qquad \left(\frac{BA}{B'A}\right):\left(\frac{BC}{B'C}\right)=\left(\frac{B'A'}{BA'}\right):\left(\frac{B'C'}{BC'}\right),$$

$$(3)\qquad \left(\frac{CB}{C'B}\right):\left(\frac{CA}{C'A}\right)=\left(\frac{C'B'}{CB'}\right):\left(\frac{C'A'}{CA'}\right),$$

$$(4)\qquad AB.CA'.B'C'=-A'B'.C'A.BC,$$

$$(5)\qquad BC.AB'.C'A'=-B'C'.A'B.CA,$$

$$(6)\qquad CA.BC'.A'B'=-C'A'.B'C.AB,$$

$$(7)\qquad AB'.CA'.BC'=-A'B.C'A.B'C.$$

Voici quelques remarques à l'aide desquelles il est facile de retrouver ces relations.

Dans toutes ces équations le second membre se déduit du premier en remplaçant chaque point par son conjugué.

Le premier membre de l'équation (1) s'obtient en prenant A et A' comme points de base pour former le rapport anharmonique des points A, A', B, C. Les relations (2) et (3) se tirent de (1) par permutations tournantes.

Le premier membre de la relation (4) s'obtient en écrivant deux fois de suite les lettres A, B, C et en accentuant les trois dernières. Les relations (5) et (6) se déduisent de (4) par permutations circulaires. Enfin l'équation (7) s'obtient en écrivant les lettres dans le même ordre que dans les trois précédentes, mais en alternant les lettres accentuées et non accentuées. En ce qui concerne le signe — qui affecte le second membre des quatre dernières équations, il rappelle que chacune de celles-ci provient d'une égalité entre deux rapports anharmoniques, dans laquelle un facteur commun aux deux membres a été supprimé. Les facteurs doivent y être considérés comme renfermant implicitement un signe; et cela de telle façon que l'on ait, par exemple, $AB = -BA$.

Si l'on veut alors rétablir l'une de ces équations sous la forme d'une égalité entre deux rapports anharmoniques, on devra en diviser les deux membres par un des facteurs AA', BB' ou CC'. Prenons pour exemple l'équation (5); on peut écrire successivement

$$\frac{BC \cdot AB' \cdot C'A'}{AA'} = -\frac{B'C' \cdot A'B \cdot CA}{AA'},$$

$$\frac{CB \cdot AB' \cdot C'A'}{AA'} = \frac{C'B' \cdot A'B \cdot CA}{A'A},$$

$$\frac{C'A'}{AA'} : \frac{C'B'}{AB'} = \frac{CA}{A'A} : \frac{CB}{A'B}.$$

Réciproquement, *si l'une des sept relations établies plus haut existe, les six points sont en involution.*

Car alors le rapport anharmonique de quatre des six points est égal à celui des quatre conjugués; de sorte que ces deux systèmes de quatre points sont homographiques; et comme deux de ces points se correspondent, soit que l'on considère l'un d'eux comme appartenant au premier système ou au second, ces points sont en involution.

Il résulte de là que l'une quelconque des sept relations qui existent dans une involution entraîne toujours les six autres comme conséquences.

Il est aussi à observer que *les relations* (4), (5), (6), (7) *expriment que les six points en involution divisent la droite sur laquelle ils sont placés de telle façon que si l'on prend trois segments qui n'ont pas d'extrémité commune, leur produit est égal à celui des trois segments dont les extrémités sont les points conjugués des extrémités des trois premiers segments.*

Car, si l'on forme toutes les combinaisons de trois segments qui n'ont pas d'extrémité commune, on trouve que pour quelques-unes d'entre elles l'application du théorème énoncé ci-dessus conduit à une identité. Les autres combinaisons se réduisent à quatre, auxquelles correspondent les quatre relations dont il s'agit.

305. *Centre d'involution.* — La relation

$$Axx' + B(x + x') + D = 0,$$

qui lie deux points correspondants d'un système en involution, peut être simplifiée par un déplacement de l'origine. En effet, on peut poser

$$x = y + \alpha, \quad x' = y' + \alpha,$$

y et y' étant les abscisses de deux points conjugués comptées à partir d'une nouvelle origine qui, rapportée à l'origine primitive, aurait pour abscisse α. Si l'on pose

$$A\alpha + B = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = -\frac{B}{A},$$

il vient

$$yy' = \frac{B^2 - AD}{A^2} = \pm k^2.$$

L'origine ainsi déterminée est appelée *centre d'involution.* Le produit des abscisses de deux points conjugués comptées à partir du centre d'involution est donc égal à une constante. Suivant que cette constante est positive ou négative, deux points conjugués tombent du même côté du centre, ou de part et d'autre de celui-ci. Le point conjugué du centre est à l'infini ; car si $y = 0$, on a $y' = \infty$.

306. *Si sur deux segments* AA′, BB′ (fig. 92), *formés par des points conjugués dans une involution, on décrit deux circonférences de cercle quelconques, leur corde commune (ou axe radical) passe par le point central* O. — En effet, soit D un des points d'intersection des deux cercles, et joignons OD; appelons δ et δ' les points où cette droite coupe les deux

cercles respectivement une seconde fois. On aura, en vertu d'un théorème de géométrie élémentaire

$$OA . OA' = OD . O\delta \quad \text{et} \quad OB . OB' = OD . O\delta'.$$

Or, à cause que les points A, A' et B, B' sont conjugués, on a aussi

$$OA . OA' = OB . OB' = k^2 ; \quad \text{d'où} \quad O\delta = O\delta'.$$

De là on conclut que les points δ et δ' coïncident en D'.

On voit aussi que si l'on fait passer par le point D une circonférence décrite sur tout autre segment CC' formé par deux points conjugués, cette circonférence passera également en D'.

Quand les deux cercles sont décrits sur AA' et BB' comme diamètres, leur axe radical DD' est la perpendiculaire élevée sur AA' par le centre d'involution O ; et, par conséquent, il reste le même quels que soient les deux points conjugués B et B' ; d'où l'on conclut que *les circonférences décrites sur trois segments en involution comme diamètres ont même axe radical, c'est-à-dire qu'ils passent par deux mêmes points, réels ou imaginaires.*

Les droites qui joignent un de ces points d'intersection aux deux extrémités d'un même segment forment un angle inscrit dans un demi-cercle. Donc *dans une involution il existe deux points, réels ou imaginaires, de chacun desquels on voit sous des angles droits les segments compris entre deux points conjugués.*

La réciproque de cette proposition est vraie ; c'est-à-dire que *si un angle droit tourne autour de son sommet les segments qu'il intercepte sur une droite fixe, déterminent un système de points en involution.*

307. *Foyers ou points doubles.* — Dans un système en involution deux points conjugués sont liés par la relation $yy' = \pm k^2$. Si l'on fait $y = y'$, les deux points conjugués coïncident ; on obtient ainsi ce qu'on nomme *les points doubles ou foyers du système.* Quand deux points conjugués tombent du même côté du centre, en faisant $y = y'$ on trouve pour les abscisses des foyers $y = \pm k$. Il y a donc alors deux foyers réels situés à la distance k de part et d'autre du centre. Si, au contraire, deux points conjugués sont séparés par le centre d'involution, les deux foyers ont pour abscisses $y = \pm k\sqrt{-1}$; ils sont donc alors imaginaires.

Deux points conjugués divisent harmoniquement la distance des foyers. C'est ce qui résulte immédiatement de la relation $yy' = k^2$.

De là on déduit encore cette conséquence que *les points doubles de*

l'involution à laquelle appartiennent les points conjugués a, a' et b, b' forment une involution de six points avec les deux couples a, b' et a', b.

Car les points doubles d, d' divisent harmoniquement chacun des deux segments aa', bb'; on a donc les égalités :

$$\left(\frac{da}{d'a}\right):\left(\frac{da'}{d'a'}\right)=-1,\quad \left(\frac{d'b'}{db'}\right):\left(\frac{d'b}{db}\right)=-1,$$

et par conséquent aussi

$$\left(\frac{da}{d'a}\right):\left(\frac{da'}{d'a'}\right)=\left(\frac{d'b'}{db'}\right):\left(\frac{d'b}{db}\right).$$

Cette égalité de deux rapports anharmoniques montre que les quatre points d, d', a, a' correspondent respectivement à d', d, b', b dans deux séries homographiques; et comme le point d correspond toujours au point d', soit qu'il appartienne à la première où à la deuxième série, on voit que les points d, d'; a, b' et a', b sont conjugués deux à deux dans une involution.

308. *Deux couples de points suffisent pour déterminer une involution.* — Car, imaginons que l'on ait pris arbitrairement sur une droite deux couples de points A, A′ et B, B′. Si l'on considère les points A, B et A′ comme appartenant à une première série ponctuelle, on peut former une série homographique en prenant arbitrairement trois points sur cette droite et en les faisant correspondre aux trois premiers; or, pour obtenir un système en involution il suffit de faire correspondre les points A, B, A′ aux points A′, B′, A respectivement; et cette condition permet de déterminer la relation qui doit lier un point quelconque X à son conjugué.

On peut démontrer la même proposition en prouvant que les deux couples de points donnés suffisent pour déterminer le centre d'involution et les foyers; car, en désignant par x l'abscisse du point A, le centre étant pris pour origine; par b, a' et b' les abscisses des points B, A′ et B′ comptées à partir de A; enfin par $\pm k^2$ le carré de la distance du centre au foyer, on aura pour déterminer x et k les relations

$$x(x+a')=(x+b)(x+b')=\pm k^2;$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{bb'}{a'-b-b'}.$$

Cette valeur de x est finie, à moins que l'on n'ait $a' - b - b' = 0$ ou $b = a' - b'$; c'est-à-dire à moins que deux points conjugués, B et B' par exemple, ne tombent entre les deux autres A et A' et que les distances AB et B'A' ne soient en outre égales.

Dans ce dernier cas le centre se transporte à l'infini. Il en est alors de même de l'un des foyers et deux points conjugués quelconques sont à égale distance de l'autre foyer.

309. *Deux droites divisées homographiquement peuvent toujours être placées l'une sur l'autre de manière que les deux divisions soient en involution.* — Car, supposons qu'on ait placé les deux divisions sur une même droite et désignons par x et x' les abscisses de deux points homologues, comptées à partir d'une même origine. Ces abscisses seront liées par une relation de la forme

$$\mathrm{A}xx' + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x' + \mathrm{D} = 0.$$

Mais on peut déplacer la seconde division, de manière à faire croître toutes ses abscisses d'une même quantité a, tout en laissant la première division immobile. Il faudra pour cela, dans la relation ci-dessus, remplacer x' par $x' + a$ et on aura

$$\mathrm{A}xx' + (\mathrm{A}a + \mathrm{B})\,x + \mathrm{C}x' + \mathrm{C}a + \mathrm{D} = 0.$$

Pour que les deux divisions soient en involution il suffira donc de faire

$$\mathrm{A}a + \mathrm{B} = \mathrm{C} \quad \text{ou} \quad a = \frac{\mathrm{C} - \mathrm{B}}{\mathrm{A}}.$$

Il résulte de là que les relations qui existent dans un système en involution ne proviennent que de la manière particulière dont on place l'une sur l'autre deux droites qui présentent des divisions homographiques.

310. *Étant donnés trois couples de points représentés par les trois équations*

$$x^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B} = 0, \quad x^2 + \mathrm{A}'x + \mathrm{B}' = 0,$$
$$x^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B} + \lambda\,(x^2 + \mathrm{A}'x + \mathrm{B}') = 0,$$

ces points sont conjugués deux à deux dans un système en involution.

En effet, désignons les racines de ces équations respectivement par x_1, x'_1 ; x_2, x_2 ; x_3, x_3 ; nous aurons les identités

$$x^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B} = (x - x_1)(x - x_1),$$
$$x^2 + \mathrm{A}'x + \mathrm{B}' = (x - x_2)(x - x_2).$$

L'équation qui détermine les abscisses x_3, x'_3 devient donc

$$(x-x_1)(x-x'_1)+\lambda(x-x_2)(x-x'_2)=0\ ;$$

et, par conséquent, x_3 et x'_3 devant vérifier cette dernière équation, on a identiquement

$$(x_3-x_1)(x_3-x'_1)=-\lambda(x_3-x_2)(x_3-x'_2)$$
$$(x'_3-x_1)(x'_3-x'_1)=-\lambda(x'_3-x_2)(x'_3-x'_2)$$

ou, en divisant membre à membre,

$$\frac{x_3-x_1}{x'_3-x_1}:\frac{x_3-x_2}{x'_3-x_2}=\frac{x'_3-x'_1}{x_3-x'_1}:\frac{x'_3-x'_2}{x_3-x'_2}.$$

Cette équation montre que les rapports anharmoniques $(X_3X'_3X_1X_2)$ et $(X'_3X_3X'_1X'_2)$ sont égaux; c'est-à-dire que les points X_3, X'_3, X_1, X_2 et X'_3, X_3, X'_1, X'_2, forment deux séries homographiques; et comme le point X_3 correspond au point X'_3, soit qu'on le considère comme appartenant à la première ou à la seconde série, les six points sont en involution.

311. *Faisceau de six droites en involution.* — Un faisceau de six droites, conjuguées deux à deux, est dit en involution quand le rapport anharmonique de quatre de ces droites est égal à celui des quatre droites conjuguées.

Il est clair, d'après cette définition, que ce faisceau est coupé par une transversale quelconque en six points en involution. Aux points doubles de l'involution obtenue sur la transversale correspondent dans le faisceau deux rayons doubles, réels ou imaginaires, qui forment avec deux rayons conjugués quelconques, un faisceau harmonique. Mais au point central de l'involution des six points il ne correspond aucun rayon remarquable. Le point conjugué du point central est à l'infini et le rayon qui lui correspond est parallèle à la transversale, laquelle est arbitraire; ce rayon du faisceau n'offre donc rien de particulier.

312. *Quand, dans un faisceau en involution, deux rayons sont respectivement perpendiculaires à leurs conjugués, il en est de même de tout autre rayon.* — Nous ferons d'abord remarquer que deux couples de rayons partant d'un même point et conjugués deux à deux suffisent évidemment pour déterminer deux faisceaux homographiques en involution; de telle façon qu'une droite quelconque passant par le centre O des faisceaux peut être considérée comme appartenant au premier

faisceau ou au second, et correspond toujours au même rayon dans ces deux faisceaux. Supposons qu'une transversale coupe les quatre premiers rayons en des points conjugués deux à deux A, A′ et B, B′. Les rayons OA et OA′ étant rectangulaires, une circonférence décrite sur AA′ comme diamètre passe par O; pour un motif semblable une circonférence décrite sur BB′ comme diamètre passe par ce même point O. Il en résulte que si l'on considère deux autres rayons conjugués OC et OC′, la circonférence décrite sur le segment CC′ comme diamètre passe par ce même point O (n° 306); donc les rayons OC et OC′ sont rectangulaires. Dans un faisceau de ce genre tous les rayons conjugués sont donc perpendiculaires deux à deux.

313. *En général dans deux faisceaux en involution il existe un système de deux rayons conjugués rectangulaires et il n'en existe qu'un seul.* — En effet, si une transversale quelconque coupe ces faisceaux aux points A, A′; B, B′; C, C′ ... conjugués deux à deux, les circonférences décrites sur AA′, BB′, CC′, ... comme diamètres passent toutes par deux mêmes points, réels ou imaginaires (n° 306); et l'on peut faire passer par ces deux points et par le centre des faisceaux donnés une circonférence qui coupera la transversale en deux points conjugués. En joignant le centre du faisceau à ces deux points, qui sont aux extrémités d'un diamètre, on aura deux rayons conjugués qui seront à angle droit. Le théorème est donc démontré.

Quand le centre des deux faisceaux est l'un des points communs aux diverses circonférences décrites sur AA′, BB′, ..., on se trouve dans le cas particulier du n° 312 où tous les rayons sont respectivement perpendiculaires à leurs conjugués.

314. *Deux faisceaux homographiques quelconques peuvent toujours être placés de manière à former deux faisceaux en involution.* — Cette proposition est analogue à la proposition démontrée au N° 309 pour deux divisions homographiques.

Pour en donner une démonstration, remarquons que l'on peut toujours placer le second faisceau de manière que son centre coïncide avec celui du premier, et mettre sous la forme

$$G + \mu H = 0 \quad \text{et} \quad G + \mu' H = 0,$$

les équations de deux rayons homologues des deux faisceaux. On peut aussi supposer les rayons de base perpendiculaires entre eux et dès lors

μ et μ' ne diffèrent que par un facteur constant des tangentes trigonométriques des angles α et α' que les deux rayons correspondants font avec le rayon de base G (n° 247); en outre, ainsi qu'on l'a vu par la remarque du n° 295, les deux paramètres μ et μ' et par conséquent aussi tg α et tg α' sont alors liés par une équation de condition de la forme

$$\mathrm{A}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha' + \mathrm{B}\,\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{C}\,\mathrm{tg}\,\alpha' + \mathrm{D} = 0.$$

En général on a $\mathrm{B} \gtrless \mathrm{C}$ et un rayon, considéré alternativement comme appartenant au premier ou au second faisceau, ne correspond pas au même rayon ; mais il n'en est plus de même quand $\mathrm{B} = \mathrm{C}$, puisque alors si l'on change α en α', α' prend la valeur α ; par conséquent, pour que les deux faisceaux soient en involution il faut et il suffit que l'on ait $\mathrm{B} = \mathrm{C}$.

Cela posé, faisons tourner tous les rayons du second faisceau d'un angle x, à déterminer de manière à remplir cette condition. Il faudra pour cela remplacer α' par $\alpha' + x$, et l'on aura successivement

$$\mathrm{A}\,\mathrm{tg}\,\alpha \frac{\mathrm{tg}\,\alpha' + \mathrm{tg}\,x}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha'\,\mathrm{tg}\,x} + \mathrm{B}\,\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{C}\frac{\mathrm{tg}\,\alpha' + \mathrm{tg}\,x}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha'\,\mathrm{tg}\,x} + \mathrm{D} = 0,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha'(\mathrm{A} - \mathrm{B}\,\mathrm{tg}\,x) + \mathrm{tg}\,\alpha\,(\mathrm{A}\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{B}) + \mathrm{tg}\,\alpha'(\mathrm{C} - \mathrm{D}\,\mathrm{tg}\,x)$$
$$+ \mathrm{D} + \mathrm{C}\,\mathrm{tg}\,x = 0;$$

en égalant les coefficients de tg α et tg α' on trouve

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\mathrm{C} - \mathrm{B}}{\mathrm{A} + \mathrm{D}}.$$

Donc, si on fait tourner tous les rayons du second faisceau de l'angle x, ainsi déterminé, les deux faisceaux seront en involution.

Il est clair que, les deux faisceaux homographiques pouvant être placés de manière que leurs rayons tournent dans le même sens ou en sens inverse, ils peuvent aussi former de deux manières une involution, dans l'une desquelles les rayons doubles sont réels, tandis que dans l'autre ils sont imaginaires.

Les relations qui existent entre deux faisceaux en involution ne résultent donc que de la manière particulière dont on place l'un par rapport à l'autre deux faisceaux homographiques ayant un centre commun. Il résulte aussi de là, et de la proposition démontrée au n° 313, que *quand deux faisceaux sont homographiques il existe toujours dans l'un deux rayons rectangulaires dont les homologues dans l'autre sont aussi rectangulaires et qu'il n'existe qu'un seul système de deux rayons de ce genre, sauf dans le cas particulier où il y en a une infinité.*

§ 4. Théorie des pôles et polaires. — Figures polaires réciproques.

315. *Équation générale d'une conique en coordonnées ponctuelles et en coordonnées tangentielles.* — L'équation générale d'une conique, en coordonnées homogènes ponctuelles, est de la forme

$$(1) \qquad \varphi(X_1, X_2, X_3) \equiv a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{23}X_2X_3 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{12}X_1X_2 = 0.$$

Pour obtenir l'équation de cette courbe en coordonnées tangentielles, remarquons que la tangente au point x_1, x_2, x_3 a pour équation (nº 274),

$$(2) \qquad X_1\varphi'(x_1) + X_2\varphi'(x_2) + X_3\varphi'(x_3) = 0$$

et que les coordonnées de cette droite sont, par conséquent,

$$(3) \qquad \begin{cases} \lambda u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \equiv \frac{1}{2}\varphi'(x_1), \\ \lambda u_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \equiv \frac{1}{2}\varphi'(x_2), \\ \lambda u_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \equiv \frac{1}{2}\varphi'(x_3); \end{cases}$$

les coordonnées x_1, x_2, x_3 doivent, d'ailleurs, satisfaire à l'équation de la courbe, c'est-à-dire qu'on a la condition $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$. Cette dernière relation étant homogène, peut s'écrire

$$x_1\varphi'(x_1) + x_2\varphi'(x_2) + x_3\varphi'(x_3) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4) \qquad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

Si entre les équations (3) et (4) on élimine x_1, x_2, x_3, on trouvera la relation qui existe entre les coordonnées u_1, u_2, u_3 d'une tangente quelconque à la courbe. Si ensuite on y regarde u_1, u_2, u_3 comme variables, ce sera l'équation en coordonnées tangentielles que nous cherchons; remplaçons u_1, u_2, u_3 par U_1, U_2, U_3 pour indiquer que ce sont des variables et nous obtiendrons, en posant $a_{ik} = a_{ki}$,

$$\psi(U_1\ U_2, U_3) \equiv \begin{vmatrix} U_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ U_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ U_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & U_1 & U_2 & U_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Développons ce déterminant, en faisant usage des notations précédemment admises pour les mineurs, nous aurons

$$(5) \qquad \psi(U_1, U_2, U_3) \equiv A_{11}U_1^2 + A_{22}U_2^2 + A_{33}U_3^2 + 2A_{12}U_1U_2 + 2A_{23}U_2U_3 + 2A_{31}U_3U_1 = 0.$$

On observera que les coordonnées de la tangente sont liées à celles du point de contact par les équations (3), lesquelles, étant résolues par rapport à x_1, x_2, x_3, nous donnent

$$(6)\quad \begin{cases} \rho x_1 = A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 \equiv \frac{1}{2}\psi'(u_1), \\ \rho x_2 = A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 \equiv \frac{1}{2}\psi'(u_2), \\ \rho x_3 = A_{13}u_1 + A_{23}u_2 + A_{33}u_3 \equiv \frac{1}{2}\psi'(u_3). \end{cases}$$

316. *Polaire.* — Admettons maintenant qu'on veuille mener les tangentes à la courbe par un point donné x'_1, x'_2, x'_3, et désignons par x_1, x_2, x_3 les coordonnées inconnues d'un des points de contact. L'équation de la tangente en ce point, qui n'est autre que l'équation (2), devra être vérifiée par les coordonnées x'_1, x'_2, x'_3 ; on aura donc

$$(7)\quad x'_1\,\varphi'(x_1) + x'_2\,\varphi'(x_2) + x'_3\,\varphi'(x_3) = 0\,;$$

en outre, le point x_1, x_2, x_3 appartenant à la courbe, on a

$$(8)\quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Les équations (7) et (8), sont homogènes par rapport aux inconnues x_1, x_2, x_3 ; et comme l'une est du premier degré et l'autre du second, elles fourniront pour les rapports de x_1, x_2, x_3 deux systèmes de valeurs réelles ou imaginaires conjuguées, qui détermineront les tangentes passant par le point donné.

Mais si au lieu de considérer x_1, x_2, x_3 comme des constantes inconnues nous les regardons comme variables, les équations (7) et (8) représenteront deux lieux géométriques contenant les points de contact; l'un de ces lieux est la conique proposée ; et l'autre représenté par l'équation (7) qui est du premier degré, est évidemment une droite ; par conséquent, si on remplace x_1, x_2, x_3 par X_1, X_2, X_3 pour marquer qu'on les suppose variables, on aura l'équation

$$(9)\quad x'_1\varphi'(X_1) + x'_2\varphi'(X_2) + x'_3\varphi'(X_3) = 0,$$

laquelle sera celle de la corde joignant les points de contact des deux tangentes menées à la courbe par le point x'_1, x'_2, x'_3.

Que les deux tangentes soient réelles ou imaginaires, la droite qui joint leurs points de contact est donc toujours réelle ; on l'appelle la *polaire* du point x'_1 x'_2, x'_3, et ce point lui-même est appelé le *pôle* de la droite.

317. En remplaçant les trois dérivées par leurs valeurs dans l'équation (9) on reconnaîtra immédiatement que celle-ci contient symé-

triquement les constantes x'_1, x'_2, x'_3 et les variables X_1, X_2, X_3; de sorte qu'on peut aussi la mettre sous la forme

$$X_1\,\varphi'(x'_1) + X_2\,\varphi'(x'_2) + X_3\,\varphi'(x'_3) = 0.$$

Cette remarque est très importante; il en résulte, en effet, que *si la polaire du point x'_1, x'_2, x'_3 passe par un point x''_1, x''_2, x''_3, réciproquement la polaire de ce dernier point passe par le premier*. Car la condition est la même dans les deux cas, puisqu'elle revient à

$$x''_1\varphi'(x'_1) + x''_2\varphi'(x'_2) + x''_3\varphi'(x'_3) = 0,$$

ou

$$x'_1\varphi'(x''_1) + x'_2\varphi'(x''_2) + x'_3\varphi'(x''_3) = 0.$$

On peut encore observer que l'équation de la polaire a la même forme que l'équation de la tangente et que, par conséquent, *si le pôle x'_1, x'_2, x'_3 est un point de la courbe, sa polaire n'est autre chose que la tangente en ce point.*

On verra d'ailleurs facilement qu'*un pôle ne peut se trouver sur sa polaire que s'il est un point de la courbe;* car les coordonnées x'_1, x'_2, x'_3 devant alors vérifier l'équation (9), on a la condition

$$x'_1\varphi'(x'_1) + x'_2\varphi'(x'_2) + x'_3\varphi'(x'_3) = 0,$$

qui exprime que ces coordonnées satisfont à l'équation de la courbe.

318. *A toute droite, considérée comme polaire, il correspond un pôle.* — Car si on prend sur cette droite deux points quelconques P et Q (fig. 93), ayant respectivement pour polaires les droites AB et AC, qui se coupent en A, ce point A sera le pôle de PQ; et, en effet, ce point se trouvant à la fois sur AB et sur AC, sa polaire devra passer par les pôles de ces droites, P et Q.

Ce raisonnement n'est en défaut que quand les droites AB et AC sont parallèles ou quand l'une d'elles est rejetée à l'infini. Le pôle est alors aussi à l'infini ; c'est un cas particulier sur lequel nous devrons revenir (voir nos 321 et 322).

319. Les théorèmes suivants sont des conséquences immédiates des propositions qui viennent d'être établies :

Si un point glisse sur une droite fixe, sa polaire tourne autour d'un point fixe.

Car ce point, par lequel passent toutes les positions de la polaire n'est autre chose que le pôle de la droite fixe sur laquelle glisse le point mobile; et, pour une raison semblable.

Si une droite tourne autour d'un point fixe, le pôle de cette droite glisse sur une droite fixe.

320. *La polaire est le lieu des points conjugués harmoniques du pôle sur les cordes qui passent par ce dernier point.* — En effet, soient x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées du pôle P (fig. 94), x''_1, x''_2, x''_3 celles de son conjugué harmonique Q sur l'une des cordes que l'on considère. Ces deux points étant pris pour points de base, tout autre point de la droite qui les joint aura pour coordonnées, en désignant par ρ le facteur de proportionnalité et par μ un paramètre convenable,

$$\rho x_1 = x'_1 + \mu x''_1, \quad \rho x_2 = x'_2 + \mu x''_2, \quad \rho x_3 = x'_3 + \mu x''_3.$$

Pour obtenir les points de rencontre de cette droite et de la conique, il faudra remplacer les variables X_1, X_2, X_3 par les valeurs de x_1, x_2 x_3 dans l'équation de la courbe; le coefficient de proportionnalité ρ disparaîtra, et on obtiendra une équation du second degré en μ, de la forme

$$\varphi(x'_1, x'_2, x'_3) + \mu[x''_1\varphi'(x'_1) + x''_2\varphi'(x'_2) + x''_3\varphi'(x'_3)] + \mu^2\varphi'(x''_1, x''_2, x''_3) = 0.$$

Si l'on désigne par μ' et μ'' les deux racines de cette équation, le quotient $\frac{\mu''}{\mu'}$ sera le rapport anharmonique formé par les deux extrémités de la corde sur la droite qui joint le point x'_1, x'_2, x'_3 à x''_1, x''_2, x''_3. Et pour que ces deux derniers soient conjugués harmoniques par rapport aux extrémités de la corde, il faut et il suffit qu'on ait $\frac{\mu''}{\mu'} = -1$; c'est-à-dire que l'équation en μ doit avoir ses racines égales et de signes contraires. La condition cherchée est donc

$$x''_1\varphi'(x'_1) + x''_2\varphi'(x'_2) + x''_3\varphi'(x'_3) = 0;$$

et celle-ci montre que le point x''_1, x''_2, x''_3 est sur la polaire du point x'_1, x'_2, x'_3, ce qui était précisément la proposition à démontrer.

La démonstration, ne reposant que sur des considérations purement analytiques, s'applique aux systèmes imaginaires comme aux systèmes réels; de telle façon que *si une corde, réelle ou imaginaire, tourne autour d'un point fixe* P, *dans le plan d'une conique, le point* Q, *conjugué harmonique de* P *sur cette corde, décrit une droite qui est la polaire de* P.

321. Considérons maintenant le *cas où le pôle est rejeté à l'infini.* Dans ce cas toutes les cordes menées par ce point sont parallèles; et le point milieu de chacune de ces cordes est sur celle-ci le conjugué har-

monique du pôle placé à l'infini. Le lieu des points milieux d'un système de cordes parallèles est donc une droite ; c'est un diamètre, et *un diamètre est la polaire du point à l'infini, où se coupent ses cordes conjuguées. Parmi ces cordes parallèles se trouvent les deux tangentes aux extrémités du diamètre.*

322. *Cas où la polaire est à l'infini.* — Si nous considérons la droite de l'infini comme polaire, à tous les points de cette droite, considérés comme pôles, correspondent des polaires qui sont des diamètres de la courbe ; tous les diamètres passent donc par le pôle de la droite de l'infini ; et ce pôle se trouve nécessairement au milieu d'un diamètre quelconque, considéré comme corde, puisqu'il est le point conjugué harmonique d'un point situé à l'infini. Donc le pôle de l'infini est un point où tous les diamètres se coupent réciproquement en deux parties égales ; c'est le *centre* de la courbe.

Toutefois, il peut arriver qu'à deux points de la droite de l'infini correspondent deux diamètres parallèles. Dans ce cas le pôle de la droite de l'infini est lui-même rejeté à l'infini et tous les diamètres sont parallèles.

Donc, *la droite de l'infini est la polaire du centre de la courbe, et quand ce centre est à l'infini tous les diamètres sont parallèles.*

323. *Trouver l'équation du pôle d'une droite dont les coordonnées sont u_1, u_2, u_3.* — Soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées rectangulaires homogènes du pôle dont on cherche l'équation. Si ces coordonnées étaient connues, on obtiendrait immédiatement pour l'équation du pôle

$$x_1 U_1 + x_2 U_2 + x_3 U_3 = 0.$$

Pour trouver les coordonnées du pôle remarquons que, l'équation de la polaire étant de même forme que celle de la tangente, les coordonnées de la polaire u_1, u_2, u_3 sont liées à celles du pôle, x_1, x_2, x_3, par les équations (3), ou par les équations (6) qui s'en déduisent. On devra donc, dans l'équation ci-dessus, remplacer x_1, x_2, x_3 par leurs valeurs tirées des équations (6); l'équation du pôle de la droite u_1, u_2, u_3 devient, par conséquent,

$$(10) \qquad U_1\psi'(u_1) + U_2\psi'(u_2) + U_3\psi'(u_3) = 0;$$

elle est de la même forme que celle du point de contact d'une tangente ; on peut évidemment écrire aussi

$$u_1\psi'(U_1) + u_2\psi'(U_2) + u_3\psi'(U_3) = 0.$$

324. *Figures polaires réciproques.* — Étant donnée une figure plane composée de droites et de points en nombre quelconque, si l'on prend par rapport à une section conique les pôles de ces droites et les polaires de ces points, on obtient une seconde figure telle qu'à chaque point de la première correspond une droite de la seconde ; et à chaque droite de la première, un point de la seconde.

A un système de points situés en ligne droite dans la première figure, correspond, dans la deuxième figure, un système de droites passant par un même point, lequel est le pôle de la droite de la première figure. De même, à un faisceau de droites passant par un même point de la première figure, correspond, dans la deuxième figure, un système de points situés sur une droite qui est la polaire de ce point.

Si l'on opère sur la seconde figure comme on a opéré sur la première, on retrouve celle-ci ; en effet, un point quelconque de la seconde figure reproduit la polaire de ce point, qui était précisément la droite correspondante de la première figure ; et une droite quelconque de la deuxième figure, reproduit le pôle de cette droite, qui était le point correspondant de la première figure. Chacune de ces deux figures peut donc se déduire de l'autre par la même opération. C'est pourquoi, on les appelle *figures polaires réciproques*. La section conique par rapport à laquelle on prend les polaires est appelée *courbe auxiliaire* ou *courbe directrice*.

325. Théorème. — *Étant données deux figures réciproques, à quatre points situés en ligne droite dans l'une, correspondent quatre droites passant par un même point dans l'autre et le rapport anharmonique de ces quatre points est égal au rapport anharmonique des quatre droites.*

En effet, soient P_1, P_2, P_3, P_4 (fig. 95), les quatre points situés en ligne droite dans la première figure ; SQ_1, SQ_2, SQ_3, SQ_4 les quatre droites qui leur correspondent dans la deuxième figure.

Le point S étant le pôle de la droite P_1P_4, si par ce point on mène à la conique directrice les deux tangentes SM et SN, les points de contact M et N, réels ou imaginaires, seront les points de rencontre de la courbe avec la droite P_1P_4 ; et la corde MN sera divisée harmoniquement par l'un quelconque des pôles P_1 et sa polaire SQ_1 (n° 320).

Il résulte de là que si les équations des deux tangentes SM et SN sont $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, celles de SP_1, SP_2, SP_3, SP_4 pourront s'écrire de la manière suivante :

$$\alpha - k_1\beta = 0, \quad \alpha - k_2\beta = 0, \quad \alpha - k_3\beta = 0, \quad \alpha - k_4\beta = 0 ;$$

et les droites SQ_1, SQ_2, SQ_3, SQ_4 respectivement conjuguées harmoniques des précédentes par rapport à SM et SN, seront représentées par les équations

$$\alpha + k_1\beta = 0, \quad \alpha + k_2\beta = 0, \quad \alpha + k_3\beta = 0, \quad \alpha + k_4\beta = 0.$$

On en conclut que le rapport anharmonique du faisceau ($S, P_1P_2P_3P_4$) ou, ce qui revient au même, le rapport anharmonique des quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 a pour expression

$$\frac{k_1 - k_2}{k_3 - k_2} : \frac{k_1 - k_4}{k_3 - k_4}.$$

Et le rapport anharmonique ($S, Q_1Q_2Q_3Q_4$) s'obtiendra en changeant les signes de k_1, k_2, k_3, k_4 dans celui qui précède. Or, celui-ci n'est pas altéré par ces changements de signes, ce qui démontre le théorème énoncé.

326. Théorème. — *A une courbe quelconque de la première figure correspond, dans la deuxième figure, une courbe telle que chaque point* a *de la première a pour polaire une tangente* A′ *à la seconde; et que réciproquement le point de contact* a′ *de cette tangente a pour polaire la tangente* A *menée au point* a *de la première courbe.*

Car, si le point a se meut sur la première courbe, sa polaire se meut suivant une loi déterminée, et enveloppe une deuxième courbe. A chaque point a de la première courbe correspond donc une tangente A′ à la deuxième courbe.

Je dis en outre que le point de contact a' de la tangente A′ sera le pôle de la tangente A, menée au point a de la première courbe. Car, si B′ est une tangente à la deuxième courbe, voisine de la tangente A′, son pôle sera un point b de la première courbe voisin de a ; et le point de rencontre des tangentes A′ et B′ sera le pôle de la corde ab de la première courbe. Or si B′ se rapproche graduellement de A′, b se rapprochera de a. A la limite le point de rencontre des deux tangentes A′ et B′ se confondra avec le point de contact a'; et, d'autre part, la corde ab deviendra la tangente au point a. Donc la tangente A, menée au point a de la première courbe, a pour pôle le point a' où la tangente A′ touche la deuxième courbe. *Ces deux courbes sont appelées courbes polaires réciproques.*

327. *Deux courbes polaires réciproques sont telles que la classe de chacune d'elles est la même que le degré de l'autre.*

Car si une courbe S est du degré m, elle est coupée par une droite

quelconque en m points ; or, si par un point quelconque a on mène les tangentes à la courbe S′ polaire réciproque de S, à chacune de ces tangentes correspond un point de la courbe S, situé sur la droite A, polaire de a. Et puisque la droite A rencontre la courbe S en m points, le nombre des tangentes qu'on pourra mener à la courbe S′ par le point a sera aussi égal à m.

Il en résulte que la polaire réciproque d'une courbe du second degré est aussi une courbe du second degré.

328. Si la directrice a un centre, la polaire réciproque d'une conique S, est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que le centre de la courbe directrice est situé à l'intérieur de la courbe S, sur cette courbe ou à l'extérieur de cette courbe.

En effet, les points à l'infini de la courbe S′, polaire réciproque de S, sont les pôles des tangentes à S menées par le centre de la courbe directrice ; si ce centre est à l'intérieur de S, ces tangentes ne sauraient être réelles ; donc alors la polaire réciproque S′ n'a aucun point à l'infini, et c'est une ellipse.

Si le centre de la conique directrice est sur la courbe S, on peut mener à celle-ci une tangente en ce point. Cette tangente étant un diamètre de la courbe directrice a son pôle à l'infini ; la courbe S′, a donc un point à l'infini, et la tangente en ce point, qui est la polaire du centre de la courbe directrice, est également à l'infini. La courbe S′ est donc une parabole. Le point à l'infini de la courbe S′ se trouve d'ailleurs sur le diamètre de la courbe directrice, conjugué de celui qui est tangent à la courbe S. Ce diamètre conjugué est donc un diamètre de la parabole S′.

Enfin, si le centre de la conique directrice est extérieur à la courbe S, on peut par ce point mener deux tangentes réelles, t et t' à cette courbe. Ces tangentes étant des diamètres de la courbe directrice, leurs pôles sont deux points de la courbe S′ situés à l'infini et cette courbe S′ est une hyperbole. Les tangentes en ces points à l'infini ne sont autres que les polaires des points de contact des deux tangentes t et t' ; ce sont des cordes de la courbe directrice, conjuguées des diamètres tangents à S. Ces droites étant des tangentes à l'infini à la courbe S′ en sont les asymptotes.

En raisonnant d'une manière analogue on trouvera sans peine que *quand la courbe directrice est une parabole,*

1° *La polaire réciproque d'une ellipse est une hyperbole.* — 2° *La*

polaire réciproque d'une parabole est une parabole ou une hyperbole. — 3° *La polaire réciproque d'une hyperbole est une ellipse, une parabole ou une hyperbole.*

329. *La double interprétation des équations de la géométrie analytique en coordonnées ponctuelles et en coordonnées tangentielles se ramène à la considération de figures polaires réciproques.* — Supposons, en effet, que l'on prenne pour courbe directrice la conique dont l'équation est

$$\varphi(X_1, X_2, X_3) \equiv X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0;$$

on devra alors, dans l'équation (1) du n° 315, faire

$$a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0; \quad \text{et} \quad a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1.$$

L'équation de la polaire d'un point x_1, x_2, x_3 se réduira, par conséquent, à la forme

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 = 0.$$

Dans la même hypothèse on a évidemment $A_{12} = A_{23} = A_{13} = 0$; et $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1$. Donc l'équation (5), équation de la courbe directrice en coordonnées tangentielles, devient

$$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 0.$$

On voit déjà par là que si dans l'équation de la courbe directrice en coordonnées ponctuelles on remplace les coordonnées variables X_1, X_2, X_3, par U_1, U_2, U_3, on obtient immédiatement l'équation de cette courbe en coordonnées tangentielles.

En même temps les équations (3) ou les équations (6) qui lient les coordonnées d'un point quelconque à celles de sa polaire se réduisent simplement à

$$\frac{u_1}{x_1} = \frac{u_2}{x_2} = \frac{u_3}{x_3}.$$

Il en résulte que si l'on se donne un point quelconque, les coordonnées de ce point sont proportionnelles à celles de sa polaire ; et que dans toute équation homogène les coordonnées d'un point peuvent être remplacées par celles de sa polaire sans que l'équation cesse d'exister.

Cela posé, soit l'équation d'une droite quelconque

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0.$$

D'après ce qui précède on peut considérer a, b, c comme les coordonnées de cette droite ou comme celles de son pôle. Si maintenant on écrit U_1, U_2, U_3 à la place de X_1, X_2, X_3, on obtient l'équation

$$aU_1 + bU_2 + cU_3 = 0,$$

qui représente le point dont les coordonnées sont a, b, c, c'est-à dire le pôle de la droite proposée. Donc, si dans une équation du premier degré on considère les variables alternativement comme représentant des coordonnées ponctuelles et des coordonnées tangentielles, on obtient l'équation d'une droite et celle du pôle de cette droite.

De même, si une courbe S est représentée en coordonnées ponctuelles homogènes par l'équation $\varphi(X_1, X_2, X_3) = 0$, la courbe S', polaire réciproque de S, sera représentée en coordonnées tangentielles par l'équation $\varphi(U_1, U_2, U_3) = 0$; car si on désigne par x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un point pris à volonté sur S, on pourra les regarder aussi comme les coordonnées u_1, u_2, u_3 de la polaire de ce point; et puisque x_1, x_2, x_3 vérifient l'équation de S, on aura aussi $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$. L'équation $\varphi(U_1, U_2, U_3) = 0$ est donc celle de la courbe sur laquelle roule la polaire quand le pôle parcourt la courbe S; en d'autres termes, c'est l'équation de la courbe S', polaire réciproque de S.

On conclut de là que *si dans les équations qui se rapportent à une figure quelconque* F *on échange les coordonnées ponctuelles et tangentielles, on obtient les équations relatives à la figure* F', *polaire réciproque de* F *par rapport à la conique auxiliaire* $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$. (Cf. n° 422).

330. *Cas où la courbe directrice est un cercle.* — Quand la conique par rapport à laquelle on prend les polaires est un cercle, la construction de la figure polaire réciproque d'une figure donnée peut se faire d'une manière très simple.

La polaire d'un point par rapport à un cercle, est perpendiculaire au rayon qui passe par ce point; et le produit des distances du pôle et de la polaire au centre, est égal au carré du rayon. Nous pouvons donc énoncer de la manière suivante la relation qui existe entre deux courbes polaires par rapport à un cercle :

Si d'un point donné O (fig. 96), *on abaisse une perpendiculaire* ON *sur une tangente à la courbe* S, *et qu'on prenne sur celle-ci le point* B, *de telle sorte que le produit* $ON \times OB$ *soit égal à* R^2, *le lieu des points* B *est la courbe* S', *polaire réciproque de* S, *par rapport au cercle de rayon* R.

On voit aisément que la valeur de la constante R^2 étant donnée, on peut faire abstraction du cercle ; *on dit alors que* S' *est la polaire réciproque de* S *par rapport au point* O, *qu'on appelle l'origine.*

331. Deux figures polaires réciproques par rapport à un point jouissent des propriétés suivantes :

1° *L'angle compris entre deux droites de l'une quelconque des deux figures est égal à celui que forment les rayons vecteurs menés de l'origine aux deux points de l'autre figure qui correspondent à ces droites.*

Car si les droites MQ et NP correspondent respectivement aux points A et B (fig. 96), les rayons vecteurs OA et OB sont respectivement perpendiculaires à ces droites ; donc l'angle AOB est égal à NRT.

2° *Si l'on abaisse des deux points* A *et* B *des perpendiculaires* AP *et* BQ *sur les droites qui correspondent respectivement à* B *et* A, *ces perpendiculaires sont entre elles comme les rayons vecteurs* AO *et* BO ; *de sorte qu'on a la proportion* AO : AP = BO : BQ.

Soient x', y' les coordonnées de A, et x'', y'' celles de B. Les droites MQ et NP, polaires de ces points auront respectivement pour équations

$$xx' + yy' - r^2 = 0, \quad xx'' + yy'' - r^2 = 0,$$

celle du cercle étant $x^2 + y^2 = r^2$.

Les distances du point B à la première de ces droites et du point A à la seconde seront

$$BQ = \frac{x''x' + y''y' - r^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{x''x' + y''y' - r^2}{OA},$$

$$AP = \frac{x'x'' + y'y'' - r^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2}} = \frac{x'x'' + y'y'' - r^2}{OB},$$

d'où l'on tire la relation à démontrer $\frac{AO}{AP} = \frac{BO}{BQ}$.

3° *La polaire réciproque d'un cercle par rapport à un point est une conique ayant ce point pour foyer, et la droite qui correspond au centre du cercle pour directrice.*

Soient C le centre (fig. 97) et CT le rayon d'un cercle dont on veut trouver la polaire réciproque par rapport à un cercle auxiliaire ayant pour centre le point O, et pour rayon OA. Soit aussi DQ la polaire de C, c'est-à-dire une perpendiculaire à CO, menée à une distance DO telle qu'on ait $DO \cdot CO = \overline{OA}^2$.

Menons une tangente quelconque au cercle C, et sur cette tangente abaissons la perpendiculaire Om ; prenons le point M tel qu'on ait $MO \cdot mO = \overline{OA}^2$. Le point M sera le pôle de Tm ; ce sera donc un point

de la polaire réciproque du cercle C, et d'après la proposition qui précède on aura $\frac{MO}{CO} = \frac{MQ}{CT}$.

Mais OC et CT sont constants quel que soit le point M. Le rapport $\frac{MO}{MQ}$ est donc constant; donc M appartient à une conique qui a le point O pour foyer et la droite DQ pour directrice.

Le rapport constant $\frac{OC}{CT}$ n'est autre chose que l'excentricité $\frac{c}{a}$. Si $c < a$, la courbe est une ellipse; or on a $c < a$ quand OC $<$ CT, c'est-à-dire quand le centre du cercle auxiliaire est intérieur au cercle C. Si ce centre est extérieur, on a OC $>$ CT, et l'excentricité de la polaire réciproque est plus grande que 1; cette courbe est donc alors une hyperbole. Enfin, si le centre O est sur le cercle C, l'excentricité de la polaire réciproque est égale à l'unité, et cette courbe est une parabole. On retrouve ainsi que la polaire réciproque du cercle C est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon que l'origine O est intérieure ou extérieure à ce cercle, ou est placée sur ce cercle.

332. *La polaire réciproque d'une conique par rapport à son foyer est un cercle;* ou, en d'autres termes,

Si l'on donne le foyer O, *la directrice* DQ, *et l'excentricité* e *d'une conique, on peut toujours trouver un cercle dont la conique est la courbe polaire réciproque par rapport à un cercle de rayon quelconque* OA, *tracé du point* O *comme centre.*

Car, pour avoir le centre C de ce cercle, il suffira de prendre le pôle de DQ par rapport au cercle OA; et pour en obtenir le rayon, on fera $CT = CO \times \frac{1}{e}$.

333. *Propositions démontrées par la méthode des figures polaires réciproques.* — Etant donné un théorème relatif à une courbe S, la méthode des polaires réciproques permet d'en déduire un autre théorème relatif à la courbe correspondante S′, et qui est le théorème corrélatif ou réciproque du premier; il suffit le plus souvent, pour le démontrer, de mettre en regard les deux énoncés. Nous donnerons quelques exemples où certaines propriétés des coniques seront déduites de propriétés connues du cercle.

Premier exemple. — Prenons cette proposition de géométrie élémentaire : *Les angles compris entre deux tangentes au cercle et la corde qui joint leurs points de contact sont égaux.*

Théorème corrélatif. — *La droite qui joint le foyer d'une conique au point de rencontre de deux tangentes est la bissectrice de l'angle sous lequel la corde qui joint les points de contacts est vue du foyer*(*).

Car si on prend pour polaire réciproque de la conique par rapport au foyer O, un cercle C (fig. 98), deux tangentes à la conique, que nous appellerons m et m', correspondent à deux points du cercle M et M'. Le point de rencontre des deux tangentes, que nous désignerons par mm', correspond à la corde MM', et les tangentes TM, TM' correspondent aux points de contact tm, tm'. Cela posé, l'angle des droites TM, MM' est égal à celui des rayons vecteurs qui joignent les points correspondants tm et mm' à l'origine O.

Pour le même motif, l'angle des droites TM' et MM' est égal à celui des rayons vecteurs menés de l'origine aux points tm' et mm'. Donc, les angles en M et M' étant égaux, les angles en O le sont aussi.

Deuxième exemple. — *La tangente au cercle est perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact.*

Théorème corrélatif. — *L'angle sous lequel est vue du foyer la portion d'une tangente à une conique comprise entre le point de contact et la directrice, est un angle droit.*

Car, dans le cercle corrélatif à la conique, le centre C (fig. 99) correspond à la directrice DE ou c, et le point T correspond à la tangente t à la conique ; le rayon CT correspond donc au point ct où la tangente t rencontre la directrice ; et la tangente TM correspond au point de contact tm de la tangente t. L'angle des deux droites CT et TM est donc égal à celui des rayons vecteurs menés du point O aux deux points ct et tm. C. Q. F. D.

On voit immédiatement que si par le point ct on mène une deuxième tangente ayant son point de contact en $t'm'$, l'angle formé par les droites qui joignent les points ct et $m't'$ au point O sera également droit ; donc, les rayons menés de O aux points de contact tm et $t'm'$ sont en ligne droite ; donc, si on mène deux tangentes à la courbe par le point ct de la

(*) Les figures 98 à 102 ne devant servir qu'à faciliter les démonstrations, nous ne nous sommes pas astreint à placer le cercle C dans sa position véritable.

directrice la corde qui joint les points de contact passe au foyer; par conséquent, *la directrice est la polaire du foyer; et la droite qui joint le foyer au pôle d'une corde focale est perpendiculaire à cette corde.*

Troisième exemple. — *La droite qui joint au centre un point pris à volonté dans le plan d'un cercle, fait des angles égaux avec les deux tangentes menées par ce point.*

Théorème corrélatif. — *La droite qui joint le foyer d'une conique au point de rencontre d'une corde avec la directrice, fait des angles égaux avec les rayons vecteurs menés du foyer aux extrémités de la corde.*

A la corde a (fig. 100) correspond un point A dans le plan du cercle dont la conique est la polaire réciproque par rapport au foyer O. Le centre C correspond à la directrice c, et les deux tangentes AM, AM′ correspondent aux deux extrémités am, am' de la corde a. D'ailleurs, la droite AC, correspond au point ac, où la corde a rencontre la directrice c. Les angles que la droite AC fait avec AM et AM′ sont donc égaux à ceux que le rayon vecteur mené de O au point ac fait avec les rayons vecteurs menés de ce même point O aux deux extrémités am, am', de la corde a; ceux-ci sont donc égaux. C. Q. F. D.

Quatrième exemple. — *Le lieu géométrique des sommets des angles circonscrits à un cercle, et égaux à un angle donné, est un cercle concentrique au premier.*

Théorème corrélatif. — *L'enveloppe des cordes vues du foyer d'une conique sous un angle constant, est une autre conique, ayant avec la première une directrice et un foyer communs.*

Car si le cercle MNM′ (fig. 101) est la polaire réciproque de la conique donnée par rapport à son foyer O, et si on désigne par a une corde de cette conique, vue du foyer sous un angle α, les deux extrémités am, am' de cette corde correspondront aux tangentes AM, AM′ au cercle, et l'angle α des rayons vecteurs dirigés de O vers les points am, am' sera égal à l'angle MAM′. L'angle MAM′ $= \alpha$ étant constant, son sommet A décrit un cercle ayant son centre en C; la corde correspondante a enveloppera donc une conique, polaire réciproque de ce cercle APP′; et celui-ci ayant son centre en C, sa polaire réciproque aura le point O pour foyer, et la droite c pour directrice. C. Q. F. D.

Cinquième exemple. — *L'enveloppe de la corde qui joint les points de contact de deux tangentes à un cercle, faisant entre elles un angle constant, est un deuxième cercle concentrique au premier.*

Théorème corrélatif. — *Si on mène à une conique deux tangentes telles que la corde qui joint les points de contact soit vue du foyer sous un angle donné, le point de rencontre de ces tangentes a pour lieu géométrique une seconde conique ayant avec la première une directrice et un foyer communs.*

Soit a l'une des cordes de la conique, et α l'angle sous lequel cette corde est vue du foyer O (fig. 102). A cette corde correspond un point A, et à ses deux extrémités am, am', correspondent deux tangentes AM, AM' au cercle polaire réciproque de la conique. Ces tangentes font entre elles le même angle α que les rayons vecteurs menés du point O aux points correspondants am, am'; et puisque cet angle est supposé constant, la corde MM' enveloppe un cercle concentrique au premier. Or à cette corde MM' correspond le point mm', intersection de deux tangentes menées à la conique, aux deux extrémités de la corde a.

Le lieu du point mm' est donc la polaire réciproque de l'enveloppe de MM', c'est-à-dire d'un cercle dont le centre est en C; mais cette polaire réciproque est une conique qui a pour foyer le point O, et pour directrice la droite c qui correspond au centre C. Le théorème est donc démontré.

Sixième exemple. — *Si par un point* O *d'une circonférence on mène deux cordes* OA, OB *faisant entre elles un angle droit, la droite* AB *passe par le centre* C (fig. 103).

Théorème corrélatif. — *Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une parabole est la directrice.*

Soient O le foyer de la parabole, DE la directrice, C le centre d'un cercle, polaire réciproque de la parobole par rapport au point O. (L'origine O est sur le cercle C, pour que la polaire réciproque de celui-ci soit parabolique.)

Aux deux tangentes a, b à la parabole correspondent les points A, B du cercle, situés sur les rayons OA, OB respectivement perpendiculaires aux tangentes a et b; l'angle de ces tangentes étant droit, celui des deux rayons vecteurs OA, OB sera droit également. La droite AB passe donc par le centre C; or, aux trois points A, B, C situés en ligne droite, correspondent trois droites passant par un même point, à savoir : les deux tangentes a, b et la directrice c. Les tangentes a et b se coupent donc sur la directrice c. C. Q. F. D.

Ces exemples suffiront, pensons-nous, pour montrer la beauté et la fécondité de la méthode des figures polaires réciproques.

§ 5. Propriété anharmonique des coniques et théorèmes divers sur ces courbes : Théorèmes de Chasles, de Maclaurin ou Braikenridge, de Pascal, de Brianchon, de Desargues, de Sturm. — Théorèmes de Newton et de Carnot sur les courbes géométriques.

334. L'équation générale des lignes du second degré contient six coefficients qui équivalent à cinq paramètres arbitraires; car, à cause de l'homogénéité, on peut substituer à ces constantes les rapports de cinq d'entre elles à la sixième. On peut donc assujettir une ligne du second degré à cinq conditions telles que chacune fournisse une relation entre les cinq paramètres. Par exemple, cinq points suffisent, en général, pour déterminer une ligne du second ordre, puisqu'en substituant les coordonnées de ces points aux variables dans l'équation de la courbe, on obtient cinq équations du premier degré qui permettent de calculer les paramètres.

De même, une ligne du second degré est généralement déterminée par la condition d'être tangente à cinq droites; car il suffirait pour le prouver de substituer les coordonnées tangentielles aux coordonnées ponctuelles dans le raisonnement qui précède.

Il existe divers moyens de décrire des coniques satisfaisant à des conditions données et les principaux peuvent se déduire d'un théorème remarquable que nous allons démontrer(*).

335. Théorème de Chasles. — Nous mettrons en regard la démonstration de ce théorème et celle du théorème corrélatif.

Étant donnés deux faisceaux homographiques, leurs rayons correspondants se coupent deux à deux sur une conique passant par les centres des deux faisceaux.

Soient

$G + \mu H = 0$ et $G' + \mu H' = 0$

Étant données deux séries homographiques sur deux droites fixes, les lignes de jonction des points correspondants enveloppent une conique tangente aux deux droites fixes.

Soient

$P + \mu Q = 0$ et $P' + \mu Q' = 0$

(*) Voir : *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, note XV. Chasles y montre que ce théorème est une conséquence de celui de Desargues; il en donne ensuite une démonstration directe et en déduit plusieurs autres.

les équations de deux rayons correspondants des deux faisceaux. Ces équations étant considérées comme simultanées représenteront un des points d'intersection de deux rayons correspondants, et l'élimination de μ fournira l'équation du lieu géométrique de ces points. On trouve ainsi

$$GH' - G'H = 0.$$

Cette équation est du second degré; le lieu cherché est donc une conique; et celle-ci passe par les centres des deux faisceaux; car pour l'un de ces points on a $G = 0$ et $H = 0$, et pour l'autre $G' = 0$ et $H' = 0$; ce qui prouve que les coordonnées de ces deux points satisfont à l'équation de la conique.

Soient maintenant SA, SB, SC (fig. 104), trois rayons fixes du premier faisceau, correspondant respectivement aux trois rayons S'A, S'B, S'C du second. Ils suffiront pour déterminer chaque position du rayon S'D correspondant à une position donnée du rayon mobile SD, et par conséquent aussi pour trouver sur toute droite menée par S, un point de la conique déterminée par les cinq points S, S', A, B, C.

Ce théorème permet donc de trouver autant de points qu'on le veut de la conique assujettie à passer par cinq points donnés.

les équations de deux points correspondants des deux séries. Ces équations étant considérées comme simultanées représenteront une des droites de jonction de deux points correspondants, et l'élimination de μ fournira, en coordonnées tangentielles, l'équation de la courbe enveloppe de ces droites. On trouve ainsi

$$PQ' - P'Q = 0.$$

Cette équation étant du second degré, le lieu cherché est de la seconde classe. Et la conique ainsi trouvée est tangente aux deux droites fixes; car pour l'une de ces droites on a $P = 0$ et $Q = 0$; et pour l'autre $P' = 0$ et $Q' = 0$; ce qui prouve que les coordonnées de ces deux droites satisfont à l'équation de la conique.

Soient maintenant A, B, C (fig. 104bis), trois points fixes de la première série correspondant respectivement aux trois points A', B', C' de la seconde. Ils suffiront pour déterminer chaque position du point D' correspondant à une position du point mobile D; et par conséquent aussi pour trouver DD', tangente menée par le point D à la conique qui touche les cinq droites AB, A'B', AA', BB', CC'.

Ce théorème permet donc de trouver autant de tangentes qu'on le veut à la conique assujettie à toucher cinq droites données.

Remarque. — Quand trois des cinq points, par exemple A, B et C, sont en ligne droite, les deux faisceaux projectifs sont en position perspective. Le point mobile D reste alors sur la droite ABC et la conique se réduit à deux droites dont l'une est ABC et l'autre SS′.

Si plus de trois points se trouvaient en ligne droite, la conique serait évidemment indéterminée, et c'est le seul cas d'indétermination.

Donc, *par cinq points dont trois ne sont pas en ligne droite on peut toujours faire passer une courbe du second degré et on n'en peut faire passer qu'une.*

On peut encore observer que quand le point S se meut sur la courbe, le rapport anharmonique (S,ABCD) reste constant. Donc, *si on prend quatre points fixes sur une conique, le rapport anharmonique des rayons qui les joignent à un point mobile sur la courbe reste constant.*

Remarque.—Quand trois des cinq droites, par exemple AA′, BB′ et CC′, passent par un même point, les deux séries projectives sont en position perspective. La droite mobile DD′ passe alors par le centre de perspective et la conique se réduit à deux points dont l'un est ce centre et l'autre le point de rencontre des droites ABC et A′B′C′.

Si plus de trois des tangentes données passaient par un même point, la conique serait indéterminée et c'est le seul cas d'indétermination.

Donc, *étant données cinq droites dont trois ne passent pas par un même point, il existe toujours une courbe du second degré tangente à ces droites et il n'en existe qu'une.*

On peut encore observer que quand la droite AB roule sur la courbe, le rapport anharmonique (ABCD) reste constant. Donc, *si on mène quatre tangentes fixes à une conique, le rapport anharmonique des points où elles rencontrent une tangente mobile est constant.*

336. *Mener la tangente en un point d'une conique dont on connaît cinq points et trouver le point de contact d'une tangente à une conique dont on connaît cinq tangentes.*

On vient de voir que le théorème de Chasles permet de trouver autant de points qu'on le veut de la conique dont cinq points sont donnés. Il permet aussi de trouver la

On vient de voir que le théorème corrélatif du théorème de Chasles permet de trouver autant de tangentes qu'on le veut de la conique dont cinq tangentes sont données.

tangente en un quelconque de ces points. En effet, si le point D s'approche indéfiniment de S′, la corde S′D devient, à la limite, la tangente S′T au point S′ de la courbe, tandis que SD devient SS′. Pour obtenir la tangente S′T il suffit donc de construire, dans le faisceau dont le centre est S′, le rayon correspondant au rayon SS′ du faisceau ayant son centre en S; c'est-à-dire un rayon tel qu'on ait

$$(S',ABCT) = (S, ABCS').$$

Le cas où l'on donne cinq points peut ainsi se ramener à celui où l'on donne cinq tangentes, ou un point et quatre tangentes, deux points et trois tangentes, etc.

Il permet aussi de trouver le point de contact de l'une quelconque de ces tangentes. En effet, si la tangente AB s'approche indéfiniment de DD′, le point D devient, à la limite, le point de contact μ de la tangente DD′; tandis que les points A, B, C viennent en α, β, γ. Pour obtenir le point μ il suffit donc de chercher sur la droite DD′ un point tel que l'on ait

$$(\alpha\beta\gamma\mu) = (ABCD).$$

Le cas où l'on donne cinq tangentes peut ainsi se ramener à celui où l'on donne cinq points, ou quatre points et une tangente, trois points et deux tangentes, etc.

337. *Trouver les points de rencontre d'une droite avec une conique dont cinq points sont donnés.* — Ce problème peut se résoudre, à l'aide du théorème de Chasles, de la manière suivante :

Joignons deux des points donnés aux trois autres; nous déterminerons ainsi deux faisceaux projectifs dont les rayons correspondants se rencontrent deux à deux sur la conique. Ces deux faisceaux couperont donc la droite en deux séries projectives ; quand deux points correspondants de ces deux séries coïncideront, les rayons correspondants des deux faisceaux se couperont en ce point double. Ce sera donc un point de la conique situé sur la droite donnée, c'est-à-dire un des points de rencontre que nous cherchons. La question revient donc à trouver les points doubles des deux séries projectives que nous venons de déterminer sur la droite.

Soient A, B, C (fig. 105) les trois points de la première série, correspondant respectivement aux points a, b, c de la seconde. Traçons à volonté un cercle et joignons un point quelconque M de cette courbe aux six points des deux séries. Nous formerons ainsi deux faisceaux qui couperont la circonférence respectivement aux points A′, B′, C′ et a', b', c'.

Considérons maintenant les faisceaux obtenus en joignant chacun des points A′ et M à a', b' et c' ; ces deux faisceaux $M(a', b', c')$ et $A'(a', b', c')$ seront homographiques, en vertu du théorème de Chasles ; et pour un motif semblable les faisceaux M (A′, B′, C′) et a'(A′, B′, C′) seront homographiques également. Mais les deux faisceaux M (A′, B′, C′) et $M(a', b', c')$ sont homographiques puisqu'ils déterminent sur la droite donnée deux séries homographiques (A, B, C) et (a, b, c) ; donc les deux faisceaux $A'(a', b', c')$ et a' (A′, B′, C′) le sont également ; comme ces derniers ont un rayon cummun $A'a'$ ils sont en position perspective et leurs rayons correspondants se coupent sur une droite $\beta\gamma$, laquelle rencontre le cercle en deux points, réels ou imaginaires, δ et δ'. Mais quand deux rayons correspondants des faisceaux qui ont leurs centres en A′ et a' se coupent au point δ, les rayons qui leur correspondent respectivement dans les deux faisceaux dont le centre est en M se confondent en un seul qui est $M\delta$. Celui-ci est donc un rayon double des deux faisceaux homographiques de centre M, et il rencontre la droite donnée au point D, lequel est un point double des deux séries homographiques A, B, C et a, b, c formées sur cette droite. Le point D est donc un des points de rencontre, réels ou imaginaires, de la droite donnée avec la conique déterminée par les cinq points donnés. Le second point de rencontre D′ s'obtiendra évidemment en joignant $M\delta'$.

338. Nous montrerons maintenant comment le théorème de Chasles conduit à divers autres théorèmes remarquables et susceptibles de nombreuses applications.

Théorème de Maclaurin ou de Braikenridge. — *Si les trois côtés d'un triangle tournent autour de trois points fixes, tandis que deux sommets glissent sur deux droites fixes, le troisième sommet décrit une courbe du second degré.*

Soit MPQ (fig. 106) le triangle dont les trois côtés tournent autour des points fixes A, B, C, et dont les deux sommets P et Q glissent sur les deux droites fixes OP et OQ.

Théorème corrélatif. — *Si les trois sommets d'un triangle glissent sur trois droites fixes, tandis que deux côtés tournent autour de deux points fixes, le troisième côté enveloppe une courbe du second degré.*

Soit EE′P le triangle dont les trois sommets glissent sur les trois droites fixes CD, DI, IC (fig. 106bis), et dont les deux côtés PE, PE′ tournent autour des deux points

Considérons les quatre positions PQ, P′Q′, P″Q″, P‴Q‴ du côté qui tourne autour de A et auxquelles correspondent les positions M, M′, M″, M‴ du troisième sommet du triangle mobile. Il y aura égalité entre les rapports anharmoniques suivants :

$$(A, PP'P''P''') = (A, QQ'Q''Q'''),$$
$$(A, PP'P''P''') = (B, PP'P''P'''),$$
$$(A, QQ'Q''Q''') = (C, QQ'Q''Q'''),$$

et on a, par conséquent,

$$(B, PP'P''P''') = (C, QQ'Q''Q''').$$

Les droites qui constituent les deux derniers faisceaux se coupent donc deux à deux en des points M, M′, M″, M‴ situés sur une conique qui passe par B et C.

Il est aisé de voir que la courbe passe aussi par les points D, E et O. Car, quand la droite QAP coïncide avec AB, le point Q se trouve en E et le point P en π; la droite QC devient donc EC, tandis que BP tombe en $B\pi$. Ces droites se coupent au point E, qui se trouve, par conséquent, sur la conique. On prouvera de la même manière que celle-ci passe par le point D.

Enfin quand PQ passe en O, les deux points P et Q coïncident avec O, et les droites BP et CQ devenant BO et CO, leur point de rencontre O appartient à la courbe.

fixes A et B. Considérons les quatre positions P, Q, R, S du sommet qui glise sur CD et qui déterminent les positions EE′, FF′, GG′, HH′ du troisième côté du triangle mobile. Il y aura égalité entre les rapports anharmoniques suivants :

$$(A, PQRS) = (B, PQRS),$$
$$(A, PQRS) = (EFGH),$$
$$(B, PQRS) = (E'F'G'H');$$

et on a, par conséquent,

$$(EFGH) = (E'F'G'H').$$

Les droites qui joignent les points correspondants des deux séries, c'est-à-dire EE′, FF′, GG′, HH′, enveloppent donc une conique tangente à CI et ID.

On voit aussi sans peine que la courbe est tangente à AB, BC et DA. Car, quand le point P se place en C, les côtés dirigés suivant AE et BE′ deviennent respectivement AC et BC; le sommet E vient donc en C et le sommet E′ à l'intersection BC et ID. La droite EE′ devient donc BC, et cette droite touche, par conséquent, la conique. On prouvera de la même manière que celle-ci est tangente à AD.

Enfin quand le sommet P se place à l'intersection de CD et AB, les deux côtés APE, BPE′ du triangle coïncident avec AB; le côté EE′ se confond donc aussi avec AB, et cette droite est une tangente.

339. Théorème de Pascal. — *Étant donné un hexagone inscrit dans une courbe du second degré, les côtés opposés se coupent deux à deux en trois points situés en ligne droite.*

Soit ODCMBE (fig. 106), un hexagone inscrit dans une conique. Les côtés opposés DC, EB se coupent en A; les côtés BM, OD, au point P, et les côtés CM, OE au point Q. Je dis que les trois points Q, A, P sont en ligne droite.

Car, si QA ne rencontrait pas OD en P, mais en quelque autre point P′, la droite P′B couperait CQ en un point m, différent de M. Ce point, d'après le théorème de Maclaurin, serait sur la conique qui passe par les cinq points B, E, O, D, C; or cette conique, par hypothèse, contient déjà le point M. Elle couperait donc la droite CM en trois points C, M, m, ce qui est impossible.

Remarque.—Comme le montre la figure, le théorème de Pascal n'exige pas que l'hexagone soit convexe; il suffit que ce soit un polygone fermé. On peut le former en traçant à volonté six cordes consécutives, de manière à revenir au point de départ. Si on numérote les côtés dans l'ordre où ils se suivent, les trois points d'intersection des côtés 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6, sont en ligne droite.

Corollaires. — Quand deux sommets consécutifs de l'hexagone inscrit se rapprochent jusqu'à se confondre, le côté intermédiaire devient une tangente à la courbe. Le théorème de Pascal est donc applicable au pentagone, au quadrilatère et au triangle inscrits, pourvu que l'on complète le nombre des côtés par des tangentes aux sommets. On trouve ainsi les théorèmes suivants :

Étant donné un triangle inscrit dans une conique, les trois points où les côtés sont coupés par les tangentes menées aux sommets opposés sont en ligne droite.

Étant donné un quadrilatère inscrit dans une conique, les points de rencontre des côtés opposés, et ceux des tangentes menées aux sommets opposés, sont en ligne droite.

340. Voici quelques problèmes dont les solutions peuvent se déduire du théorème de Pascal.

1° *Trouver autant de points qu'on voudra d'une conique passant par cinq points donnés, et mener la tangente en un quelconque de ces points.* — Soient A, B, C, D, E (fig. 107) les cinq points donnés, et pour trouver

un sixième point proposons-nous de déterminer celui où la conique est coupée par la droite EM menée à volonté par le point E. Soit Q le point de rencontre de AB et DE; P celui de EM et de BC; la droite PQ coupe CD au point R; joignons AR. Le point M où cette dernière droite coupe EP sera le point demandé.

Pour avoir la tangente en un point quelconque, au point A par exemple, on tracera AE qui rencontre BC en P′; on tracera ensuite P′Q qui rencontre CD en R′; la droite AR′ sera la tangente demandée.

2° *Étant donnés quatre points d'une conique, et la tangente en un de ces points, trouver un cinquième point de la courbe.*

Soient les quatre points donnés A, B, C, D (fig. 108) et la droite AP, tangente en A; cherchons le point de la conique situé sur la droite DM menée à volonté par D; pour plus de facilité marquons les côtés par des numéros d'ordre. Les droites 1 et 4 se coupent en P. Les droites 2 et 5 se coupent en Q. La droite 3 est coupée par PQ au point R. Si l'on joint AR, on aura la droite 6, qui déterminera sur DM un point M de la conique.

3° *Étant donnés trois points d'une conique, et les tangentes en deux de ces points, trouver un quatrième point de la courbe.*

Soient A, B, C les trois points donnés (fig. 109), AQ la tangente au point A et CQ la tangente au point C. Traçons à volonté la droite AM, qui coupe BC au point P; traçons ensuite PQ qui rencontre AB au point R, et joignons CR. Cette dernière droite coupe AP en un point M, situé sur la conique.

341. Théorème de Brianchon. — *Les trois diagonales qui joignent deux à deux les sommets opposés d'un hexagone circonscrit à une conique, passent par un même point.*

Ce théorème se déduit aisément de celui de Pascal, dont il est le corrélatif. En effet, soit ABCDEF (fig. 110) un hexagone circonscrit à une conique; GHIKLM l'hexagone inscrit qui a pour sommets les points où la courbe est touchée par les côtés de l'hexagone circonscrit. Ces deux hexagones sont des figures polaires réciproques par rapport à la conique. Or, les côtés opposés de l'hexagone inscrit se coupent deux à deux en trois points P, Q, R situés sur une même droite; donc les diagonales AD, BE, CF de l'hexagone circonscrit, qui sont respectivement les polaires des points Q, P, R, se coupent en un même point O, pôle de la droite PQR.

Remarque. — Le théorème de Brianchon ne suppose pas que l'hexagone circonscrit à la conique soit convexe. Il peut avoir des angles rentrants, comme on le voit dans la figure 111. Si l'on numérote les sommets dans l'ordre où on les rencontre en parcourant successivement tous les côtés de manière à revenir au point de départ, les diagonales qui joignent les points 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6, passent par un même point O. Il suit de là que le théorème de Brianchon s'applique à la parabole et à l'hyperbole aussi bien qu'à l'ellipse.

Corollaires. — Quand les points de contact de deux côtés consécutifs de l'hexagone circonscrit se rapprochent jusqu'à se confondre, ils coïncident, à la limite, avec le sommet intermédiaire; et les deux côtés consécutifs en question, se plaçant dans le prolongement l'un de l'autre, forment une tangente unique, le sommet intermédiaire devenant le point de contact.

Le théorème de Brianchon est donc applicable au pentagone, au quadrilatère, et au triangle circonscrits, pourvu que l'on complète le nombre des sommets par des points de contact des côtés. On déduit de là les théorèmes suivants :

Étant donné un triangle circonscrit à une conique, les trois droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés, se coupent en un même point.

Étant donné un quadrilatère circonscrit à une conique, les deux diagonales et les droites qui joignent deux à deux les points de contact des côtés opposés, se coupent en un même point.

342. Les problèmes suivants se résolvent aisément à l'aide du théorème de Brianchon.

1° *Étant données cinq tangentes à une conique, trouver une sixième tangente, et déterminer sur chacune d'elles, le point de contact.*

Soient les cinq tangentes (fig. 112), AB, BC, CD, DE, EF et proposons-nous de mener une sixième tangente, par exemple celle qui passe par le point F pris à volonté sur EF. Traçons les droites BE et CF qui se coupent en O. Joignons DO, qui rencontre AB au point A. La droite AF sera la tangente cherchée.

Pour obtenir le point de contact de l'une des tangentes, telle que EF, on appliquera le théorème de Brianchon au pentagone circonscrit GBCDE, en considérant le point de contact cherché comme un

sixième sommet. On joindra donc BE et DG qui se coupent en O′. La droite CO′ déterminera sur EF le point de contact cherché M.

2° *Étant données quatre tangentes à une conique, avec le point de contact de l'une d'elles, trouver une cinquième tangente.*

Soient BG, GE, ED, DC (fig. 112), les quatre tangentes, et M le point de contact de la tangente GE. Prenons à volonté le point B sur la première de ces droites, et proposons-nous de mener par ce point une cinquième tangente à la courbe.

Il suffira de joindre GD et BE qui se coupent en O′; la droite MO′ déterminera sur CD un point de la tangente demandée. Pour obtenir celle-ci il suffira donc de joindre BC.

3° *Étant donnés trois tangentes* AB, BC, CD (fig. 113) *et les points de contact* A *et* D *de deux d'entre elles, trouver autant de tangentes qu'on voudra.*

Il suffit de faire voir qu'on peut mener une quatrième tangente, par exemple celle qui passe par le point E, arbitrairement choisi sur CD.

Or, si on trace successivement les droites AD, BE, CO, EF, cette dernière sera la tangente cherchée.

343. Théorème. — *Soit* ABCDEF (fig. 114) *un hexagone de Pascal; prolongeons les trois côtés alternants* AB, CD *et* EF *pour former le triangle* KLM, *et les trois autres côtés pour former le triangle* GHI. *La figure* GKHLIM *est un hexagone de Brianchon.*

En effet, les côtés opposés de l'hexagone de Pascal se coupent deux à deux aux trois points P, Q, R, situés sur une même droite; or si l'on considère les deux triangles KLM, GHI, on voit que leurs côtés se coupent deux à deux en P, Q, R, puisqu'ils coïncident avec les côtés de l'hexagone; ce sont donc deux triangles homologiques et leurs sommets opposés se trouvent deux à deux sur trois droites MH, GL, KI, qui se coupent en un même point O (n° 272). Mais ces dernières droites sont les diagonales de l'hexagone GKHLIM; celui-ci est donc circonscrit à une conique, ou en d'autres termes, c'est un hexagone de Brianchon.

Théorème corrélatif. — *Soit* GKHLIM (fig. 114), *un hexagone de Brianchon; joignons deux à deux trois sommets alternants pour former le triangle* GHI, *et les trois autres sommets pour former le triangle* KLM. *Nous obtenons ainsi, en* ABCDEF *un hexagone de Pascal.*

Car, les sommets des triangles GHI, KLM, étant placés deux à deux

sur trois droites qui se coupent en O, ces triangles sont homologiques; leurs côtés opposés se coupent donc deux à deux en trois points P, Q, R situés sur une même droite et, par conséquent, l'hexagone ABCDEF formé par ces côtés est un hexagone de Pascal (*).

344. *Soit* ABCDEF *un hexagone de Pascal* (fig. 115). *Joignons les trois sommets alternants qui forment le triangle* ACE, *et les trois autres sommets qui forment le triangle* BDF. *La figure abcdef ainsi obtenue, est un hexagone de Brianchon.*

Ce théorème a beaucoup d'analogie avec le précédent. On en trouvera une démonstration dans les œuvres de Steiner (Jacob Steiner's gesammelte Werke, 1[ter] Band, S. 356). En voici une autre qui est très simple.

En vertu du théorème de Chasles les deux faisceaux qui ont leurs sommets en E et en F, et dont les côtés aboutissent aux points A, B, C, D de la conique ont même rapport anharmonique. On a donc (E,ABCD) = (F,ABCD). Mais le premier faisceau, coupé par la transversale DP, donne la relation (E, ABCD) = (PBcD).

De même, le second faisceau coupé par la transversale AQ donne la relation (F, ABCD) = (AaCQ). On a, par conséquent, (PBcD) = (AaCQ).

Or, cette dernière relation exprime que les quatre droites fixes ef, fa, cd, de, déterminent sur les deux droites bc et ab deux systèmes de points homographiques. Donc (n° 335) ces six droites sont tangentes à une même conique.

Théorème corrélatif. — *Soit abcdef* (fig. 115), *un hexagone de Brianchon. Prolongeons trois côtés alternants pour former le triangle* ACE, *et les trois autres côtés pour former le triangle* BDF. *Nous aurons en* ABCDEF *un hexagone de Pascal.*

Il suffit pour le voir, de remarquer, en renversant la démonstration qui précède, que les deux faisceaux (E, ABCD) et (F, ABCD) ont même rapport anharmonique.

(*) Ces théorèmes ont été démontrés par E. Catalan (*Nouvelles Annales de mathématiques*, 1[re] série, t. XI). M. Folie a prouvé qu'ils peuvent être généralisés (Voir : *Bulletin de l'Acad. roy. des sciences de Belgique*, 2[me] série, t. XLIV et XLVI). Steiner avait aussi fait voir que les deux triangles formés par les côtés alternants d'un hexagone de Pascal, ont leurs sommets opposés situés sur trois droites qui se coupent en un même point (Voir : *Journal de Crelle*. t. LXVIII, p. 193, ou Salmon, *trad. de Resal et Vaucheret*, p. 530.)

On voit donc que si on répète indéfiniment les opérations qui consistent à joindre, soit les sommets alternants, soit les points de rencontre des côtés alternants d'un hexagone de Pascal ou d'un hexagone de Brianchon, on obtient une série d'hexagones qui sont alternativement des hexagones de Brianchon et des hexagones de Pascal.

345. THÉORÈME DE NEWTON. — Le théorème suivant sur la description des coniques est dû à Newton.

Si les deux angles constants ASa, $AS'a'$ (fig. 116) *tournent autour de leurs sommets* S *et* S' *de manière que deux côtés* SA, S'A *se coupent toujours sur une même droite* AD, *le point de rencontre des deux autres côtés* Sa, $S'a'$, *décrit une section conique passant par* S *et* S'.

Car, à cause des angles égaux $ASB = aSb$, $BSC = bSc$, $CSD = cSd$, on a $(S, ABCD) = (S, abcd)$; et, pour un motif semblable, $(S', ABCD) = (S', a'b'c'd')$. Mais on a aussi $(S, ABCD) = (ABCD) = (S', ABCD)$ d'où $(S, abcd) = (S', a'b'c'd')$; et en vertu du théorème de Chasles, les droites homologues de ces faisceaux se coupent deux à deux sur une section conique $\alpha\beta\gamma\delta$ qui passe par S et S'.

Remarque. — Le théorème de Newton est susceptible de généralisation; car il resterait vrai si le point A, au lieu de parcourir la droite AD, décrivait une conique passant par les points S et S'.

346. THÉORÈME DE DESARGUES. — *Si l'on coupe par une transversale quelconque un quadrilatère inscrit dans une conique, les deux points où cette transversale rencontre la courbe, ceux où elle rencontre les deux diagonales qui passent par les sommets du quadrilatère situés sur la courbe, et enfin les points où elle rencontre deux côtés opposés, sont conjugués deux à deux dans un système en involution.*

Le théorème de Desargues peut se déduire de celui de Chasles.

Soient $abcd$ (fig. 117) un quadrilatère inscrit dans une conique et DD' une transversale quelconque qui rencontre la courbe en A et A', les diagonales en C et C', les côtés opposés ba et cd en B et B' et les deux autres côtés en D et D'.

Considérons deux faisceaux anharmoniques ayant respectivement leurs sommets en a et c, et dont les droites homologues se coupent deux à deux sur la courbe dans les quatre points A, b, A' et d. D'après le théorème de Chasles, ils ont même rapport anharmonique, et l'on a, par conséquent,

$$(a, AbA'd) = (c, AbA'd).$$

Si l'on considère les points où ces deux faisceaux sont coupés par la transversale DD′, on a donc aussi

$$(ABA'D) = (AD'A'B') = (A'B'AD'),$$

et, par conséquent, les points A, A′, B, D correspondent respectivement aux points A′, A, B′, D′, dans deux systèmes homographiques. Donc les six points A et A′, B et B′, D et D′ sont conjugués deux à deux dans un système en involution.

On trouvera de la même manière, par la considération des deux faisceaux a, AcA′d et b, AcA′d, que les points C et C′ sont deux points conjugués de ce système.

Remarque. — Ce théorème n'est qu'une autre expression du théorème de Chasles, ainsi que l'a fait observer ce dernier géomètre. Il permet aussi, étant donnés cinq points d'une conique de construire un sixième point, et de mener la tangente en un point quelconque.

347. Théorème de Sturm. — *Les coniques passant par quatre points fixes déterminent sur une transversale quelconque un système de points en involution.*

Ce théorème peut se déduire de celui de Desargues dont il est une généralisation.

En effet, considérons indépendamment de la conique AbcA′da (fig. 117) deux autres coniques circonscrites au même quadrilatère $abcd$, et coupées par la transversale AA′ l'une en deux points α et α', l'autre en deux points β et β'. D'après le théorème de Desargues, les points α et α' d'une part, β et β' d'autre part, sont des points conjugués de l'involution déterminée par les quatre points B, B′, C et C′; donc les six points A et A′, α et α', β et β' sont des points conjugués deux à deux dans un système en involution. C. Q. F. D.

On peut aussi donner du théorème de Sturm une démonstration directe. Le théorème de Desargues s'en déduit alors comme un cas particulier.

348. Problème. — *Construire une conique passant par quatre points donnés et tangente à une droite donnée.*

Ce problème peut se résoudre au moyen du théorème de Sturm. En effet, la transversale DD′ (fig. 117) coupe une conique passant par les quatre points a, b, c, d, en deux points conjugués A et A′. Quand ces deux points se confondent, ils donnent un point double ou foyer du

système en involution, et de plus la droite DD′ devient une tangente à la courbe en ce point. Donc, si on donne les quatre points a, b, c, d, par lesquels doit passer la conique, et la droite DD′ qui doit toucher la courbe, il suffit de chercher les points doubles de l'involution déterminée par les points B et B′, C et C′, considérés comme conjugués deux à deux. Ces points doubles F et F′ sont les points de contact de deux coniques satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

On voit donc que par quatre points donnés on peut faire passer deux coniques réelles ou imaginaires tangentes à une droite donnée; la construction de la courbe est ainsi ramenée à celle d'une conique dont cinq points sont connus.

349. Théorème corrélatif de celui de Sturm. — *Les tangentes menées par un point fixe aux coniques tangentes à quatre droites fixes sont en involution.*

Ce théorème se démontre aisément en construisant la figure polaire réciproque de la fig. 117.

Aux quatre sommets du quadrilatère inscrit de la figure 117 correspondent, dans la figure polaire réciproque (fig. 118), les quatre côtés a, b, c, d d'un quadrilatère circonscrit à une conique. A la transversale et aux deux points A et A′ où elle coupe la première conique, correspondent un point S, et les deux tangentes A et A′ menées par ce point à la conique corrélative.

Or, à un système de points en involution dans l'une des figures correspond un système de droites en involution dans l'autre. D'où il suit que si l'on considère toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère qui a pour côtés a, b, c, d dans la fig. 118, les tangentes menées à ces courbes par le point S, sont conjuguées deux à deux dans un système en involution.

C. Q. F. D.

350. Comme cas particuliers des coniques inscrites dans le quadrilatère on peut en considérer trois qui se réduisent chacune à un système de deux points, à savoir les trois couples de sommets opposés du quadrilatère complet. Par exemple, quand la conique de la figure 117 se réduit aux deux diagonales ac, bd, la conique corrélative de la figure 118 se réduit aux deux sommets opposés ac, bd du quadrilatère circonscrit, et les deux tangentes à cette conique sont les deux droites C et C′ qui joignent ces deux sommets au points S; on pourra de même considérer

comme conjuguées les droites B et B′ qui joignent le point S aux deux sommets opposés *ab* et *cd* ; et aussi les droites D et D′ qui joignent ce même point aux deux sommets opposés *bc* et *ad*.

On en conclut ce théorème, qui est le corrélatif de celui de Desargues :

Si par un point pris à volonté dans le plan d'une conique on mène les trois couples de droites qui joignent ce point aux sommets opposés d'un quadrilatère circonscrit, ainsi que les deux tangentes à la courbe, ces droites sont conjuguées deux à deux dans un système en involution.

351. Problème. — *Construire une conique tangente à quatre droites données, et passant par un point donné.*

Soient *a*, *b*, *c*, *d* (fig. 118), les quatre droites données, auxquelles la conique cherchée doit être tangente, et S le point par lequel doit passer la courbe. Entre les diverses coniques inscrites dans le quadrilatère que forment ces quatre droites, considérons celle pour laquelle les deux tangentes menées par S coïncident. Ces deux tangentes coïncidentes formeront une droite double du système en involution. D'autre part, si les deux tangentes menées à une conique par un point S sont coïncidentes, ce point n'est autre que le point de contact.

Il s'ensuit que si l'on considère une conique passant par S et touchant les quatre droites *a*, *b*, *c*, *d*, la tangente en S à cette courbe est une droite double SF du faisceau en involution. Si l'on cherche cette droite double, on connaîtra donc cinq tangentes à la conique, et le problème sera ramené à un autre déjà résolu précédemment.

On voit qu'il y a deux coniques, réelles ou imaginaires, qui satisfont aux conditions de l'énoncé, puisqu'il y a deux droites doubles, réelles ou imaginaires, dans le faisceau en involution.

352. Théorème de Newton *relatif aux courbes géométriques de degré quelconque* (fig. 119).

Soit une courbe de degré m. Son équation en coordonnées cartésiennes pourra se mettre sous la forme

$$Ax^m + By^m + \cdots + K = 0,$$

A, B, ... K, étant des coefficients constants.

Les points de rencontre de la courbe avec l'axe des y s'obtiennent en faisant $x = 0$, ce qui donne une équation du $m^{ième}$ degré en y, savoir :

$$By^m + \cdots + K = 0.$$

Si l'on désigne par $\pi(y)$ le produit des racines de cette équation, on a

$$\pi(y) = \pm \frac{K}{B},$$

le signe $+$ correspondant au cas où le degré m est pair, et le signe $-$ au cas où m est impair.

De même, les points où la courbe rencontre l'axe des x, sont donnés par l'équation

$$Ax^m + \cdots + K = 0,$$

et le produit des abscisses de tous ces points de rencontre étant désigné par $\pi(x)$, on a

$$\pi(x) = \pm \frac{K}{A}.$$

On en déduit

$$\frac{\pi(y)}{\pi(x)} = \frac{A}{B}.$$

Supposons maintenant qu'on transporte l'origine en un autre point du plan, sans changer la direction des axes. Il faudra pour cela faire usage des formules de transformation des coordonnées,

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta.$$

Il est évident que par cette substitution les termes du degré le plus élevé en x et y ne changeront pas, et que la nouvelle équation sera

$$Ax'^m + By'^m + \cdots + L = 0.$$

On trouvera donc, par rapport aux nouveaux axes,

$$\pi(x') = \pm \frac{L}{A}, \quad \pi(y') = \pm \frac{L}{B};$$

et, par conséquent,

$$\frac{\pi(y')}{\pi(x')} = \frac{\pi(y)}{\pi(x)} = \frac{A}{B}.$$

Donc, *si par un point pris à volonté dans le plan d'une courbe géométrique on mène un axe des ordonnées et un axe des abscisses respectivement parallèles à deux droites fixes, le produit des ordonnées des points où la courbe rencontre le premier axe, est au produit des abscisses des points où elle rencontre le deuxième axe, dans un rapport constant, quelle que soit la position du point dans le plan.*

Ce théorème peut évidemment être étendu aux surfaces géométriques.

353. Théorème de Carnot. — Soit une courbe géométrique plane quelconque ; prenons à volonté trois points A, B, C dans son plan, et joignons-les deux à deux par des droites indéfiniment prolongées. Représentons par (BC) le produit, affecté du signe convenable, des segments interceptés sur BC entre le point B et les différents points de rencontre de cette droite avec la courbe, et par (CB) celui des segments interceptés sur cette même droite entre les points où elle rencontre la courbe et le point C. Dans le premier produit, on considérera comme positifs les segments qui tomberont du même côté de B que le point C et comme négatifs ceux qui tomberont du côté opposé ; dans le second produit on regardera comme positifs les segments qui tomberont relativement à C du même côté que le point B, et comme négatifs ceux qui tomberont de l'autre côté ; de telle façon que pour un point situé entre B et C le rapport de ces segments pris avec leurs signes sera positif, et que pour un point extérieur il sera négatif ; désignons-le par k ; ce sera la coordonnée-rapport déterminant la position du point sur BC. Par conséquent aussi, $\frac{(BC)}{(CB)}$ sera le produit des rapports qui déterminent les positions de tous les points $m, m', \ldots$ sur le côté BC. On pourra, d'ailleurs, appliquer à chacune des deux autres droites CA, et AB la même notation qu'à la droite BC.

De même, si dans le plan de ce triangle on a une courbe géométrique de la m^e classe et qu'on mène par le point A les m tangentes à la courbe, on peut désigner par $\frac{(BC)}{(CB)}$ le produit des coordonnées-rapports qui fixent sur BC les positions des m points où ce côté est coupé par les m tangentes ; les notations $\frac{(CA)}{(AC)}$ et $\frac{(AB)}{(BA)}$ désigneront alors les produits analogues relatifs aux deux autres côtés du triangle.

Ces conventions étant admises, le théorème de Carnot et son corrélatif peuvent s'énoncer de la manière qui suit :

354. Théorème de Carnot. — *Si l'on trace à volonté un triangle* ABC *dans le plan d'une courbe géométrique du degré* m, *on a la relation*

$$\frac{(AB)(BC)(CA)}{(BA)(CB)(AC)} = (-1)^m.$$

Théorème corrélatif. — *Étant donnés trois points* A, B, C *dans le plan d'une courbe géométrique de la* $m^{ième}$ *classe, on a la relation*

$$\frac{(AB)(BC)(CA)}{(BA)(CB)(AC)} = +1.$$

Le théorème de Carnot peut se déduire de celui de Newton ; mais on peut aussi donner de ce théorème et de son corrélatif des démonstrations semblables à celles dont nous avons fait usage aux nos 270 et 271 pour établir deux théorèmes qui ne sont que des cas particuliers de ceux dont il est ici question.

Soit $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ l'équation de la courbe en coordonnées homogènes ponctuelles. En prenant pour premiers termes ceux dans lesquels les variables se trouvent au plus haut degré, elle sera de la forme

$$Px_1^m + Qx_2^m + Rx_3^m + \cdots = 0.$$

Si on veut obtenir les points où la courbe rencontre la droite BC on doit faire $x_1 = 0$, et on obtient une relation entre x_2 et x_3, qui peut s'écrire

$$\left(\frac{x_3}{x_2}\right)^m + \cdots + \frac{Q}{R} = 0.$$

Chacune des racines de cette équation détermine un des points de rencontre du côté BC et de la courbe ; et si on désigne par k la coordonnée-rapport du point correspondant à l'une des valeurs de $\frac{x_3}{x_2}$, on a, d'après ce qui a été expliqué au n° 270,

$$k = \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{x_3 \varepsilon_2 \sin B}{x_2 \varepsilon_3 \sin C}.$$

Soit $\pi(k)$ le produit de ces rapports pour les m points de rencontre et $\pi\left(\frac{x_3}{x_2}\right)$ le produit des racines de

Soit $f(u_1, u_2, u_3) = 0$ l'équation de la courbe en coordonnées homogènes tangentielles. En prenant pour premiers termes ceux dans lesquels les variables se trouvent au degré le plus élevé, elle sera de la forme

$$Pu_1^m + Qu_2^m + Ru_3^m + \cdots = 0.$$

Si on veut obtenir les points où le côté BC est coupé par les tangentes à la courbe menées par A, on doit faire $u_1 = 0$ et on obtient la relation

$$\left(\frac{u_2}{u_3}\right)^m + \cdots + \frac{R}{Q} = 0.$$

Chacune des racines de cette équation détermine le point de rencontre d'une tangente avec BC ; et si l'on désigne par k la coordonnée-rapport du point correspondant à l'une des valeurs de $\frac{u_2}{u_3}$, on a, d'après ce qui a été expliqué au n° 261,

$$k = -\frac{q_2}{q_3} = -\frac{\lambda_3 u_2}{\lambda_2 u_3}.$$

Soit $\pi(k)$ le produit de ces rapports pour les m points de section et $\pi\left(\frac{u_2}{u_3}\right)$ le produit des racines de

l'équation trouvée ci-dessus; il vient

$$\pi(k) = \pi\left(\frac{x_3}{x_2}\right) \times \left(\frac{\varepsilon_2 \sin B}{\varepsilon_3 \sin C}\right)^m;$$

mais, d'après la loi de composition des équations algébriques, on a aussi

$$\pi\left(\frac{x_3}{x_2}\right) = \frac{Q}{R}(-1)^m;$$

et, d'après les notations admises,

$$\pi(k) = \frac{(BC)}{(CB)};$$

on a donc

$$\frac{(BC)}{(CB)} = \frac{Q}{R}\left(\frac{\varepsilon_2 \sin B}{\varepsilon_3 \sin C}\right)^m (-1)^m.$$

On trouverait de même

$$\frac{(CA)}{(AC)} = \frac{R}{P}\left(\frac{\varepsilon_3 \sin C}{\varepsilon_1 \sin A}\right)^m (-1)^m,$$

$$\frac{(AB)}{(BA)} = \frac{P}{Q}\left(\frac{\varepsilon_1 \sin A}{\varepsilon_2 \sin B}\right)^m (-1)^m;$$

d'où l'on tire finalement

$$\frac{(BC)(CA)(AB)}{(CB)(AC)(BA)} = (-1)^m.$$

l'équation trouvée plus haut; il vient

$$\pi(k) = \pi\left(\frac{u_2}{u_3}\right) \times \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^m (-1)^m;$$

mais, d'après la loi de composition des équations algébriques, on a aussi

$$\pi\left(\frac{u_2}{u_3}\right) = \left(\frac{R}{Q}\right)(-1)^m;$$

et, d'après les notations admises,

$$\pi(k) = \frac{(BC)}{(CB)};$$

on a donc

$$\frac{(BC)}{(CB)} = \frac{R}{Q} \times \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^m.$$

On trouverait de même

$$\frac{(CA)}{(AC)} = \frac{P}{R} \times \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)^m,$$

$$\frac{(AB)}{(BA)} = \frac{Q}{P} \times \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m;$$

d'où l'on tire finalement

$$\frac{(BC)(CA)(AB)}{(CB)(AC)(BA)} = +1.$$

355. *Extension du théorème de Carnot.* — Le théorème de Carnot peut être facilement étendu au cas où l'on substitue au triangle un polygone quelconque. Il suffit de décomposer le polygone en triangles en menant toutes les diagonales qui partent de l'un quelconque des sommets. On écrira pour chacun de ces triangles la relation qui résulte du théorème de Carnot, et par voie de multiplication on en déduira une relation analogue entre les segments formés sur les côtés du polygone; car les facteurs qui se rapportent aux diagonales pourront être supprimés parce qu'ils seront communs au numérateur et au dénominateur du premier membre.

On peut évidemment donner une extension semblable au théorème corrélatif.

356. *Applications du théorème de Carnot.* — Nous nous bornerons à présenter quelques applications très simples du théorème de Carnot.

Première application. — Faisons voir qu'il conduit au théorème de Pascal.

Soit l'hexagone ABCDEF (fig. 114) inscrit dans une conique, et considérons le triangle GHI coupé par la transversale CD. On a

$$\left(\frac{HC}{GC}\right)\cdot\left(\frac{GR}{IR}\right)\cdot\left(\frac{ID}{HD}\right)=-1.$$

Le même triangle coupé par AB donne

$$\left(\frac{IP}{HP}\right)\cdot\left(\frac{HB}{GB}\right)\cdot\left(\frac{GA}{IA}\right)=-1.$$

Enfin, en regardant encore le même triangle comme coupé par EF, on a

$$\left(\frac{HQ}{GQ}\right)\cdot\left(\frac{GF}{IF}\right)\cdot\left(\frac{IE}{HE}\right)=-1.$$

D'un autre côté, la courbe détermine sur les côtés du triangle GHI des segments liés par la relation

$$\left(\frac{HC}{GC}\right)\cdot\left(\frac{HB}{GB}\right)\cdot\left(\frac{GA}{IA}\right)\cdot\left(\frac{GF}{IF}\right)\cdot\left(\frac{IE}{HE}\right)\cdot\left(\frac{ID}{HD}\right)=1.$$

Multipliant les trois premières égalités membre à membre, et divisant par la quatrième, il vient

$$\left(\frac{GR}{IR}\right)\cdot\left(\frac{IP}{HP}\right)\cdot\left(\frac{HQ}{GQ}\right)=-1.$$

Donc, les points P, Q, R sont en ligne droite sur les côtés du triangle GHI. C. Q. F. D.

Deuxième application. — Soit ABC (fig. 120) un triangle circonscrit à une courbe du second degré; chaque côté pouvant être considéré comme coupant la courbe en deux points coïncidents, le théorème de Carnot conduit à la relation

$$\left(\frac{AR}{BR}\right)^2\cdot\left(\frac{BP}{CP}\right)^2\cdot\left(\frac{CQ}{AQ}\right)^2=1;$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{AR}{BR}\right)\cdot\left(\frac{BP}{CP}\right)\cdot\left(\frac{CQ}{AQ}\right)=\pm 1.$$

Or, les trois points P, Q, R appartenant à une même conique ne

peuvent être en ligne droite ; le signe — doit donc être rejeté, et l'on en conclut que les trois droites AP, BQ, CR se coupent en un même point. On retrouve ainsi un théorème déjà démontré au nº 341.

Troisième application. — Soient P, Q, R (fig. 121), trois points d'inflexion réels d'une courbe du troisième degré. Les tangentes en ces points forment un triangle ABC dont chaque côté doit être considéré comme rencontrant la courbe en trois points coïncidents. On a donc, en vertu du théorème de Carnot,

$$\left(\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{BR}}\right)^3 \cdot \left(\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{CP}}\right)^3 \cdot \left(\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}\right)^3 = -1, \text{ ou } \left(\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{BR}}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{CP}}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}\right) = -1.$$

On en conclut ce théorème : *Les trois points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre sont en ligne droite.*

§ 6. Représentation des lieux géométriques dans l'espace : coordonnées rectilignes, coordonnées polaires, coordonnées tangentielles.

357. *Coordonnées rectilignes.* — Soient les trois axes Ox, Oy, Oz (fig. 122) arbitrairement choisis de telle façon qu'ils passent par un même point O, pris pour origine et qu'ils ne soient pas situés dans un même plan. Par un point M pris à volonté dans l'espace, menons trois plans respectivement parallèles à yOz, zOx, xOy et coupant les axes en trois points A, B, C, que nous appellerons *les projections de* M *sur les axes.*

Le point A sera déterminé si on donne son abscisse $x = a$; le point B si on donne son ordonnée $y = b$, et le point C si on donne $z = c$. Il est clair que quand ces valeurs de x, y, z seront données toutes les trois, elles permettront de retrouver le point M. Ce sont les *coordonnées rectilignes* de ce point. Elles peuvent être rectangulaires ou obliques.

358. *Représentation des lignes et des surfaces.* — L'équation $x = a$ représente le plan MQAR, parallèle à yOz. Car tous les points situés dans ce plan, à l'exclusion des autres points de l'espace, ont pour abscisse a ; de même, les équations $y = b$, $z = c$, représentent respectivement les plans BPMR et CQMP.

Les équations $x = a$, $y = b$, considérées simultanément représentent la droite MR parallèle à l'axe des z ; car elles conviennent à tous les points d'intersection des deux plans que ces équations représentent quand on

considère chacune d'elles à part. On représenterait de même par $y = b$, $z = c$ la droite MP parallèle à l'axe des x; par $z = c$, $x = a$ la droite MQ parallèle à $0y$.

359. L'équation $f(x, y) = 0$ est celle d'un cylindre à génératrices parallèles à l'axe des z. Car, si parmi les points auxquels convient cette équation on ne considère d'abord que ceux qui se trouvent dans le plan des xy, on sait qu'ils appartiennent à une certaine ligne, en général une courbe RS. Si par le point R pris à volonté sur cette courbe on mène RM parallèle à $0z$, tous les points de cette droite ont le même x et le même y que R; la valeur de z change seule d'un point à un autre sur cette droite; et comme z n'entre pas dans l'équation $f(x, y) = 0$, on voit que celle-ci est vérifiée pour tous les points de RM, parce qu'elle est vérifiée pour le point R. Cette équation convient donc à tous les points du cylindre dont la base est RS et dont la génératrice est parallèle à l'axe des z; elle ne convient, d'ailleurs, à aucun autre point.

L'équation $f(y, z) = 0$ est de même celle d'un cylindre parallèle à l'axe des x, et $f(z, x) = 0$ celle d'un cylindre parallèle à $0y$.

Si on considère comme simultanées les équations $f(x, y) = 0$, $z = c$, elles représentent évidemment la section faite dans le cylindre parallèle à $0z$, par le plan CQPM parallèle à $x0y$.

360. L'équation $f(x, y, z) = 0$ représente une certaine surface. Car elle est vérifiée par les coordonnées d'une infinité de points; et en ne considérant d'abord que ceux pour lesquels $z = c$, on a les équations

$$z = c, \quad f(x, y, c) = 0,$$

qui représentent une courbe parallèle à xy. Si l'on fait varier c depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ cette courbe se meut et engendre dans l'espace une surface telle que les coordonnées de tous ses points satisfont à l'équation proposée. Cette surface pourrait évidemment être imaginaire.

361. Un système de deux équations $f(x, y, z) = 0$, $F(x, y, z) = 0$, représente la ligne d'intersection des deux surfaces que ces équations représentent quand on considère chacune d'elles isolément.

Toute équation $\varphi(x, y, z) = 0$ déduite des deux équations de la ligne dont il vient d'être question, est celle d'une surface passant par cette ligne; car les coordonnées de tout point de cette ligne, qui vérifient les deux premières équations, doivent aussi, d'après l'hypothèse, vérifier la troisième.

Il résulte de là qu'une ligne peut être représentée par deux équations de bien des manières. Par exemple, on peut faire passer par cette ligne trois cylindres parallèles aux axes, que l'on nomme cylindres projetants. Deux de ces cylindres peuvent se confondre; cela arrive quand il s'agit d'une ligne située dans un plan parallèle à l'un des plans des coordonnées, parce que alors deux des cylindres se réduisent au plan de cette ligne; mais il y a toujours au moins deux cylindres projetants distincts et ils suffisent pour déterminer par leur intersection la ligne que l'on considère. Il est aisé de trouver les équations de ces cylindres; par exemple, si on veut obtenir le cylindre parallèle à Oz, il suffit d'éliminer z entre les deux équations de la ligne donnée; car l'équation résultante ne contient pas z et représente par conséquent un cylindre parallèle à Oz; et ce cylindre passe par la ligne donnée puisque son équation est une conséquence de celles de cette ligne.

Remarque. — Il est à observer que si on substitue à l'une des équations d'une ligne donnée ou à toutes les deux, celles de certains cylindres projetants, on peut, indépendamment de tous les points de la ligne proposée en obtenir encore d'autres. Car les équations des cylindres projetants sont des conséquences des équations proposées, mais il peut n'y avoir pas réciprocité. C'est une circonstance dont il y a lieu de tenir compte dans certains cas. Ainsi, par exemple, les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad y = mz,$$

considérées comme simultanées, représentent un cercle, intersection d'une sphère et d'un plan; si on élimine alternativement y et z pour avoir les équations des cylindres projetants parallèles aux y et aux z on trouve les équations

$$x^2 + (1 + m^2)\,z^2 = r^2 \quad \text{et} \quad x^2 + \left(1 + \frac{1}{m^2}\right) y^2 = r^2\,;$$

et ces cylindres se coupent suivant deux cercles dont les plans ont pour équations $y = \pm\, mz$.

362. Un système de trois équations représente un ou plusieurs points qui sont les points de rencontre de trois surfaces et toute équation qui s'en déduit est celle d'une surface passant par ces points.

363. *Coordonnées polaires.* — Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz (fig. 123), joignons le point O, appelé *pôle*, à

un point quelconque M; projetons orthogonalement OM en OP sur le plan xOy, appelé *plan fondamental*; désignons par ρ la distance OM, qui sera le *rayon vecteur* du point M et par α et β les angles xOP et zOM; les quantités ρ, α, β seront les *coordonnées polaires de* M. Il est clair qu'on peut atteindre tous les points de l'espace en faisant varier α de zéro à 360°, β de zéro à 180° et ρ de 0 à $+\infty$; mais on peut aussi concevoir que ces coordonnées prennent des valeurs négatives puisque les angles et le rayon vecteur peuvent être comptés à partir de zéro dans deux directions opposées et bien déterminées.

On verra sans peine que les lieux géométriques peuvent être représentés par des équations en coordonnées polaires, une équation unique représentant une surface, deux équations une ligne, trois équations un ou plusieurs points isolés.

Nous donnerons plus loin la définition d'un système de coordonnées polaires différent de celui dont il est ici question (Voir n° 370.)

364. *Projection sur un axe d'une droite donnée en grandeur et en direction.* — Soient AB (fig. 124) une droite donnée en grandeur et en direction, et a, b les projections (orthogonales ou obliques) de A et de B sur l'axe Ox; le segment ab, pris en signe convenable sera la projection de AB sur Ox. Le signe sera déterminé comme nous l'avons expliqué au n° 219.

365. *Les projections sur deux axes parallèles et dirigés dans le même sens, d'une droite donnée en grandeur et en direction, sont égales et ont le même signe.* — Même démonstration qu'au n° 220. Il suffira pour le voir de jeter un coup d'œil sur la fig. 125.

366. *Formules pour déplacer l'origine.* — Soient x, y, z les coordonnées du point A rapporté aux axes Ox, Oy, Oz; X, Y, Z les coordonnées du même point rapporté aux axes O′X, O′Y, O′Z, parallèles aux premiers, mais ayant pour origine le point O′ dont les coordonnées sont x', y', z' (fig. 125). On aura les formules générales

$$x = X + x', \quad y = Y + y', \quad z = Z + z'.$$

La démonstration est en tout semblable à celle du n° 215.

367. *Si l'on projette sur les axes la droite qui part de l'origine pour aboutir au point* M (fig. 126), *les projections ne sont autres que les coordonnées x, y, z de ce point.* — Même démonstration qu'au n° 221.

368. *Si l'on projette sur les axes la droite qui part du point* A (fig. 127) *dont les coordonnées sont* x', y', z' *pour aboutir au point* B *dont les coordonnées sont* x'', y'', z'', *les projections sont* $x'' - x'$, $y'' - y'$, $z'' - z'$. — Même démonstration qu'au n° 222.

369. *Définition des coefficients de projection.* — Une droite AB (fig. 128) étant donnée, par l'origine menons-lui une parallèle OM dirigée dans le même sens et d'une longueur égale à l'unité. Les coordonnées l, m, n du point M seront les *coefficients de projection* de AB, et l'on aura

$$\text{proj AB sur } Ox = \text{AB} \times l, \quad \text{proj AB sur } Oy = \text{AB} \times m,$$
$$\text{proj AB sur } Oz = \text{AB} \times n.$$

La démonstration se fera comme au n° 223.

370. *Soient sur une droite indéfinie* AB (fig. 128), *qui a pour coefficients de projection* l, m, n, *un point* A *dont les coordonnées sont* x', y', z' *et un point mobile* M', *ayant pour coordonnées* x, y, z. *Appelons* ρ *le rayon vecteur du point* M' *compté à partir de* A, *et considéré comme positif ou négatif suivant qu'il tombe sur* AB *ou sur son prolongement;* on aura

$$x - x' = l\rho, \quad y - y' = m\rho, \quad z - z' = n\rho.$$

Même démonstration qu'au N° 224.

Première remarque. — Les quantités l, m, n, ρ peuvent être considérées comme coordonnées polaires du point M', le pôle étant au point fixe A. Ces coordonnées sont en apparence au nombre de quatre; mais nous verrons (n° 384) qu'en réalité elles se réduisent à trois, les coefficients de projection étant liés par une équation de condition.

Deuxième remarque. — Dans le cas où les axes sont rectangulaires les coefficients de projection sont les cosinus des angles que la droite fait avec les trois axes positifs. Car le triangle OMQ est alors rectangle, et l'on a

$$l = \pm \text{OQ} = \cos \text{MOQ};$$

on ferait une démonstration analogue pour m et n; si α, β, γ sont les angles d'une droite avec les trois axes positifs rectangulaires on a, par conséquent,

$$l = \cos\alpha, \quad m = \cos\beta, \quad n = \cos\gamma.$$

C'est ce que l'on appelle les *cosinus directeurs* de la droite.

371. *Distance de deux points, les axes étant rectangulaires.* — Soit le point M ayant pour coordonnées x, y, z (fig. 129), et cherchons

sa distance à l'origine. Les plans qui projettent ce point sur les axes forment un parallélipipède rectangle dans lequel on a

$$\overline{OM}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2 + \overline{MP}^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

La figure suppose les trois coordonnées x, y, z positives; mais si quelques-unes étaient négatives la formule ne changerait évidemment pas par ces changements de signes.

Par une méthode semblable à celle du n° 217 on prouvera que la distance du point x, y, z au point x', y', z', les coordonnées étant rectangulaires, est donnée par la formule

$$d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

372. *Relation entre les trois coefficients de projection d'une droite, les axes étant rectangulaires.* — Ces coefficients l, m, n sont les coordonnées d'un point dont la distance à l'origine est l'unité; d'où il résulte qu'on a la relation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \text{ou} \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

373. *Relation entre les cosinus des angles que fait un plan avec trois plans rectangulaires.* — L'angle de deux plans peut se mesurer par celui de deux perpendiculaires élevées sur ces plans; et afin de distinguer entre les deux angles supplémentaires que font entre eux les deux plans, il suffit de considérer chacune des perpendiculaires comme élevée sur une des deux faces du plan. On a ainsi deux droites dont la direction et le sens sont complètement déterminés et que l'on nomme les *axes* de ces plans. L'angle de deux plans se ramène ainsi à celui de deux droites qui sont les axes de ces plans. Il est clair dès lors, que les angles α, β, γ qu'un plan fait avec les plans yz, zx, xy sont ceux que l'axe du plan fait avec les trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Les cosinus de ces angles sont donc liés par la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

374. *La somme des projections sur un axe fixe de tous les côtés d'un polygone fermé est égale à zéro, la direction et le sens des côtés étant déterminés par un mobile qui parcourt successivement tous les côtés du polygone pour revenir au point de départ.* — Même démonstration qu'au n° 225.

D'après cela, si nous désignons par l_1, l_2, l_3, ... les coefficients de pro-

jection des côtés AB, BC, CD, ... du polygone sur l'axe des x, c'est-à-dire les abscisses des points pris à l'unité de distance de l'origine sur les droites menées par celle-ci parallèlement aux côtés et dans le même sens que ces côtés, nous aurons la relation

$$AB \times l_1 + BC \times l_2 + CD \times l_3 + \cdots = 0.$$

Ce théorème peut encore énoncer ainsi : *La projection sur l'axe des x d'une droite donnée en grandeur et en direction est égale à la somme algébrique des projections des côtés d'une ligne brisée qui aboutit aux mêmes extrémités, pourvu qu'on détermine le sens des côtés en faisant partir le mobile de la même extrémité sur la droite et sur la ligne brisée.* Dans ce qui suit il sera toujours sous-entendu que quand on a un système de trois axes la projection sur l'un d'eux se fait parallèlement au plan des deux autres.

375. *Si l'on projette sur une droite arbitraire les coordonnées* X, Y, Z *d'un point quelconque* M, *la somme algébrique des trois projections est égale à la projection sur cette droite du rayon vecteur qui va de l'origine au point* M. *Les projections peuvent, d'ailleurs, se faire orthogonalement ou parallèlement à un plan quelconque.* — Supposons d'abord que les trois coordonnées X, Y, Z soient positives. On aura $X = OQ$, $Y = QP$, $Z = PM$ (fig. 130). A la projection cherchée on peut substituer la projection de OM sur une droite Ox, parallèle à la droite arbitraire donnée, et dirigée dans le même sens; en supposant que les projections doivent se faire parallèlement au plan yOz et en désignant par l, l', l'' les coefficients de projection de OX, OY, OZ sur Ox, on a (n° 374)

$$\text{proj. OM sur } Ox = OQ \times l + QP \times l' + PM \times l'';$$

et, par conséquent,

$$\text{proj. OM sur } ox = lX + l'Y + l''Z.$$

Pour démontrer que la formule ne change pas quand certaines coordonnées deviennent négatives, supposons qu'on compte les X positifs sur OX'. Le coefficient de projection de OX' sur Ox sera égal et de signe contraire à celui de OX. Il faudra donc dans la formule remplacer $+l$ par $-l$; en outre OQ sera égal à $-X$; et à cause de ce double changement de signe, la formule ne changera pas. On prouverait de la même manière qu'elle ne change pas quand Y et Z deviennent négatifs.

376. *Formules pour passer d'un système d'axes rectilignes à un autre ayant même origine.* — Remarquons que dans la formule établie

ci-dessus la projection de OM sur Ox, faite parallèlement à yz, n'est autre chose que l'abscisse x du point M rapporté aux trois axes Ox, Oy, Oz. C'est donc une formule générale donnant l'expression de x en fonction de X, Y, Z ; on trouvera évidemment deux formules analogues pour y et z. En désignant par m, m', m'' les coefficients de projection de OX, OY, OZ sur Oy ; et par n, n', n'', ceux des mêmes axes sur Oz, on aura les trois formules générales

$$x = lX + l'Y + l''Z,$$
$$y = mX + m'Y + m''Z,$$
$$z = nX + n'Y + n''Z.$$

Première remarque.— Il sera toujours aisé de retrouver la signification des coefficients qui entrent dans ces formules; par exemple, si dans les trois premières on fait $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 0$, il vient $x = l$, $y = m$, $z = n$. Donc l, m, n sont les coordonnées par rapport à Ox, Oy, Oz, d'un point pris sur l'axe OX à la distance 1 de l'origine ; ce sont donc les coefficients de projection de OX par rapport aux axes Ox, Oy, Oz ; de même l', m', n' sont les coefficients de projection de OY ; l'', m'', n'' ceux de OZ.

Deuxième remarque. — Quand les axes Ox, Oy, Oz sont rectangulaires l, m, n, deviennent les cosinus des angles que OX fait avec ces trois axes ; de même l', m', n' et l'', m'', n'' sont respectivement les cosinus directeurs de OY et OZ.

Troisième remarque. — Les formules de transformation servant à passer d'un système d'axes rectilignes à un autre contiennent neuf constantes ; mais trois seulement sont arbitraires parce qu'elles sont liées par six équations de condition qu'on trouvera au n° 382.

377. *Déterminer l'angle de deux droites faisant avec trois axes rectangulaires les angles* α, β, γ et α', β', γ'.

Par l'origine menons les droites OM et ON (fig. 131) parallèles respectivement aux droites données, dirigées dans le même sens et égales à l'unité. Les coordonnées des points M et N seront (n° 370)

$$l = \cos\alpha,\quad m = \cos\beta,\quad n = \cos\gamma \quad \text{et} \quad l' = \cos\alpha',\quad m' = \cos\beta',\quad n' = \cos\gamma'.$$

Or on a, dans le triangle MON, en désignant l'angle MON par θ,

$$\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 - 2OM\,.\,ON\,.\cos\theta = 2 - 2\cos\theta.$$

D'autre part, on a aussi (n° 371)

$$\overline{MN}^2 = (l - l')^2 + (m - m')^2 + (n - n')^2 = l^2 + m^2 + n^2 + l'^2 + m'^2 + n'^2 - 2(ll' + mm' + nn').$$

Égalons les valeurs de MN et observons que

$$l^2 + m^2 + n^2 = l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1;$$

on aura, pour déterminer sans ambiguïté l'angle des deux droites,

$$\cos\theta = ll' + mm' + nn' = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

378. *Angle de deux plans.* — L'angle de deux plans est donné par la même formule que celui de deux droites. Pour le prouver il suffit de rappeler que l'angle de deux plans est le même que celui des axes de ces plans (n° 373). On verra alors que si on désigne par θ l'angle de deux plans et par α, β, γ et α', β', γ' les angles que les axes de ces plans font respectivement avec trois axes rectangulaires, l'angle des deux plans sera donné, sans ambiguïté, par la formule

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

379. *Condition de perpendicularité de deux droites ou de deux plans.* — Les axes étant supposés rectangulaires, on obtient immédiatement cette condition en égalant à zéro l'expression de $\cos\theta$ donnée dans les deux numéros précédents.

380. *Distance de deux points en coordonnées obliques.* — Cherchons d'abord la distance de l'origine au point dont les coordonnées obliques sont X, Y, Z. A cet effet, prenons un système d'axes rectangulaires ayant la même origine et soient x, y, z les coordonnées du point donné rapporté à ces nouveaux axes; la distance cherchée sera

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

mais x, y, z sont liés à X, Y, Z par les formules de transformation du n° 376; en substituant on a

$$\begin{aligned} d^2 = \mathrm{X}^2(l^2 + m^2 + n^2) + \mathrm{Y}^2(l'^2 + m'^2 + n'^2) + \mathrm{Z}^2(l''^2 + m''^2 + n''^2) \\ + 2\mathrm{YZ}(l'l'' + m'm'' + n'n'') + 2\mathrm{ZX}(ll'' + mm'' + nn'') \\ + 2\mathrm{XY}(ll' + mm' + nn'); \end{aligned}$$

mais dans ces formules les coefficients de X^2, Y^2, Z^2 sont égaux à l'unité; et si l'on désigne par A, B, C les cosinus des angles YOZ, ZOX, XOY, on a

$$\mathrm{A} = (l'l'' + m'm'' + n'n''),\quad \mathrm{B} = (ll'' + mm'' + nn''),\quad \mathrm{C} = (ll' + mm' + nn');$$

d'où

$$d^2 = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 + 2\mathrm{AYZ} + 2\mathrm{BXZ} + 2\mathrm{CYX}.$$

En suivant la même marche qu'au n° 217 on obtient, pour la distance de deux points quelconques x, y, z et x', y', z',

$$d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + 2A(y - y')(z - z') + 2B(x - x')(z - z') + 2C(y - y')(x - x').$$

381. *Cosinus de l'angle de deux droites en fonction de leurs coefficients de projection, les coordonnées étant obliques.* — Dans le triangle MON (fig. 131), on a (n° 377)

$$\overline{MN}^2 = 2 - 2\cos\theta\,;$$

mais, les axes étant obliques, on a ici

$$\overline{MN}^2 = (l - l')^2 + (m - m')^2 + (n - n')^2 + 2A(m - m')(n - n') + 2B(n - n')(l - l') + 2C(l - l')\,m - m')\,;$$

substituant, et observant qu'on a les deux égalités

$$l^2 + m^2 + n^2 + 2A\,mn + 2B\,nl + 2C\,lm = l'^2 + m'^2 + n'^2 + 2A\,m'n' + 2B\,l'n' + 2C\,l'm' = 1,$$

on obtient finalement

$$\cos\theta = ll' + mm' + nn' + A(mn' + nm') + B(nl' + ln') + C(lm' + ml').$$

De cette formule on déduit sans peine les cosinus des angles qu'une droite dont les coefficents de projection sont λ, μ, ν fait avec trois axes obliques OX, OY, OZ ; en effet, si on désigne par α le cosinus de l'angle que cette droite fait avec OX, il suffira, pour obtenir α, de faire dans la formule qui précède

$$\cos\theta = \alpha,\quad l = \lambda,\quad m = \mu,\quad n = \nu,\quad l' = 1,\quad m' = o,\quad n' = o,$$

et il viendra

$$\alpha = \lambda + B\nu + C\mu\,;$$

on trouverait de même, en désignant par α' et α'' les cosinus des angles que cette droite fait respectivement avec Oy et Oz,

$$\alpha' = \mu + A\nu + C\lambda,\quad \alpha'' = \nu + A\mu + B\lambda.$$

Réciproquement, si les trois cosinus α, α', α'' étaient donnés, la résolution de ces trois équations ferait connaître les coefficients de projection λ, μ, ν.

382. *Relations entre les neuf constantes qui entrent dans les formules de transformation du n° 376.* — Ces neuf constantes sont liées

par six équations de condition. Ces équations sont très simples quand il s'agit de deux systèmes d'axes rectangulaires, et on les trouve dans tous les traités pour ce cas particulier; mais il n'en est pas de même quand les axes sont obliques, et parfois les commençants ne se doutent pas de l'existence dans ce cas de relations analogues à celles qui leur sont démontrées pour des axes rectangulaires; nous traiterons donc la question d'une manière générale.

Désignons, comme plus haut, par A, B, C, les cosinus des angles YOZ, ZOX, XOY; et soient a, b, c, ceux des angles yOz, zOx, xOy, on verra immédiatement qu'on a les six relations suivantes :

$$l^2 + m^2 + n^2 + 2amn + 2bnl + 2clm = 1,$$
$$l'^2 + m'^2 + n'^2 + 2am'n' + 2bn'l' + 2cl'm' = 1,$$
$$l''^2 + m''^2 + n''^2 + 2am''n'' + 2bn''l'' + 2cl''n'' = 1,$$
$$l'l'' + m'm'' + n'n'' + a(m'n'' + n'm'') + b(n'l'' + l'n'') + c(l'm'' + m'l'') = \mathrm{A},$$
$$l''l + m''m + n''n + a(m''n + n''m) + b(n''l + l''n) + c(l''m + m''l) = \mathrm{B},$$
$$ll' + mm' + nn' + a(mn' + nm') + b(nl' + ln') + c(lm' + ml') = \mathrm{C}.$$

Si l'on veut exprimer que le système $0, xyz$ est rectangulaire on devra faire $a = b = c = 0$; et si le système 0,XYZ est rectangulaire, on posera $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C} = 0$.

383. Les équations du n° 376 donnent x, y, z en fonction de X, Y, Z. Si on les résout par rapport à ces dernières variables, on a des relations de la forme

$$\mathrm{X} = \lambda x + \lambda' y + \lambda'' z,$$
$$\mathrm{Y} = \mu x + \mu' y + \mu'' z,$$
$$\mathrm{Z} = \nu x + \nu' y + \nu'' z,$$

dans lesquelles les constantes sont évidemment liées par des équations de condition analogues à celles établies ci-dessus, savoir :

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2\mathrm{A}\mu\nu + 2\mathrm{B}\nu\lambda + 2\mathrm{C}\lambda\mu = 1,$$
$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 + 2\mathrm{A}\mu'\nu' + 2\mathrm{B}\nu'\lambda' + 2\mathrm{C}\lambda'\mu' = 1,$$
$$\lambda''^2 + \mu''^2 + \nu''^2 + 2\mathrm{A}\mu''\nu'' + 2\mathrm{B}\nu''\lambda'' + 2\mathrm{C}\lambda''\mu'' = 1,$$
$$\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'' + \mathrm{A}(\mu'\nu'' + \nu'\mu'') + \mathrm{B}(\nu'\lambda'' + \lambda'\nu'') + \mathrm{C}(\lambda'\mu'' + \mu'\lambda'') = a,$$
$$\lambda''\lambda + \mu''\mu + \nu''\nu + \mathrm{A}(\mu''\nu + \nu''\mu) + \mathrm{B}(\nu''\lambda + \lambda''\nu) + \mathrm{C}(\lambda''\mu + \mu''\lambda) = b,$$
$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' + \mathrm{A}(\mu\nu' + \nu\mu') + \mathrm{B}(\nu\lambda' + \lambda\nu') + \mathrm{C}(\lambda\mu' + \mu\lambda') = c.$$

Ces équations permettent, comme celles du n° précédent, d'exprimer que l'un ou l'autre des deux systèmes d'axes est rectangulaire. Les

coefficients λ, μ, ν, λ',... sont, d'ailleurs, liés à l, m, n, l',... par des relations faciles à trouver; en effet, si on fait

$$x = 1,\ y = 0,\ z = 0, \quad \text{on aura} \quad X = \lambda,\ Y = \mu,\ Z = \nu\ ;$$

en substituant dans les équations du nº 376 on obtiendra trois équations d'où l'on pourra tirer λ, μ, ν, en fonction de l, m,... n''. On pourra trouver de même λ', μ',... et on aura ainsi

$$\begin{array}{lll} l\lambda + l'\mu + l''\nu = 1, & l\lambda' + l'\mu' + l''\nu' = 0, & l\lambda'' + l'\mu'' + l''\nu'' = 0, \\ m\lambda + m'\mu + m''\nu = 0, & m\lambda' + m'\mu' + m''\nu' = 1, & m\lambda'' + m'\mu'' + m''\nu'' = 0, \\ n\lambda + n'\mu + n''\nu = 0, & n\lambda' + n'\mu' + n''\nu' = 0, & n\lambda'' + n'\mu'' + n''\nu'' = 1. \end{array}$$

On obtiendra d'une manière analogue les relations

$$\begin{array}{lll} \lambda l + \lambda' m + \lambda'' n = 1, & \lambda l' + \lambda' m' + \lambda'' n' = 0, & \lambda l'' + \lambda' m'' + \lambda'' n'' = 0, \\ \mu l + \mu' m + \mu'' n = 0, & \mu l' + \mu' m' + \mu'' n' = 1, & \mu l'' + \mu' m'' + \mu'' n'' = 0, \\ \nu l + \nu' m + \nu'' n = 0, & \nu l' + \nu' m' + \nu'' n' = 0, & \nu l'' + \nu' m'' + \nu'' n'' = 1. \end{array}$$

Si l'on voulait calculer les cosinus des angles que les axes des deux systèmes font entre eux, on les trouverait sans peine en suivant la marche indiquée au nº 381. En désignant par α, β, γ les cosinus des angles que OX fait avec les trois axes Ox, Oy, Oz, par α', β', γ' et α'', β'', γ'' les cosinus relatifs à OY et OZ, on aurait

$$\begin{array}{lll} \alpha = l + bn + cm, & \alpha' = l' + bn' + cm', & \alpha'' = l'' + bn'' + cm'', \\ \beta = m + cl + an, & \beta' = m' + cl' + an', & \beta'' = m'' + cl'' + an'', \\ \gamma = n + am + bl, & \gamma' = n' + am' + bl', & \gamma'' = n'' + am'' + bl''. \end{array}$$

Il est clair que ces cosinus pourraient aussi être obtenus au moyen des relations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \alpha = \lambda + B\nu + C\mu, & \beta = \lambda' + B\nu' + C\mu', & \gamma = \lambda'' + B\nu'' + C\mu'', \\ \alpha' = \mu + C\lambda + A\nu, & \beta' = \mu' + C\lambda' + A\nu', & \gamma' = \mu'' + C\lambda'' + A\nu'', \\ \alpha'' = \nu + A\mu + B\lambda, & \beta'' = \nu' + A\mu' + B\lambda', & \gamma'' = \nu'' + A\mu'' + B\lambda''. \end{array}$$

384. *Formules pour passer des coordonnées rectilignes aux coordonnées polaires.* — Nous ne nous occuperons ici que des coordonnées polaires telles qu'elles ont été définies au nº 370. On a vu que si on appelle x', y', z' les coordonnées du pôle, les coordonnées rectilignes x, y, z d'un point quelconque sont liées à ses coordonnées polaires par les relations

$$x = x' + l\rho, \quad y = y' + m\rho, \quad z = z' + n\rho.$$

Ainsi que nous l'avons déjà fait observer les coordonnées polaires l, m, n, ρ, qui sont au nombre de quatre en apparence, se réduisent en réalité à trois, à cause d'une équation de condition qui lie les coefficients de projection l, m, n. Ces coefficients sont, en effet, les coordonnées d'un point dont la distance à l'origine est l'unité. On a, par conséquent,

$$l^2 + m^2 + n^2 + 2amn + 2bnl + 2clm = 1.$$

Il résulte de là que quand on donne trois quantités l', m', n' proportionnelles à l, m, n, ces dernières constantes peuvent être déterminées; car si on pose

$$\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{1}{\lambda},$$

on déduit aisément des relations ci-dessus

$$\pm \lambda = \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2 + 2am'n' + 2bn'l' + 2cl'm'},$$

$$l = \frac{l'}{\pm \lambda}, \quad m = \frac{m'}{\pm \lambda}, \quad n = \frac{n'}{\pm \lambda}.$$

On voit qu'à cause du double signe de λ les quantités l', m', n' déterminent deux directions opposées entre lesquelles on peut choisir celle qui convient, d'après la nature de la question que l'on traite.

Considérons λ comme positif; alors l', m', n' sont les coordonnées rectilignes du point pris à la distance λ de l'origine, sur la droite qui va de cette origine au point dont les coordonnées sont l, m, n.

En effet, en plaçant le pôle à l'origine, les coordonnées polaires de ce point sont l, m, n et $\rho = \lambda$; et ses coordonnées rectilignes se déduisent des formules de transformation écrites plus haut en y faisant

$$x' = y' = z' = 0\,;$$

ces coordonnées sont donc

$$x = l\lambda = l', \quad y = m\lambda = m', \quad z = n\lambda = n'. \qquad \text{C. Q. F. D}$$

Les coordonnées l', m', n' déterminent évidemment la direction de la droite; on peut donc les appeler *coefficients de direction*; ceux-ci ne diffèrent des coefficients de projection que par la présence du facteur λ.

385. *Distance d'un point à un plan et équation du plan.* — Soient trois axes rectilignes O, xyz, et un plan ABC (fig. 132); abaissons de l'origine une perpendiculaire OP sur le plan, et prenons l'une des directions de cette perpendiculaire, PK par exemple, comme axe du plan;

désignons par α, β, γ les angles de PK avec les trois axes positifs et par p la distance OP.

Soit un point quelconque M, ayant pour coordonnées x, y, z, situé à une distance du plan $MQ = d$. Joignons OM et projetons orthogonalement cette droite sur PK. Sa projection sera $p \pm d$, le signe $+$ convenant au cas où le point M se trouve par rapport au plan du côté de l'axe PK, et le signe $-$ au cas où ce point se trouve de l'autre côté du plan. Mais cette projection est aussi égale à la somme des projections orthogonales des coordonnées du point M sur l'axe PK (n° 375); de là on déduit immédiatement

$$\pm d = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p.$$

Les points du plan sont caractérisés par la condition $d = 0$. Donc on a pour l'équation du plan

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0.$$

386. *Toute équation du premier degré représente un plan.* — On peut, pour le démontrer, supposer les axes rectangulaires; car, en passant d'un système d'axes obliques à des axes rectangulaires, on ne change pas le degré de l'équation. Donc, pour prouver que l'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

représente un plan, il suffira de faire voir qu'on peut toujours trouver des valeurs de α, β, γ et p qui la rendent identique à

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0;$$

car alors elle représentera un plan dont la distance à l'origine est p et dont l'axe fait avec les trois axes positifs Ox, Oy, Oz, supposés rectangulaires, des angles α, β, γ. Or, en identifiant les deux équations et en désignant par λ une inconnue auxiliaire, on a

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{-p}{D} = \lambda, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

d'où l'on tire pour les inconnues les valeurs réelles

$$\lambda = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}; \ \cos\alpha = A\lambda, \ \cos\beta = B\lambda, \ \cos\gamma = C\lambda, \ p = -D\lambda.$$

Il est clair que si l'on veut que p soit positif il faut donner à λ le signe de $-$ D.

387. *Les axes étant rectangulaires, trouver la distance du point* x', y', z' *au plan* $Ax + By + Cz + D = 0$. — Substituons à $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, p leurs valeurs trouvées ci-dessus (n° 386), dans la formule

$$\pm d = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p.$$

On aura

$$d = \pm \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Pour connaître le signe qui convient, écrivons le numérateur de cette expression sous la forme

$$C\left(\frac{A}{C}x' + \frac{B}{C}y' + z' + \frac{D}{C}\right).$$

Suivant que ce produit est positif ou négatif il faudra, si l'on veut que d soit positif, prendre le signe $+$ ou le signe $-$. Or le signe de C est connu. Il ne reste donc qu'à déterminer le signe de la parenthèse ; à cet effet, menons par le point x', y', z' une parallèle à l'axe des z et désignons par z_1 l'ordonnée du point où cette droite perce le plan ; on aura

$$Ax' + By' + Cz_1 + D = 0; \quad \text{d'où} \quad \frac{A}{C}x' + \frac{B}{C}y' + z' + \frac{D}{C} = z' - z_1.$$

Si z' est plus grand que z_1 nous dirons que le point x', y', z' est au-dessus du plan, et on voit immédiatement que dans ce cas la quantité entre parenthèses dont nous cherchons le signe est positive. Donc, en admettant que C ait été rendu positif dans l'équation du plan, il faudra prendre pour d le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que le point x', y', z' est au-dessus ou au-dessous du plan. Si C était nul on devrait dans ce raisonnement remplacer l'axe des z par l'un des deux autres.

388. *Équation du plan en fonction de ses coordonnées à l'origine.* — En suivant la même marche qu'au n° 234, on trouve pour cette équation

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

389. *Équations de la ligne droite.* — Deux équations du premier degré représentent une ligne droite, et réciproquement ; car, toute droite peut être considérée comme l'intersection de deux plans, chacun desquels est représenté par une équation du premier degré. Il est avantageux d'écrire les équations de la ligne droite en fonction de ses coefficients de

projection l, m, n et des coordonnées x', y', z' d'un de ses points. On les obtient immédiatement au moyen des formules du n° 384 desquelles on tire

$$(a)\qquad \frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n}=\rho.$$

Ces équations contiennent en apparence six paramètres, l, m, n, x', y', z'. Mais on peut réduire ceux-ci à quatre. En effet, on peut écrire

$$x=\frac{l}{n}z+\left(x'-\frac{l}{n}z'\right),\quad y=\frac{m}{n}z+\left(y'-\frac{m}{n}z'\right);$$

et si on pose

$$\frac{l}{n}=a,\quad \frac{m}{n}=b,\quad x'-\frac{l}{n}z'=p,\quad y'-\frac{l}{n}z'=q,$$

les équations de la droite deviennent

$$(b)\qquad x=az+p,\quad y=bz+q,$$

et ne renferment plus que les quatre paramètres a, b, p, q ; cela revient à substituer aux coefficients de projection l, m, n les coefficients de direction a, b, 1, qui leur sont proportionnels, et à prendre pour le point x', y', z' la trace de la droite dans le plan des xy.

Quand la droite est parallèle au plan des xy, on a $n=0$ et a, b, p, q seraient infinis, ce qu'on ne peut admettre ; mais alors on peut prendre pour coefficients de direction les quotients

$$\frac{l}{l}=1,\quad \frac{m}{l}=\mu,\quad \frac{n}{l}=0;$$

et pour x', y', z' les coordonnées de la trace de la droite sur le plan yz, coordonnées que nous désignerons par

$$x'=0,\quad y'=q,\quad z'=r;$$

on aura ainsi

$$(c)\qquad y=\mu x+q,\quad z=r.$$

Enfin, si la droite est parallèle au plan des yz en même temps qu'au plan des xy, c'est-à-dire si elle est parallèle à l'axe des y, μ et q deviennent infinis dans les équations (c) ; mais alors les coefficients de projection sont 0, 1, 0 ; de plus on peut prendre pour le point x', y', z', la trace de la droite dans le plan des xz, d'où $y'=0$; et si l'on pose $x'=p$; $z'=r$ on trouve pour les équations de la droite

$$(d)\qquad x=p,\quad z=r.$$

On voit par là que les équations (c) ne peuvent être déduites de (b), et que de même, les équations (d) ne peuvent être déduites de (b) ni de (c), à moins de supposer aux paramètres des valeurs infinies. Les équations (a) offrent, au contraire, cet avantage qu'on peut en déduire toutes les autres formes; en outre la symétrie de ces équations en rend l'emploi très commode ainsi que nous le ferons voir par des exemples (n° 390).

Quand les équations de la ligne droite sont

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

on peut les ramener à la forme (a) de la manière suivante : en éliminant successivement y et x on obtient les équations des plans projetants parallèles aux axes Ox et Oy, (n° 361); ces équations sont

$$(AB' - BA')\,x + (CB' - BC')\,z + DB' - BD' = 0,$$
$$(AB' - BA')\,y + (AC' - CA')\,z + AD' - DA' = 0.$$

On pourra donc prendre pour coefficients de direction

$$l' = CB' - BC', \quad m' = AC' - CA', \quad n' = BA' - AB'$$

et pour x', y', z' les coordonnées de la trace de la droite sur l'un quelconque des trois plans des coordonnées.

390. *Points de rencontre d'une droite et d'une surface.* — La forme symétrique des équations (a) en rend l'emploi très commode. Supposons, par exemple, qu'on veuille trouver les points de rencontre de la droite et de la surface représentée par l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$. Les coordonnées de ces points seraient connues si l'on connaissait les rayons vecteurs correspondants; car, en désignant par x, y, z, les coordonnées de l'un de ces points et par ρ son rayon vecteur on a

$$x = x' + l\rho, \quad y = y' + m\rho, \quad z = z' + n\rho;$$

or, ces coordonnées doivent vérifier l'équation de la surface; on a donc, pour déterminer ρ, l'équation

$$\varphi(x' + l\rho, \quad y' + m\rho, \quad z' + n\rho) = 0.$$

Si la surface est algébrique et du degré m, on trouvera m valeurs de ρ qui détermineront les m points d'intersection.

Remarque. — On peut observer que l'équation que nous venons de trouver n'est autre que l'équation en coordonnées polaires de la surface proposée; car l, m, n et ρ, peuvent être considérées comme les coordonnées polaires d'un point quelconque de cette surface.

391. *Plan tangent en un point donné d'une surface quelconque.* — Au moyen de la formule de Taylor on peut développer l'équation ci-dessus (n° 390) suivant les puissances croissantes de ρ; on aura

$$\varphi(x', y', z') + t\rho + s\rho^2 + \cdots = 0.$$

Dans cette équation le coefficient t a pour expression

$$t = l\varphi'(x') + m\varphi'(y') + n\varphi'(z'),$$

en désignant pour abréger par $\varphi'(x')$ la dérivée de la fonction $\varphi(x, y, z)$, prise par rapport à x, et dans laquelle les variables sont remplacées par x', y', z'; les fonctions $\varphi'(y')$ et $\varphi'(z')$ ont une signification analogue.

Si le point x', y', z' est un point de la surface, arbitrairement choisi d'ailleurs, on a $\varphi(x', y', z') = 0$ et une des racines de l'équation en ρ est nulle; ceci résulte de ce que toute droite menée par le point x', y', z' coupe la surface en ce point.

Une seconde racine de cette équation s'annule quand on a

$$l\varphi'(x') + m\varphi'(y') + n\varphi'(z') = 0;$$

on voit donc que quand les coefficients de projection de la droite satisfont à cette dernière équation de condition, on a une droite rencontrant la surface en deux points coïncidents; c'est ce qu'on nomme une *tangente* à la surface au point x', y', z'. En éliminant l, m, n entre cette équation de condition et les équations de la droite on trouve la relation

$$(x - x')\varphi'(x') + (y - y')\varphi'(y') + (z - z')\varphi'(z') = 0.$$

Celle-ci est l'équation à laquelle doivent satisfaire les coordonnées x, y, z, d'un point pris à volonté sur l'une quelconque des tangentes à la surface menées par le point x', y', z'. Comme elle est du premier degré on en conclut que *toutes les droites tangentes à une surface, en un quelconque de ses points, se trouvent dans un même plan que l'on appelle le plan tangent.*

Si l'équation de la surface est algébrique, on peut la rendre homogène en y rétablissant l'unité, ce qui se fait en remplaçant x, y, z par les rapports $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}$, où l'on suppose $u = 1$. La fonction $\varphi(x, y, z, u)$ étant ainsi rendue homogène on a l'identité

$$x\varphi'(x) + y\varphi'(y) + z\varphi'(z) + u\varphi'(u) = m\varphi(x, y, z, u),$$

m étant le degré de la fonction. En remplaçant x, y, z par x', y', z', et remarquant que $\varphi(x', y', z', u') = 0$, on obtient

$$u'\varphi'(u') = -[x'\varphi'(x') + y'\varphi'(y') + z'\varphi'(z')];$$

et comme $u = u' = 1$ on peut écrire l'équation du plan tangent sous la forme

$$x\varphi'(x') + y\varphi'(y') + z\varphi'(z') + u\varphi'(u') = 0 .$$

392. Nous n'étudierons pas en détail les propriétés des quadriques, c'est-à-dire des surfaces du second degré, mais nous placerons ici, quelques propositions analogues à celles que nous avons démontrées au n° 239. Soit une surface du second degré, représentée par l'équation

$$\varphi(x, y, z) \equiv ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0.$$

Les rayons vecteurs des points où elle est coupée par la droite

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n} = \rho$$

sont donnés par l'équation du second degré

$$s\rho^2 + t\rho + \varphi(x', y', z') = 0,$$

dans laquelle on a fait

$$s = al^2 + a'm^2 + a''n^2 + 2bmn + 2b'nl + 2b''lm,$$
$$t = l\varphi'(x') + m\varphi'(y') + n\varphi'(z');$$

et de là on déduit des conséquences importantes que nous rappellerons brièvement; les démonstrations sont semblables à celles du n° 239.

1° *Quand on a*

$$l\varphi'(x') + m\varphi'(y') + n\varphi'(z') = 0$$

la droite donnée est une corde dont le milieu est au point x', y', z'.

2° Toute corde passant par le point x', y', z' déterminé par les relations

$$\varphi'(x') = 0, \quad \varphi'(y') = 0, \quad \varphi'(z') = 0$$

est divisée en ce point en deux parties égales; ce point x', y', z' est le *centre* de la surface.

3° L'équation

$$l\varphi'(x) + m\varphi'(y) + n\varphi'(z) = 0$$

est celle du lieu géométrique du milieu des cordes dont la direction est déterminée par les coefficients l, m, n; c'est l'équation du *plan diamétral* conjugué de ces cordes parallèles.

4° *Si l'on a $s = 0$ un des points de rencontre est à l'infini;* si en même temps $t = 0$, le deuxième point de rencontre est également à l'infini; enfin si on a de plus $\varphi(x', y', z') = 0$ la droite est sur la quadrique.

5° Si on a

$$t^2 - 4s.\varphi(x', y', z') = 0$$

les deux points de rencontre coïncident et la droite est *tangente à la quadrique.*

6° Si dans cette dernière relation on remplace x', y', z' par les variables x, y, z, on obtient l'équation

$$\big(l\varphi'(x) + m\varphi'(y) + n\varphi'(z)\big)^2 - 4s.\varphi(x, y, z) = 0$$

qui représente *le cylindre circonscrit à la quadrique*, ayant ses génératrices parallèles aux droites dont la direction est déterminée par l, m, n. La forme de cette équation montre que le cylindre et la quadrique se touchent le long d'une courbe située dans le plan diamétral conjugué des génératrices du cylindre.

7° Si l'on élimine l, m, n entre les équations

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n} \quad \text{et} \quad t^2 - 4s.\varphi(x', y', z') = 0,$$

on obtient l'équation *du cône circonscrit à la quadrique*, ayant son sommet au point x', y', z'. En désignant par S et T ce que deviennent s et t, quand on y remplace l, m, et n respectivement par $x - x'$, $y - y'$ et $z - z'$, il vient

$$T^2 - 4\varphi(x', y', z').S = 0.$$

Une transformation en tout semblable à celle du n° 239, 7°, permet de mettre cette équation du cône circonscrit sous la forme

$$P^2 - 4\varphi(x', y', z').\varphi(x, y, z) = 0.$$

Celle-ci manifeste le contact du cône et de la quadrique le long d'une courbe située dans le plan $P = 0$, ou

$$x\varphi'(x') + y\varphi'(y') + z\varphi'(z') + u\varphi'(u') = 0;$$

ce plan est le *plan polaire du point* x', y', z'.

393. *Coordonnées tangentielles dans l'espace.* — L'équation d'un plan, en fonction de ses coordonnées à l'origine, est

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1;$$

et si on désigne par u, v, w, les inverses de ces coordonnées changées de signe, cette équation devient

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

Les constantes u, v, w, qui déterminent la position d'un plan peuvent être considérées comme trois *coordonnées du plan;* quand on fait varier x, y, z, les coordonnées du plan restant invariables, l'équation ci-dessus représente le plan, parce qu'elle est vérifiée par les coordonnées de tous les points du plan ; mais si on regarde, au contraire, x, y, z comme des constantes, u, v, w comme des variables, cette équation est vérifiée par les coordonnées de tous les plans qui passent par le point fixe x, y, z. C'est pourquoi on peut dire que l'équation est alors celle du point fixe.

Il résulte donc de là que l'équation

$$Ax + By + Cz + 1 = 0$$

représente un plan dont les coordonnées sont A, B, C ; et que l'équation

$$Au + Bv + Cw + 1 = 0$$

représente un point dont les coordonnées cartésiennes sont A, B, C.

394. *Équation d'une surface en coordonnées tangentielles.* — Étant donnée une équation $\varphi(U, V, W) = 0$, il existe une infinité de systèmes de valeurs U, V, W, qui la vérifient; c'est-à-dire qu'il y a une infinité de plans dont les coordonnées satisfont à cette équation. On peut démontrer que ces plans enveloppent généralement une certaine surface, laquelle est touchée, en chacun de ses points, par un des plans enveloppants.

En effet, considérons un de ces plans P, et deux autres P′ et P″, qui en soient infiniment voisins. Ces plans se couperont en un point A, dont nous allons chercher l'équation. Soit

$$AU + BV + CW + 1 = 0$$

l'équation demandée. Celle-ci devra être vérifiée par les coordonnées du plan P, que nous désignerons par u, v, w, et par celles des deux plans infiniment voisins; les coordonnées de ces derniers plans seront u, v, w, augmentées de leurs différentielles ; nous ferons usage des caractéristiques d et δ pour distinguer celles qui déterminent le plan P′ de celles qui déterminent le plan P″. Alors A, B, C devront satisfaire aux trois équations de condition

$$\begin{aligned} Au + Bv + Cw + 1 &= 0, \\ A\,du + B\,dv + C\,dw &= 0, \\ A\,\delta u + B\,\delta v + C\,\delta w &= 0. \end{aligned}$$

Comme on a aussi

$$\varphi'(u)du + \varphi'(v)dv + \varphi'(w)dw = 0,$$
$$\varphi'(u)\delta u + \varphi'(v)\delta v + \varphi'(w)\delta w = 0,$$

on déduit des quatre dernières équations

$$\begin{aligned} \mathrm{A} : \mathrm{B} : \mathrm{C} &= \varphi' u : \varphi' v : \varphi' w \\ &= dv.\delta w - dw.\delta v : dw.\delta u - du.\delta w : du.\delta v - dv.\delta u. \end{aligned}$$

Et comme l'équation du point demandé, eu égard à la première condition, revient à

$$\mathrm{A}(\mathrm{U} - u) + \mathrm{B}(\mathrm{V} - v) + \mathrm{C}(\mathrm{W} - w) = 0,$$

on trouve finalement

$$\mathrm{U}\varphi'(u) + \mathrm{V}\varphi'(v) + \mathrm{W}\varphi'(w) - [u\varphi'(u) + v\varphi'(v) + w\varphi'(w)] = 0.$$

On peut rendre les équations homogènes en y introduisant l'unité représentée par les lettres T et t, et en suivant la même marche qu'au nº 391 on obtient l'équation

$$\mathrm{U}\varphi'(u) + \mathrm{V}\varphi'(v) + \mathrm{W}\varphi'(w) + \mathrm{T}\varphi'(t) = 0.$$

Cette équation ne dépend que des coordonnées du plan P. Elle détermine donc un point fixe A commun au plan P et à tous les plans qui en sont infiniment voisins et qui satisfont à l'équation donnée. Tous ces plans se coupent donc deux à deux suivant des droites situées dans le plan P et passant par le point A, qu'on peut nommer le *point caractéristique* du plan P. Pour prouver que l'ensemble de ces points caractéristiques forme une certaine surface S, nous chercherons l'équation de cette surface en coordonnées cartésiennes; à cet effet, remarquons que les coordonnées du point A ont pour expression (nº 393)

$$x = \frac{\varphi'(u)}{\varphi'(t)}, \quad y = \frac{\varphi'(v)}{\varphi'(t)}, \quad z = \frac{\varphi'(w)}{\varphi'(t)},$$

et que les variables u, v, w sont liées par l'équation

$$\varphi(u, v, w, t) = 0.$$

Entre ces quatre équations homogènes on pourra éliminer u, v, w, t, et l'équation résultante en x, y, z, sera celle du lieu du point A; c'est-à-dire que ce sera de la surface S en coordonnées cartésiennes.

On prouvera sans peine que *chaque plan* P *est un plan tangent à la surface* S, *en son point caractéristique* A. En effet, si on considère sur la

surface S un point quelconque A′, infiniment voisin de A, la droite AA′ sera une tangente à la surface au point A. Mais A′ est le point caractéristique d'un certain plan P′, infiniment voisin de P et qui, par conséquent, coupe P suivant une droite passant par A ; donc la tangente AA′ est contenue dans le plan P ; par conséquent, une tangente quelconque AA′ menée à la surface S par le point A se trouve dans le plan P. Ce plan P est donc bien le plan tangent à la surface S au point A.

Il est ainsi démontré que *toute équation* $\varphi(U, V, W) = 0$ *représente la surface enveloppe des plans dont les coordonnées vérifient cette équation.* Cette surface peut évidemment être imaginaire.

La démonstration prouve en même temps que *l'équation*

$$U\varphi'(u) + V\varphi'(v) + W\varphi'(w) + T\varphi'(t) = 0$$

est celle du point de contact du plan dont les coordonnées sont u, v, w, et elle montre de plus comment on peut *trouver l'équation de la surface* S *en coordonnées cartésiennes.*

Il serait facile de trouver d'une manière analogue l'équation d'une surface en coordonnées tangentielles, connaissant son équation en coordonnées cartésiennes. Nous n'insisterons pas ici sur ce point, attendu que nous devrons y revenir (n° 410).

C'est parce que tout plan dont les coordonnées vérifient l'équation $\varphi(U, V, W) = 0$ est tangent à la surface S, que ces coordonnées ont reçu le nom de *coordonnées tangentielles.*

395. Un système de deux équations, en coordonnées tangentielles, représente les plans tangents, en nombre infini, qui touchent les deux surfaces que ces équations représentent quand on les considère isolément; et toute équation qui est une conséquence de celles dont il s'agit, représente une surface touchée par les plans tangents communs aux deux premières surfaces.

En particulier deux équations du premier degré représentent un faisceau de plans passant par la droite qui joint les points représentés par ces deux équations.

Trois équations représentent les plans tangents à trois surfaces; et si ces trois équations sont du premier degré, elles représentent le plan qui passe par les trois points dont les équations sont données.

396. *Distance d'un point à un plan en coordonnées tangentielles.* — Soit un point ayant pour équation, en coordonnées tangentielles,

$$Au + Bv + Cw + 1 = 0,$$

et un plan ayant pour coordonnées u_0, v_0, w_0. Ce plan aura pour équation, en coordonnées cartésiennes, que nous supposerons, d'ailleurs, rectangulaires,

$$u_0 x + v_0 y + w_0 z + 1 = 0,$$

et les coordonnées cartésiennes du point seront A, B, C. La distance du point au plan sera donc donnée par la formule

$$d = \frac{Au_0 + Bv_0 + Cw_0 + 1}{\pm\sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}},$$

le signe étant $+$ ou $-$ suivant que le point se trouve d'un côté du plan ou du côté opposé.

397. *Classe d'une surface.* — Le degré d'une équation, en coordonnées ponctuelles, indique *l'ordre* de la surface, et une surface d'ordre n est coupée par une droite en n points. Le degré d'une équation en coordonnées tangentielles indique la *classe* de la surface, et une surface de la n^e classe est telle que par une droite on peut lui mener n plans tangents.

En effet, soit $\varphi(u, v, w) = 0$ l'équation d'une surface; une droite quelconque est déterminée par deux points, c'est-à-dire par deux équations du premier degré, savoir :

$$au + bv + cw + d = 0, \quad a'u + b'v + c'w + d' = 0.$$

Les coordonnées des plans tangents à la surface, qui passent par la droite donnée, s'obtiendront donc en résolvant ces trois équations dont l'une est du n^e degré et dont les deux autres sont du premier degré. Il y aura donc n solutions.

Les surfaces de la première classe se réduisent à des points. Les quadriques sont des surfaces de la deuxième classe, puisque par une droite on peut mener deux plans tangents à une surface du second degré. Une surface de la deuxième classe peut se réduire à deux points.

§ 7. Coordonnées tétraédriques ponctuelles et tangentielles.

398. *Coordonnées tétraédriques ponctuelles.* — Soit un tétraèdre quelconque, appelé tétraèdre de référence, et soient les équations des quatre faces

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on désigne par p_1, p_2, p_3, p_4 les distances d'un point x, y, z aux quatre faces du tétraèdre, affectées d'un signe convenable, on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} p_1 &= \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}, \\ p_2 &= \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}, \\ p_3 &= \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2}}, \\ p_4 &= \frac{a_4x + b_4y + c_4z + d_4}{\sqrt{a_4^2 + b_4^2 + c_4^2}}. \end{aligned}\right.$$

Trois des quantités p_1, p_2, p_3, p_4 permettent de déterminer la position du point ; on les appelle coordonnées *tétraédriques* ou *quadrangulaires* de ce point.

Il est clair que les coordonnées p_1, p_2, p_3, p_4 sont liées par une équation homogène qu'on obtiendrait sans peine en éliminant x, y et z entre les quatre équations (2); et, par conséquent, on peut remplacer ces quantités par quatre autres qui leur soient proportionnelles. On peut même donner des coordonnées tétraédriques une définition plus générale qui est la suivante :

Les coordonnées tétraédriques d'un point sont quatre nombres ayant entre eux les mêmes rapports que les distances de ce point aux faces d'un tétraèdre, chaque distance étant multipliée par une constante arbitraire, mais fixe.

En désignant les coordonnées tétraédriques d'un point par x_1, x_2, x_3, x_4

et les distances du point aux faces du tétraèdre de référence, prises avec les signes convenables, par p_1, p_2, p_3, p_4, on aura donc

$$(3) \qquad \rho x_1 = \varepsilon_1 p_1, \quad \rho x_2 = \varepsilon_2 p_2, \quad \rho x_3 = \varepsilon_3 p_3, \quad \rho x_4 = \varepsilon_4 p_4.$$

Le facteur de proportionnalité ρ est totalement indéterminé. Quant aux facteurs ε, ce sont des constantes dont on peut disposer pour faciliter la résolution des questions que l'on traite.

399. *Formules pour passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées tétraédriques d'un point et réciproquement.* — Si l'équation d'une surface est donnée en coordonnées rectangulaires sous la forme $f(x, y, z) = 0$, il suffit pour trouver son équation en coordonnées tétraédriques, de tirer des équations (2) les valeurs de x, y, z en fonction de p_1, p_2, p_3, p_4; ou, en ayant égard aux équations (3), en fonction de x_1, x_2, x_3, x_4 et de substituer les valeurs ainsi obtenues dans l'équation proposée.

On observera qu'il est permis de poser

$$\varepsilon_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}, \quad \varepsilon_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2 + c_3^2},$$
$$\varepsilon_4 = \sqrt{a_4^2 + b_4^2 + c_4^2},$$

sans que ces constantes cessent d'être arbitraires; car on peut leur attribuer telle valeur que l'on veut en multipliant par des facteurs convenables les équations (1), ce qui modifie les constantes a, b, c sans changer la signification des équations.

Les équations (2) deviennent ainsi

$$(4) \qquad \begin{cases} \rho x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1, \\ \rho x_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2, \\ \rho x_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3, \\ \rho x_4 = a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4. \end{cases}$$

On aura donc, en désignant les mineurs du déterminant

$$R = (a_1\, b_2\, c_3\, d_4)$$

par $A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots$

$$\begin{aligned} Rx &= \rho\,(A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4), \\ Ry &= \rho\,(B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3 + B_4 x_4), \\ Rz &= \rho\,(C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + C_4 x_4), \\ R\;\; &= \rho\,(D_1 x_1 + D_2 x_2 + D_3 x_3 + D_4 x_4); \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4}{D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 + D_4x_4}, \\ y &= \frac{B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4x_4}{D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 + D_4x_4}, \\ z &= \frac{C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + C_4x_4}{D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 + D_4x_4}; \end{aligned}\right.$$

ce sont les valeurs par lesquelles il faut remplacer x, y, z dans l'équation $f(x, y, z) = 0$ pour avoir l'équation de la surface en coordonnées tétraédriques ponctuelles. Elle sera évidemment homogène par rapport à ces coordonnées, et du même degré que l'équation primitive.

Le problème inverse se résoudrait en remplaçant, dans l'équation en coordonnées tétraédriques, x_1, x_2, x_3, x_4 par leurs valeurs tirées des équations (4); le dénominateur commun ρ disparaîtrait évidemment de l'équation en x, y, z.

On voit, par ce qui précède, qu'une équation du premier degré en coordonnées tétraédriques ponctuelles représente un plan et une équation du second degré une quadrique.

400. *Coordonnées tétraédriques tangentielles.* — Les coordonnées des sommets du tétraèdre de référence s'obtiennent évidemment en résolvant par rapport à x, y et z les équations (1) considérées trois à trois. En conservant les notations admises plus haut, on trouvera ainsi pour les sommets A, B, C, D les systèmes suivants :

$$A \left\{\begin{aligned} x &= \frac{A_1}{D_1}, \\ y &= \frac{B_1}{D_1}, \\ z &= \frac{C_1}{D_1}; \end{aligned}\right. \quad B \left\{\begin{aligned} x &= \frac{A_2}{D_2}, \\ y &= \frac{B_2}{D_2}, \\ z &= \frac{C_2}{D_2}; \end{aligned}\right. \quad C \left\{\begin{aligned} x &= \frac{A_3}{D_3}, \\ y &= \frac{B_3}{D_3}, \\ z &= \frac{C_3}{D_3}; \end{aligned}\right. \quad D \left\{\begin{aligned} x &= \frac{A_4}{D_4}, \\ y &= \frac{B_4}{D_4}, \\ z &= \frac{C_4}{D_4}. \end{aligned}\right.$$

Donc, en coordonnées rectangulaires tangentielles, les équations de ces points sont les suivantes :

$$\begin{aligned} &A \ldots A_1u + B_1v + C_1w + D_1 = 0, \\ &B \ldots A_2u + B_2v + C_2w + D_2 = 0, \\ &C \ldots A_3u + B_3v + C_3w + D_3 = 0, \\ &D \ldots A_4u + B_4v + C_4w + D_4 = 0. \end{aligned}$$

Soient q_1, q_2, q_3, q_4 les distances de ces sommets à un plan ayant pour coordonnées tangentielles u, v, w, ces distances étant affectées du signe $+$ ou du signe $-$ suivant qu'elles tombent d'un côté du plan ou du côté opposé. On aura (nº 396),

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} q_1 &= \frac{A_1u + B_1v + C_1w + D_1}{D_1\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\\ q_2 &= \frac{A_2u + B_2v + C_2w + D_2}{D_2\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\\ q_3 &= \frac{A_3u + B_3v + C_3w + D_3}{D_3\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\\ q_4 &= \frac{A_4u + B_4v + C_4w + D_4}{D_4\sqrt{u^2+v^2+w^2}}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on se donne des quantités proportionnelles à q_1, q_2, q_3, q_4, on pourra les considérer comme des coordonnées du plan, puisqu'elles permettront de déterminer u, v et w, on pourra même donner, de ces coordonnées, qui sont les coordonnées tétraédriques du plan, la définition suivante, qui est plus générale :

Les coordonnées tétraédriques d'un plan sont quatre nombres ayant entre eux le même rapport que les distances du plan aux sommets du tétraèdre de référence, chaque distance étant multipliée par une constante arbitraire, mais fixe.

En désignant par u_1, u_2, u_3, u_4 les coordonnées tétraédriques ainsi définies et par σ le facteur de proportionnalité, on a donc

$$(7)\qquad \sigma u_1 = \lambda_1 q_1,\quad \sigma u_2 = \lambda_2 q_2,\quad \sigma u_3 = \lambda_3 q_3,\quad \sigma u_4 = \lambda_4 u_4,$$

λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 étant des constantes arbitraires, mais fixes ; bien que ces constantes soient arbitraires, il est avantageux, comme dans le cas des coordonnées triangulaires, de les faire dépendre des ε en posant

$$\lambda_1 = D_1,\quad \lambda_2 = D_2,\quad \lambda_3 = D_3,\quad \lambda_4 = D_4 ;$$

de plus on fera entrer dans σ le facteur $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ qui est commun aux dénominateurs de q_1, q_2, q_3, q_4.

401. *Formules pour passer des coordonnées rectangulaires d'un plan à ses coordonnées tétraédriques et réciproquement.* — Grâce aux conventions que nous venons d'établir les formules qui expriment les

coordonnées tétraédriques d'un plan en fonction de ses coordonnées tangentielles rectangulaires deviennent très simples. En effet, en substituant dans les formules (7) les valeurs de q_1, q_2, q_3, q_4 tirées des formules (6), on trouve

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma u_1 = A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1, \\ \sigma u_2 = A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2, \\ \sigma u_3 = A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3, \\ \sigma u_4 = A_4 u + B_4 v + C_4 w + D_4. \end{cases}$$

Les formules pour la transformation inverse s'obtiennent en résolvant les équations (8) par rapport à u, v, w; on a

$$(9)\quad \begin{cases} \sigma(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4) = Ru, \\ \sigma(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 + b_4u_4) = Rv, \\ \sigma(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4) = Rw, \\ \sigma(d_1u_1 + d_2u_2 + d_3u_3 + d_4u_4) = R; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(10)\quad \begin{cases} u = \dfrac{a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4}{d_1u_1 + d_2u_2 + d_3u_3 + d_4u_4}, \\ v = \dfrac{b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 + b_4u_4}{d_1u_1 + d_2u_2 + d_3u_3 + d_4u_4}, \\ w = \dfrac{c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 + c_4u_4}{d_1u_1 + d_2u_2 + d_3u_3 + d_4u_4}. \end{cases}$$

Si on donne l'équation d'une surface quelconque en coordonnées rectangulaires tangentielles, il suffira d'y remplacer u, v, w par les valeurs (10), pour obtenir son équation en coordonnées tétraédriques; il est clair qu'elle sera homogène et de même degré que l'équation primitive, quand on aura fait disparaître les dénominateurs.

402. Il sera maintenant facile de démontrer, en suivant une marche en tout semblable à celle du n° 263, que l'équation

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

devient, en coordonnées tétraédriques,

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0;$$

et il est permis de dire que celle-ci exprime la réunion de situation d'un point et d'un plan dans l'espace; c'est-à-dire que l'équation

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0$$

représente, en coordonnées tétraédriques ponctuelles le plan dont les coordonnées tétraédriques tangentielles sont A, B, C, D; et que la même équation, écrite en coordonnées tétraédriques tangentielles, c'est-à-dire

$$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 + Du_4 = 0,$$

représente le point dont les coordonnées tétraédriques sont aussi A, B, C, D.

403. *Plan de l'infini.* — On voit par les formules (5) que tous les points pour lesquels on a

$$D_1x_1 + D_2x_2 + D_3x_3 + D_4x_4 = 0,$$

sont situés à l'infini. Comme cette équation est du premier degré elle représente un plan ; mais ce plan est entièrement rejeté à l'infini. Cela conduit à cette notion paradoxale que tous les points de l'espace qui sont à l'infini se trouvent dans un même plan. C'est ce que Poncelet(*) a exprimé en disant que *l'espace indéfini a pour enveloppe une surface plane*. Il est clair qu'on ne peut attacher à cette idée qu'une signification purement analytique.

404. Des *formules pour changer le tétraèdre de référence* pourraient être établies comme l'ont été celles du n° 265; elles seraient de même forme que celles-ci, mais contiendraient seulement une variable de plus.

405. *Trouver les coordonnées rectangulaires cartésiennes d'un point divisant dans un rapport donné k la droite qui joint deux points fixes x', y', z' et x'', y'', z''; ainsi que l'équation de ce point en coordonnées rectangulaires tangentielles.* — En suivant une marche analogue à celle du n° 246 on trouvera pour les coordonnés du point

$$x = \frac{x' + kx''}{1 + k}, \quad y = \frac{y' + ky''}{1 + k}, \quad z' = \frac{z' + kz''}{1 + k}.$$

De là on déduit pour l'équation de ce point en coordonnées tangentielles

$$u(x' + kx'') + v(y' + ky'') + w(z' + kz'') + 1 + k = 0;$$

(*) Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures.*

mais les équations des deux points fixes, en coordonnées tangentielles, sont $P = 0$, $Q = 0$, P et Q étant, à des facteurs constants près, égaux respectivement à

$$ux' + vy' + wz' + 1 \quad \text{et} \quad ux'' + vy'' + wz'' + 1\,;$$

l'équation demandée sera, par conséquent, $P + \mu Q = 0$; la valeur de μ est celle de la coordonnée-rapport k, multipliée par une constante qui ne dépend que de P et de Q.

406. *Trouver en coordonnées rectangulaires cartésiennes l'équation du plan dont le rapport des distances à deux plans fixes est k; ainsi que les coordonnées rectangulaires tangentielles de ce plan.* — Les deux plans donnés ayant pour équations

$$M \equiv Ax + By + Cz + D = 0\,, \quad N \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

celle du plan cherché sera

$$M + \mu N = 0,$$

en posant

$$\mu = k\frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

On le verra aisément en procédant comme on l'a fait au n° 247.

Pour obtenir les coordonnées tangentielles de ce plan, remarquons qu'on peut écrire son équation de la manière suivante :

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z + 1 + \mu\frac{D'}{D}\left(\frac{A'}{D'}x + \frac{B'}{D'}y + \frac{C'}{D'}z + 1\right) = 0;$$

mais les coordonnées tangentielles des plans $M = 0$, $N = 0$ sont

$$u' = \frac{A}{D}, \quad v' = \frac{B}{D}, \quad w' = \frac{C}{D}; \quad u'' = \frac{A'}{D'}, \quad v'' = \frac{B'}{D'}, \quad w'' = \frac{C'}{D'};$$

par conséquent, en posant

$$\mu' = \mu\frac{D'}{D} = k\frac{\sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}{\sqrt{u''^2 + v''^2 + w''^2}},$$

cette équation prend la forme

$$(u' + \mu' u'')x + (v' + \mu' v'')y + (w' + \mu' w'')z + 1 + \mu' = 0;$$

donc finalement, les coordonnées tangentielles du plan seront

$$u = \frac{u' + \mu u''}{1 + \mu}, \quad v = \frac{v' + \mu v''}{1 + \mu}, \quad w = \frac{w' + \mu w''}{1 + \mu}.$$

On peut, comme nous l'avons fait, supprimer l'accent qui affectait μ, parce que le paramètre μ est simplement égal à la valeur algébrique du rapport k, multipliée par un facteur constant qui ne dépend que des deux plans fixes. La remarque du n° 247 relative à l'expression rapport de distance s'applique encore au cas actuel.

Nous étendrons maintenant aux coordonnées tétraédiques les formules que nous venons de démontrer dans les n°s 405 et 406.

407. *Déterminer les coordonnées tétraédriques du point divisant dans le rapport k la droite qui joint deux points fixes, et celles du plan dont k est le rapport des distances à deux plans fixes.*

En suivant une marche semblable à celle du n° 268 on trouvera pour

les coordonnées du point mobile

$$\rho x_1 = x'_1 + \mu x''_1,$$
$$\rho x_2 = x'_2 + \mu x''_2,$$
$$\rho x_3 = x'_3 + \mu x''_3,$$
$$\rho x_4 = x'_4 + \mu x''_4,$$

x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 et $x''_1, x''_2, x''_3, x''_4$ étant les coordonnées des points fixes et k la coordonnée-rapport du point mobile multipliée par un facteur constant qui ne dépend que des points fixes.

les coordonnées du plan mobile

$$\delta u_1 = u'_1 + \mu u''_1,$$
$$\delta u_2 = u'_2 + \mu u''_2,$$
$$\delta u_3 = u'_3 + \mu u''_3,$$
$$\delta u_4 = u'_4 + \mu u''_4,$$

u'_1, u'_2, u'_3, u'_4 et $u''_1, u''_2, u''_3, u''_4$ étant les coordonnées des plans fixes et k la coordonnée-rapport du plan mobile, multipliée par un facteur constant qui ne dépend que des plans fixes.

408. *Trouver en coordonnées tétraédriques l'équation du point mobile et celle du plan mobile dont on vient de déterminer les coordonnées.*

Il suffira d'appliquer la méthode employée au n° 269.

Si $P=0$ et $Q=0$ sont les équations des deux points fixes, on trouvera

$$P + \mu Q = 0$$

pour celle du point mobile, μ étant encore égal à la coordonnée-rapport k du point mobile, multipliée par un facteur constant qui ne dépend que des points fixes.

Si $G=0$ et $H=0$ sont les équations des deux plans fixes, on trouvera

$$G + \mu H = 0$$

pour celle du plan mobile, μ étant encore égal à la coordonnée-rapport k du plan mobile, multipliée par un facteur constant qui ne dépend que des plans fixes.

409. *Trouver l'équation du plan tangent à une surface en un point donné et l'équation du point de contact d'un plan tangent donné.*

Soient

$$\varphi(X_1, X_2, X_3, X_4) = 0$$

l'équation de la surface et

$$AX_1 + BX_2 + CX_3 + DX_4 = 0,$$

celle du plan tangent. Ce plan peut être considéré comme déterminé par le point de contact, dont les coordonnées sont x_1, x_2, x_3, x_4 et par deux points infiniment voisins, dont les coordonnées sont celles du premier point augmentées de leurs différentielles respectives.

Nous ferons la distinction entre celles-ci par les caractéristiques d et δ. On aura donc les équations de condition

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0,$$
$$Adx_1 + Bdx_2 + Cdx_3 + Ddx_4 = 0,$$
$$A\delta x_1 + B\delta x_2 + C\delta x_3 + D\delta x_4 = 0;$$

et on obtiendra l'équation du plan tangent par l'élimination de A, B, C, D, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ \delta x_1 & \delta x_2 & \delta x_3 & \delta x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients A, B, C, D sont donc les mineurs de ce déterminant par rapport à X_1, X_2, X_3, X_4. Remarquons maintenant que, φ étant une fonction homogène du degré n, on a

$$x_1\varphi'(x_1) + x_2\varphi'(x_2) + x_3\varphi'(x_3) + x_4\varphi'(x_4) = n\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Soient

$$\varphi(U_1, U_2, U_3, U_4) = 0$$

l'équation de la surface et

$$AU_1 + BU_2 + CU_3 + DU_4 = 0,$$

celle du point de contact. Ce point peut être considéré comme déterminé par le plan tangent dont les coordonnées sont u_1, u_2, u_3, u_4 et par deux plans tangents infiniment voisins, dont les coordonnées sont celles du premier plan, augmentées de leurs différentielles respectives.

Nous ferons la distinction entre celles-ci par les caractéristiques d et δ. On aura donc les équations de condition

$$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 + Du_4 = 0,$$
$$Adu_1 + Bdu_2 + Cdu_3 + Ddu_4 = 0,$$
$$A\delta u_1 + B\delta u_2 + C\delta u_3 + D\delta u_4 = 0;$$

et on obtiendra l'équation du point de contact par l'élimination de A, B, C, D, ce qui donne

$$\begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ du_1 & du_2 & du_3 & du_4 \\ \delta u_1 & \delta u_2 & \delta u_3 & \delta u_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients A, B, C, D sont donc les mineurs de ce déterminant, relatifs à U_1, U_2, U_3, U_4. Remarquons maintenant que, φ étant une fonction homogène du degré n, on a

$$u_1\varphi'(u_1) + u_2\varphi'(u_2) + u_3\varphi'(u_3) + u_4\varphi'(u_4) = n\varphi(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

On exprimera donc que les trois points infiniment voisins sont sur la surface par les trois équations

$$x_1\varphi'(x_1)+x_2\varphi'(x_2)+x_3\varphi'(x_3)+x_4\varphi'(x_4)=0,$$
$$dx_1\varphi'(x_1)+dx_2\varphi'(x_2)+dx_3\varphi'(x_3)+dx_4\varphi'(x_4)=0,$$
$$\delta x_1\varphi'(x_1)+\delta x_2\varphi'(x_2)+\delta x_3\varphi'(x_3)+\delta x_4\varphi'(x_4)=0,$$

et celles-ci montrent que les dérivées $\varphi'(x_1)$, $\varphi'(x_2)$, $\varphi'(x_3)$, $\varphi'(x_4)$ sont proportionnelles aux mineurs dont il est question ci-dessus; on a donc

$$\frac{\varphi'(x_1)}{A}=\frac{\varphi'(x_2)}{B}=\frac{\varphi'(x_3)}{C}=\frac{\varphi'(x_4)}{D};$$

et, par conséquent, l'équation du plan tangent devient

$$X_1\varphi'(x_1)+X_2\varphi'(x_2)+X_3\varphi'(x_3)+X_4\varphi'(x_4)=0.$$

On exprimera donc que les trois plans tangents infiniment voisins touchent la surface par les trois équations

$$u_1\varphi'(u_1)+u_2\varphi'(u_2)+u_3\varphi'(u_3)+u_4\varphi'(u_4)=0,$$
$$du_1\varphi'(u_1)+du_2\varphi'(u_2)+du_3\varphi'(u_3)+du_4\varphi'(u_4)=0,$$
$$\delta u_1\varphi'(u_1)+\delta u_2\varphi'(u_2)+\delta u_3\varphi'(u_3)+\delta u_4\varphi'(u_4)=0;$$

et celles-ci montrent que les dérivées $\varphi'(u_1)$, $\varphi'(u_2)$, $\varphi'(u_3)$, $\varphi'(u_4)$ sont proportionnelles aux mineurs dont il est question ci-dessus; on a donc

$$\frac{\varphi'(u_1)}{A}=\frac{\varphi'(u_2)}{B}=\frac{\varphi'(u_3)}{C}=\frac{\varphi'(u_4)}{D};$$

et, par conséquent, l'équation du point de contact devient

$$U_1\varphi'(u_1)+U_2\varphi'(u_2)+U_3\varphi'(u_3)+U_4\varphi'(u_4)=0.$$

410. *Trouver l'équation d'une surface en coordonnées tangentielles, connaissant son équation en coordonnées ponctuelles, et réciproquement.*

Pour résoudre cette question on pourra se servir d'une méthode en tout semblable à celle dont il a été fait usage au nº 275. Les équations seront de même forme; elles contiendront seulement une variable de plus.

411. *Quatre plans qui passent par une même droite sont coupés par un plan quelconque suivant un faisceau de quatre droites dont le rapport anharmonique est constant.*

En effet, on peut prendre le plan sécant pour plan des xy, et écrire les équations des quatre plans sous la forme

$$G+\mu_1H=0,\quad G+\mu_2H=0,\quad G+\mu_3H=0,\quad G+\mu_4H=0,$$

les équations $G=0$ et $H=0$ étant celles de deux plans passant par la droite commune aux quatre plans.

Mais si on fait $z=0$ dans ces équations on obtient quatre équations en x et y qui représentent les quatre droites suivant lesquelles les plans donnés sont coupés par le plan sécant; ces quatre équations seront évidemment de la forme

$$g+\mu_1h=0,\quad g+\mu_2h=0,\quad g+\mu_3h=0,\quad g+\mu_4h=0;$$

et le rapport anharmonique de ces droites sera

$$\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4};$$

or, $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ ne diffèrent des coordonnées-rapports des quatre plans que par un facteur constant qui dépend uniquement des deux plans fixes (n° 408); le rapport anharmonique

$$\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4} = \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} : \frac{k_1 - k_4}{k_2 - k_4}$$

est donc constant, quel que soit le plan des xy, c'est-à-dire quel que soit le plan sécant.

Il résulte aussi de là qu'une transversale quelconque est coupée par ces plans en quatre points dont le rapport anharmonique est constant, puisqu'en menant par la transversale un plan sécant quelconque, on obtient un faisceau de quatre droites dont le rapport anharmonique est le même que celui des quatre points, et qui est constant, quelle que soit la direction du plan sécant.

§ 8. Principes de dualité et d'homographie.

412. Nous avons vu que de la double interprétation dont sont susceptibles les équations des lieux géométriques dans le plan, suivant que l'on fait usage des coordonnées ponctuelles ou des coordonnées tangentielles, dérive un principe général connu sous le nom de principe de dualité. Ce principe, quand on le considère à ce point de vue, se confond avec la théorie des figures polaires réciproques. Mais, tel qu'il a été présenté par Chasles, il offre un caractère plus général, et les relations qu'il établit alors entre les figures géométriques constituent ce que Clebsch a appelé les *affinités dualistiques*. Nous nous proposons de donner ici une démonstration de ce principe général, en suivant une marche analogue à celle de Chasles, mais en faisant usage des coordonnées homogènes ponctuelles et tangentielles, et en complétant sur certains points les démonstrations de cet illustre géomètre. Nous n'entrerons, d'ailleurs, dans le détail de celles-ci que pour les figures planes et nous montrerons comment on peut les étendre aux figures de l'espace.

Établissons d'abord les cinq théorèmes sur lesquels Chasles fait reposer la démonstration du principe de dualité.

413. Théorème I. — *Si l'on conçoit dans un plan une droite mobile dont les coordonnées sont des fonctions linéaires des coordonnées d'un point, que l'on appelle point directeur, quand ce point directeur parcourt une droite, la droite mobile tourne autour d'un point fixe.*

Soit, en effet, l'équation de la droite mobile

$$(1) \qquad u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 = 0,$$

et soient x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées du point directeur, u'_1, u'_2, u'_3 celles de la droite fixe que ce point parcourt; l'équation de cette droite fixe est

$$(2) \qquad u'_1X_1 + u'_2X_2 + u'_3X_3 = 0;$$

et comme u_1, u_2, u_3 sont par hypothèse des fonctions du premier degré de x'_1, x'_2, x'_3, on a trois équations de la forme

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho u_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3, \\ \rho u_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3, \\ \rho u_3 &= a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3; \end{aligned} \right.$$

en outre le point directeur x'_1, x'_2, x'_3, se trouve sur la droite u'_1, u'_2, u'_3; on a donc encore la condition

$$0 = u'_1x'_1 + u'_2x'_2 + u'_3x'_3.$$

Éliminant x'_1, x'_2, x'_3 entre ces quatre équations on trouve

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ u_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & u'_1 & u'_2 & u'_3 \end{vmatrix} = 0;$$

cette équation du premier degré entre les coordonnées u_1, u_2, u_3 de la droite mobile représente, si on y regarde u_1, u_2, u_3 comme variables, un point fixe par lequel passent toutes les positions de cette droite mobile quand le point directeur parcourt la droite fixe u'_1, u'_2, u'_3. On appelle ce point le *pôle* de la droite que le point directeur a parcouru.

414. Théorème II. — *Quand le point directeur se meut sur une courbe* S *la droite mobile roule sur une courbe* S'; *et le point où la droite mobile, dans une quelconque de ses positions, touche la courbe* S' *est le pôle de la tangente menée à la courbe* S *par la position correspondante du point directeur.*

Si la courbe S *est du degré n la courbe* S′ *est de la* n^e *classe, et réciproquement.*

Car, soient $f(X_1, X_2, X_3) = 0$, l'équation de la courbe donnée S et x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées d'une des positions du point directeur ; on aura

$$(5) \qquad f(x'_1, x'_2, x_3) = 0\,;$$

mais les coordonnées du point directeur sont liées aux coordonnées u_1, u_2, u_3 de la droite mobile par les équations (3), dont la résolution nous donne, en faisant usage des notations habituelles,

$$(6) \qquad \begin{cases} \sigma x'_1 = A_{11}u_1 + A_{21}u_2 + A_{31}u_3, \\ \sigma x'_2 = A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + A_{32}u_3, \\ \sigma x'_3 = A_{13}u_1 + A_{23}u_2 + A_{33}u_3. \end{cases}$$

Si on remplace x'_1, x'_2, x'_3 par ces valeurs dans l'équation (5), on trouvera une relation entre u_1, u_2, u_3 qui conviendra à toutes les positions que prend la droite mobile quand le point directeur parcourt la courbe S. En employant de grandes lettres pour les variables, on a donc l'équation

$$(7) \qquad F(U_1, U_2, U_3) = 0,$$

qui représente, en coordonnées tangentielles, la courbe S′, enveloppe des positions que prend la droite mobile quand le point directeur parcourt la courbe S.

On voit donc déjà que, quand on place le point directeur sur la courbe S, la position correspondante de la droite mobile est une tangente à la courbe S′ représentée par l'équation (7); il reste à prouver que le point de contact de cette tangente est le pôle de la tangente menée à la courbe S par le point x'_1, x'_2, x'_3. Or, ce point de contact a pour équation (n° 274)

$$U_1F'(u_1) + U_2F'(u_2) + U_3F'(u_3) = 0\,;$$

et, par conséquent, en désignant par λ une indéterminée, ses coordonnées ponctuelles sont $\lambda F'(u_1)$, $\lambda F'(u_2)$, $\lambda F'(u_3)$.

Mais, pour obtenir la dérivée $F'(u_1)$, on observera qu'il suffit de différentier l'équation (5) en y regardant x'_1, x'_2, x'_3 comme des fonctions de u_1 définies par les équations (6) ; on trouve ainsi

$$\begin{aligned} F'(u_1) &= f'(x'_1)\frac{dx'_1}{du_1} + f'(x'_2)\frac{dx'_2}{du_1} + f'(x'_3)\frac{dx'_3}{du_1} \\ &= A_{11}f'(x'_1) + A_{12}f'(x'_2) + A_{13}f'(x'_3). \end{aligned}$$

On trouve de la même manière $F'(u_2)$ et $F'(u_3)$, et on obtient, pour les coordonnées du point de contact de la tangente à S' :

$$\lambda F'(u_1) = A_{11} f'(x'_1) + A_{12} f'(x'_2) + A_{13} f'(x'_3),$$
$$\lambda F'(u_2) = A_{21} f'(x'_1) + A_{22} f'(x'_2) + A_{23} f'(x'_3),$$
$$\lambda F'(u_3) = A_{31} f'(x'_1) + A_{32} f'(x'_2) + A_{33} f'(x'_3).$$

D'autre part, la tangente menée à la courbe S par le point x'_1, x'_2, x'_3 a pour équation

$$X_1 f'(x'_1) + X_2 f'(x'_2) + X_3 f'(x'_3) = 0;$$

et l'équation du pôle de cette tangente est, d'après l'équation (4),

$$\begin{vmatrix} U_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ U_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ U_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & f'(x'_1) & f'(x'_2) & f'(x'_3) \end{vmatrix} = 0;$$

donc, les coordonnées de ce pôle sont proportionnelles aux mineurs relatifs à U_1, U_2, U_3 dans le déterminant ci-dessus; mais on retrouve précisément ainsi les valeurs obtenues plus haut pour les coordonnées du point de contact de la tangente à S'; par conséquent, le pôle de la tangente au point x'_1, x'_2, x'_3 de la courbe S n'est autre chose que le point où la droite mobile touche la courbe S'.

Les équations (5) et (7) étant du même degré, l'ordre de la courbe S est le même que la classe de la courbe S'; et la réciproque est vraie, car, si par une position quelconque du point directeur on peut mener n tangentes à la courbe S, la position correspondante de la droite mobile contiendra les pôles de ces tangentes, qui seront les n points de rencontre de la courbe S' avec cette position de la droite mobile.

Si la courbe S est du second degré, il en sera, par conséquent, de même de la courbe S'.

415. Théorème III. — *Quand le point directeur se meut à l'infini, la droite mobile tourne autour d'un point fixe, comme si le point directeur parcourait une droite.*

En effet, quand le point directeur est à l'infini (n° 264), ses coordonnées vérifient l'équation

$$C_1 x'_1 + C_2 x'_2 + C_3 x'_3 = 0;$$

par conséquent, on obtiendra le pôle de cette droite de l'infini en remplaçant u'_1, u'_2, u'_3 par C_1, C_2, C_3 dans l'équation (4).

Le pôle de l'infini sera donc représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} U_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ U_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ U_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Réciproquement, il existe une position du point directeur pour laquelle la droite mobile se transporte à l'infini. Car, la droite mobile est rejetée à l'infini quand elle a pour coordonnées C_1, C_2, C_3 ; c'est-à-dire, d'après les équations (3), quand on a pour le point directeur

$$a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 = C_1,$$
$$a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 = C_2,$$
$$a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 = C_3.$$

Donc, *en résolvant ces équations par rapport* x'_1, x'_2, x'_3 *on aura les coordonnées du point directeur pour lequel la droite mobile est à l'infini.*

416. Théorème IV. — *Quand le point directeur prend quatre positions en ligne droite, la droite mobile prend quatre positions correspondantes passant par un même point; et le rapport anharmonique des quatre points est égal à celui des quatre droites.*

En effet, prenons deux points de base x'_1, x'_2, x'_3 et x''_1, x''_2, x''_3 et appelons $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ les coordonnées-rapports des quatre positions du point directeur; le rapport anharmonique de ces quatre points est

$$\frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4}.$$

Mais, si on désigne par x_1, x_2, x_3 les coordonnées du point déterminé par une valeur donnée de μ, on a

$$\lambda x_1 = x'_1 + \mu x''_1, \quad \lambda x_2 = x'_2 + \mu x''_2, \quad \lambda x_3 = x'_3 + \mu x''_3,$$

λ étant un facteur arbitraire. Pour obtenir les coordonnées u_1, u_2, u_3 de la position correspondante de la droite mobile, il faut substituer ces valeurs à x_1, x_2, x_3 dans les formules (3) ; la première de ces formules donne, en faisant entrer le facteur λ dans le coefficient de proportionnalité,

$$\rho u_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 + \mu(a_{11}x''_1 + a_{12}x''_2 + a_{13}x''_3) = u'_1 + \mu u''_1.$$

En opérant de la même manière pour u_2 et u_3 on trouve

$$\rho u_1 = u'_1 + \mu u''_1, \quad \rho u_2 = u'_2 + \mu u''_2, \quad \rho u_3 = u'_3 + \mu u''_3.$$

Si on substitue ces expressions dans l'équation (1) en donnant successivement à μ les valeurs qui déterminent les quatre positions du point directeur, les équations des quatre positions correspondantes de la droite mobile deviennent

$$G + \mu_1 H = 0, \quad G + \mu_2 H = 0, \quad G + \mu_3 H = 0, \quad G + \mu_4 H = 0.$$

Ces droites ont donc le même rapport anharmonique que les quatre positions correspondantes du point directeur.

Réciproquement, à quatre pôles en ligne droite correspondent quatre droites passant par un même point et ayant même rapport anharmonique que les quatre pôles.

En effet, les coordonnées des quatre droites que parcourt le point directeur s'obtiendront en remplaçant μ par μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 dans des expressions de la forme

$$u'_1 = u''_1 + \mu u'''_1, \quad u'_2 = u''_2 + \mu u'''_2, \quad u'_3 = u''_3 + \mu u'''_3.$$

La substitution dans l'équation (4) donnera alors pour les positions correspondantes du pôle quatre équations de la forme $P + \mu Q = 0$, dans lesquelles les valeurs de μ seront respectivement les mêmes que celles qui fixent les quatre droites, ce qui démontre la proposition énoncée.

417. Théorème V. — *Étant données quatre positions du point directeur parmi lesquelles il ne s'en trouve pas trois sur une même droite, on peut prendre dans le plan pour positions correspondantes de la droite mobile, quatre droites arbitrairement choisies, pourvu que trois d'entre elles ne passent pas par un même point.*

Désignons par les lettres x', x'', x''', x^{iv}, affectées des indices 1, 2, 3, les coordonnées des quatre positions du point directeur; par la lettre u, affectée des mêmes accents et des mêmes indices, les coordonnées des quatre positions correspondantes de la droite mobile; et par ρ', ρ'', ρ''', ρ^{iv} ce que devient le coefficient de proportionnalité ρ pour ces quatre droites. En substituant ces valeurs dans les équations fondamentales (3), qui doivent être vérifiées pour les quatre points et les quatre droites correspondantes, on obtient des relations qui permettent de déterminer sans ambiguïté les coefficients a_{11}, a_{12}, ... a_{33}; car on trouve ainsi douze équations linéaires homogènes renfermant comme inconnues ces neuf coefficients et

les quatre facteurs de proportionnalité ; elles permettent donc de déterminer les rapports de douze de ces constantes à la treizième, ce qui fixe complètement le sens des équations (3).

Considérons, par exemple, les quatre relations déduites de celle des équations (3) où u est affecté de l'indice 1 ; on aura

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho' u'_1 \ &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3,\\ \rho'' u''_1 &= a_{11}x''_1 + a_{12}x''_2 + a_{13}x''_3,\\ \rho''' u'''_1 &= a_{11}x'''_1 + a_{12}x'''_2 + a_{13}x'''_3,\\ \rho^{IV} u^{IV}_1 &= a_{11}x^{IV}_1 + a_{12}x^{IV}_2 + a_{13}x^{IV}_3. \end{aligned}\right.$$

Entre ces quatre équations éliminons les coefficients a_{11}, a_{12}, a_{13} ; puis opérons de la même manière sur les deux autres équations (3). Nous trouverons

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho' u'_1 X' - \rho'' u''_1 X'' + \rho''' u'''_1 X''' - \rho^{IV} u^{IV}_1 X^{IV} &= 0,\\ \rho' u'_2 X' - \rho'' u''_2 X'' + \rho''' u'''_2 X''' - \rho^{IV} u^{IV}_2 X^{IV} &= 0,\\ \rho' u'_3 X' - \rho'' u''_3 X'' + \rho''' u'''_3 X''' - \rho^{IV} u^{IV}_3 X^{IV} &= 0, \end{aligned}\right.$$

équations dans lesquelles on a fait

$$X' = \begin{vmatrix} x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \\ x^{IV}_1 & x^{IV}_2 & x^{IV}_3 \end{vmatrix},\quad X'' = \begin{vmatrix} x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \\ x^{IV}_1 & x^{IV}_2 & x^{IV}_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{vmatrix},\quad X''' = \begin{vmatrix} x^{IV}_1 & x^{IV}_2 & x^{IV}_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \end{vmatrix},\quad X^{IV} = \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 \end{vmatrix}.$$

Aucun de ces déterminants n'est égal à zéro, parce que nous avons supposé que parmi les quatre positions du point directeur il ne s'en trouve pas trois en ligne droite.

Des trois équations (9) on déduit immédiatement des quantités proportionnelles à $\rho' X'$, $\rho'' X''$, $\rho''' X'''$ et $\rho^{IV} X^{IV}$; car si on pose

$$U' = \begin{vmatrix} u''_1 & u''_1 & u^{IV}_1 \\ u''_2 & u'''_2 & u^{IV}_2 \\ u''_3 & u'''_3 & u^{IV}_3 \end{vmatrix},\quad U'' = \begin{vmatrix} u'''_1 & u^{IV}_1 & u'_1 \\ u'''_2 & u^{IV}_2 & u'_2 \\ u'''_3 & u^{IV}_3 & u'_3 \end{vmatrix},\quad U''' = \begin{vmatrix} u^{IV}_1 & u'_1 & u''_1 \\ u^{IV}_2 & u'_2 & u'_2 \\ u^{IV}_3 & u'_3 & u''_3 \end{vmatrix},\quad U^{IV} = \begin{vmatrix} u'_1 & u''_1 & u'''_1 \\ u'_2 & u''_2 & u'''_2 \\ u'_3 & u''_3 & u'''_3 \end{vmatrix},$$

déterminants différents de zéro parce que trois des droites données ne passent pas par un même point, on a les proportions

$$\frac{\rho' X'}{U'} = \frac{\rho'' X''}{U''} = \frac{\rho''' X'''}{U'''} = \frac{\rho^{IV} X^{IV}}{U^{IV}}.$$

Les rapports des coefficients de proportionnalité ρ étant déterminés par ces dernières équations, trois des équations (8) permettront de cal-

culer a_{11}, a_{12}, a_{13}; et, d'une manière analogue, on pourra déterminer les valeurs des six autres constantes a_{21}, a_{22},..... a_{33}. Le théorème V est donc complètement démontré.

418. *Remarque. — Il est possible aussi de faire correspondre trois positions non en ligne droite du point directeur à trois positions de la droite mobile qui ne passent pas par un même point, et de faire correspondre en même temps une courbe du deuxième degré* S *enveloppée par la droite mobile, à un cercle* S' *parcouru par le point directeur.*

En effet, pour faire correspondre trois positions du point directeur à trois positions de la droite mobile, il faut écrire les trois premières équations (8), ainsi que les six équations qui s'en déduisent en remplaçant l'indice 1 qui affecte la lettre u par les indices 2 et 3 ; on obtient ainsi neuf équations qu'on peut résoudre par rapport à a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, ..., a_{33}, et qui donnent pour ces coefficients des fonctions linéaires de ρ', ρ'', ρ'''.

Soit maintenant $F(U_1, U_2, U_3) = 0$ l'équation de la conique S qu'il faut faire correspondre à un cercle parcouru par le point directeur. En faisant dans cette équation la substitution (3) on obtiendra, en coordonnées ponctuelles homogènes l'équation de la conique S' qui doit devenir un cercle, réel ou imaginaire ; et pour exprimer qu'il en est ainsi, on doit écrire deux équations de condition qui sont homogènes par rapport aux coefficients a_{11}, a_{12}, . ., a_{33} ; en remplaçant ensuite ceux-ci par leurs valeurs, calculées comme il est dit plus haut, on a deux équations homogènes par rapport à ρ', ρ'', ρ''' qui permettent de déterminer des quantités proportionnelles à ces constantes et d'achever ainsi la résolution de la question.

419. *Extension aux figures de l'espace des cinq théorèmes démontrés ci-dessus dans le cas des figures planes.* — Quand il s'agit des figures à trois dimensions, les cinq théorèmes qui viennent d'être démontrés doivent être modifiés comme nous allons l'indiquer. Les démonstrations se font de la même manière et toutes les équations ont la même forme, mais elles contiennent une variable de plus.

Théorème I. — *Si l'on conçoit dans l'espace un plan mobile dont les coordonnées sont des fonctions linéaires des coordonnées d'un point que l'on appelle point directeur;* 1° *quand ce point parcourt un plan, le plan mobile tourne autour d'un point fixe;* 2° *quand il parcourt une droite, le plan mobile tourne autour d'une seconde droite.*

La première partie du théorème se démontre de la même manière que quand il s'agit de figures planes. Pour démontrer la seconde partie il suffit d'observer que quand le point directeur glisse sur une droite fixe on peut le considérer comme se mouvant dans deux plans fixes qui se coupent suivant cette droite et qu'alors le plan mobile passe dans chacune de ses positions par les pôles de ces deux plans fixes.

Théorème II. — *Quand le point directeur se meut sur une surface* S *le plan mobile roule sur une surface* S'; *et le point où le plan mobile, dans une quelconque de ses positions, touche la surface* S' *est le pôle du plan tangent mené à la surface* S *par la position correspondante du point directeur. Quand la surface* S *est du degré* n, *la surface* S' *est de la* n^e *classe; et quand la surface* S *est du second degré la surface* S' *est aussi du second degré.*

Théorème III. — *Quand le point directeur se meut à l'infini, le plan mobile tourne autour d'un point fixe, comme si le point directeur parcourait un plan; et, réciproquement, il existe une position du point directeur pour laquelle le plan mobile se transporte à l'infini.*

Théorème IV. — *Quand le point directeur prend quatre positions en ligne droite, le plan mobile prend quatre positions passant par une même droite; et le rapport anharmonique des quatre points est égal à celui des quatre plans. Ce théorème s'applique aussi à quatre pôles en ligne droite et aux quatre plans qui leur correspondent.*

Théorème V. — *Étant données cinq positions du point directeur parmi lesquelles il ne s'en trouve pas quatre dans un même plan, on peut prendre dans l'espace, pour les positions correspondantes du plan mobile, cinq plans arbitrairement choisis pourvu que quatre d'entre eux ne passent pas par un même point.*

C'est sur ces cinq théorèmes que repose la démonstration du principe de dualité. Nous pourrons nous borner à la donner pour les figures dans l'espace, car on verra sans peine comment elle se modifie pour les figures planes.

420. *Démonstration du principe de dualité.* — Ce principe a été divisé par Chasles en deux parties, dont la première est relative à la corrélation des relations descriptives des figures et la seconde, à la corrélation de leurs relations de grandeur, ou métriques.

Première partie. — *Lorsqu'une figure de forme quelconque est donnée, on peut toujours former d'une infinité de manières une autre figure dans*

laquelle les plans, les points, les droites, correspondent respectivement à des points, à des plans, et à des droites de la première figure.

Les points situés sur un même plan dans l'une des deux figures, ont pour correspondants des plans passant tous par le point qui correspond à ce plan.

Les points situés sur une même droite dans l'une des deux figures ont pour correspondants dans l'autre figure, des plans passant par une même droite, qui correspond à la première.

Les points situés sur une surface courbe dans la première figure, ont pour correspondants dans la seconde, des plans tangents à une autre surface courbe; et les plans tangents à la première surface en ces points, ont pour correspondants précisément les points de contact des plans tangents à la seconde surface.

Enfin, tous les points placés à l'infini, considérés comme appartenant à l'une des figures, doivent être regardés comme situés dans un même plan, et tous les plans qui leur correspondent dans l'autre figure, passent par un même point qui correspond à ce plan situé à l'infini.

Ce sont ces deux figures qu'on appelle corrélatives. La démonstration de cette première partie du principe résulte évidemment des théorèmes I, II et III. Car, on formera la seconde figure en faisant mouvoir un plan dont l'équation contiendra au premier degré les coordonnées d'un point auquel on fera parcourir toutes les parties de la première figure. La seconde figure sera l'enveloppe du plan mobile.

Il est clair que des droites situées dans un même plan, auront pour correspondantes dans la seconde figure des droites qui passeront par un même point; ce point correspondra au plan des premières droites.

Par conséquent, des droites situées à l'infini auront pour correspondantes des droites passant toutes par le point de la seconde figure qui correspond à l'infini de la première.

Pareillement, des droites passant toutes par un même point dans la première figure, donneront lieu à des droites situées toutes dans le plan correspondant à ce point.

Par conséquent, des droites parallèles entre elles donneront lieu à des droites situées toutes dans un même plan passant par le point de la seconde figure qui correspond à l'infini de la première.

Des plans parallèles entre eux donneront lieu dans la seconde figure à des points situés sur une même droite passant par le point qui correspond

dans cette seconde figure à l'infini de la première. Car les plans parallèles entre eux seront considérés comme passant par une même droite située à l'infini.

Des plans parallèles à une même droite donneront lieu à des points situés tous dans un même plan passant par le point qui correspond à l'infini. Car on peut les considérer comme des plans passant par un même point situé à l'infini sur la droite à laquelle ils sont tous parallèles.

A une courbe à double courbure correspondra une surface développable, car à chacun des points de cette courbe correspondra un plan, et l'enveloppe de tous ces plans sera une surface développable. Chaque tangente à la courbe pouvant être considérée comme le prolongement de la corde qui joint deux points infiniment voisins, à cette tangente correspondra une droite qui sera l'intersection de deux plans tangents à la surface développable, infiniment voisins, c'est-à-dire une caractéristique ou génératrice rectiligne de cette surface; et à un plan mené par cette tangente à la courbe correspondra un point de ladite caractéristique. Le plan osculateur en un point de la courbe proposée passe par deux tangentes infiniment voisines ; le point qui lui correspondra sur la développable sera donc à l'intersection de deux caractéristiques consécutives. Ce sera donc un point de l'arête de rebroussement de la surface.

Réciproquement, à une surface développable proposée correspondra, dans la figure corrélative, une courbe à double courbure.

Si la figure proposée est une surface courbe coupée par un plan, à cette surface correspondra, dans la figure corrélative, une deuxième surface courbe ; aux points d'intersection par le plan correspondront des plans tangents à la deuxième surface; et tous ces points étant dans un plan, tous ces plans tangents passeront par un même point qui correspondra à ce plan; ces plans formeront donc un cône. Ainsi on aura pour figure corrélative une surface courbe inscrite dans un cône.

Si deux surfaces ont un point de contact, les deux surfaces corrélatives auront aussi un point de contact. Car au point de contact des deux premières et à leur plan tangent commun en ce point, correspondront un plan tangent commun aux deux autres surfaces, et un point qui sera sur ces deux surfaces leur point de contact commun avec ce plan.

D'après cela, si deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre suivant une courbe, les deux surfaces corrélatives seront aussi circonscrites l'une à l'autre ; et les plans tangents à ces dernières menés par les points de

leur courbe de contact formeront une surface développable correspondante à la ligne de contact des deux premières surfaces.

Deuxième partie. — *Dans deux figures corrélatives, à quatre points de la première situés en ligne droite, correspondent dans la seconde quatre plans passant par une même droite, et dont le rapport anharmonique est égal au rapport anharmonique des quatre points.*

Et à quatre plans de la première figure passant par une même droite, correspondent dans la deuxième figure quatre points situés en ligne droite, dont le rapport anharmonique est égal au rapport anharmonique des quatre plans.

Ainsi, soient a, b, c, d quatre points de l'une des deux figures, situés en ligne droite, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les points de rencontre des quatre plans correspondants avec une transversale tirée arbitrairement. On aura, en vertu du théorème IV

$$\left(\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}\right) : \left(\frac{\delta\alpha}{\delta\beta}\right) = \left(\frac{ca}{cb}\right) : \left(\frac{da}{db}\right),$$

les parenthèses indiquant que chaque rapport doit être pris avec un signe convenable.

Il peut arriver que l'un des quatre points, le point d par exemple, soit à l'infini. Alors le plan D passe par le point de la seconde figure qui correspond à l'infini de la première. D'autre part, le rapport $\left(\frac{da}{db}\right)$ devient égal à -1, et la relation ci-dessus se réduit à

$$\left(\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}\right) : \left(\frac{\delta\alpha}{\delta\beta}\right) = -\left(\frac{ca}{cb}\right).$$

On peut, d'ailleurs, faire passer la transversale par le point I de la seconde figure qui correspond à l'infini de la première ; δ coïncide alors avec I, et l'on a

$$\left(\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}\right) : \left(\frac{\mathrm{I}\alpha}{\mathrm{I}\beta}\right) = -\left(\frac{ca}{cb}\right).$$

421. *Applications du principe de dualité.* — Nous prendrons d'abord des exemples relatifs aux figures planes.

Premier exemple. — Soit (fig. 133), un quadrilatère quelconque dont nous désignerons les quatre côtés par les lettres a, b, c, d. Nous pourrons toujours, dans la figure corrélative, faire correspondre à ces droites les

sommets A, B, C, D d'un carré. Les côtés AB, BC, CD, DA de ce carré correspondront aux sommets *ab*, *bc*, *cd*, *ad* du quatrilatère.

Dans ce dernier, les côtés opposés, *a* et *c* d'une part, *b* et *d* d'autre part, se coupent en deux points désignés dans la figure par *ac* et *bd*, et qui répondent aux diagonales AC et BD du carré; la diagonale du quadrilatère, qui joint les points *ac* et *bd*, et que nous désignerons par *o*, répond au centre O du carré.

La droite *i*, qui joint les sommets *ab* et *cd* du quadrilatère, répond au point I, situé à l'infini sur OM, puisque AB, CD et OM concourent en un point I placé à l'infini. De même, la droite *i'*, qui joint les sommets *bc* et *ad*, répond au point I' situé à l'infini sur ON. Les deux droites *i* et *i'* se rencontrent donc au point *w* de la première figure qui correspond à l'infini de la seconde.

La droite IO, ou MO, répond à l'intersection de la droite *i* avec la droite *o*; c'est-à-dire au point *om* de la première figure; et, de même, la droite ON répond au point *on*.

Ainsi, les quatre droites ON, OA, OM, OD qui passent par le point O, répondent aux quatre points *on*, *ac*, *om*, *bd* situés sur la droite O; le rapport anharmonique des quatre droites est donc égal à celui des quatre points. Mais les droites forment un faisceau harmonique puisque OA et OD sont les bissectrices des angles formés par les deux droites OM et ON. Donc aussi les points *om* et *on* sont conjugués harmoniques sur la droite qui joint les points *ac* et *bd*.

On retrouve ainsi cette propriété, que dans le quadrilatère complet la diagonale *o* est rencontrée par les deux autres en des points qui la divisent harmoniquement.

Deuxième exemple — Considérons le triangle équilatéral ABC (fig. 134), le cercle inscrit dont le centre est O, et les trois hauteurs AD, BE, CF, qui passent par O.

On peut faire en sorte que la circonférence et ses trois tangentes AB, BC, CA correspondent à une section conique donnée et à trois points *ab*, *bc*, *ca*, arbitrairement choisis sur cette conique.

Observons maintenant que les côtés du triangle circonscrit à la circonférence et ceux du triangle inscrit qui leur sont parallèles, se coupent deux à deux en trois points situés à l'infini. On en conclura que dans la figure corrélative les trois droites qui joignent les sommets du triangle circonscrit à la conique aux points de contact des côtés opposés, passent

par un même point, à savoir le point ω de cette figure qui correspond à l'infini de l'autre.

En outre, les trois hauteurs du triangle équilatéral circonscrit au cercle se coupant au centre O; on en conclut que dans la figure corrélative les trois points non situés sur la courbe où les côtés du triangle inscrit rencontrent ceux du triangle circonscrit sont en ligne droite.

Nous retrouvons ainsi les théorèmes sur les triangles inscrits et circonscrits aux sections coniques, déjà démontrés comme corollaires des théorèmes de Pascal et de Brianchon.

Troisième exemple. — Soit ACBD (fig. 135), un quadrilatère inscrit dans une conique, et I le point de rencontre des diagonales AB, CD. A la conique nous ferons correspondre un cercle dans la figure corrélative, et au point I la droite de l'infini. Aux sommets A et B correspondront deux tangentes a et b et celles-ci se couperont en un point de la droite de l'infini, ou en d'autres termes seront parallèles, puisque la droite AB passe par le point I qui correspond à l'infini. Aux sommets C et D correspondront de même deux tangentes au cercle, et ces tangentes c et d seront également parallèles. La figure corrélative du quadrilatère ABCD sera donc le losange dont les sommets sont ad, db, bc, ca. Les points de contact des côtés de ce losange avec le cercle correspondent aux côtés d'un quadrilatère circonscrit EFGH, formé par les tangentes menées à la conique aux sommets du quadrilatère inscrit; et la figure corrélative du quadrilatère circonscrit est, par conséquent, un rectangle dont les diagonales sont deux diamètres du cercle. Cela posé, les diagonales du losange et celles du rectangle passant par un même point o, centre du cercle, les points correspondants seront sur une même droite, O; or, aux deux diagonales du losange correspondent les points K et L, qui sont les points de rencontre des côtés opposés du quadrilatère inscrit; et aux diagonales du rectangle correspondent les points M et N qui sont les points de rencontre des côtés opposés du quadrilatère circonscrit; ces quatre points K, L, M, N sont donc en ligne droite.

On voit de plus que les diagonales du losange sont les bissectrices des angles formés par celles du rectangle. Ces quatre droites forment donc en o un faisceau harmonique; donc aussi les points K et L forment une division harmonique sur MN. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Les points de rencontre des côtés opposés d'un quadrilatère circonscrit

à une conique et ceux des côtés opposés du quadrilatère inscrit dont les sommets sont les points de contact des côtés du quadrilatère circonscrit, sont en ligne droite; et les deux premiers points divisent harmoniquement la distance des deux autres.

Observons encore que les points F, E, L correspondent respectivement aux côtés e, f du rectangle, et à la diagonale l du losange, qui est parallèle à ces côtés. On en conclut que ces trois points se trouvent sur une droite passant par le point I qui correspond à l'infini. On prouvera de même que les points G, H, I, K sont en ligne droite.

Si par K, intersection de AD et BC on mène deux tangentes à la conique, elles correspondent aux deux points du cercle situés sur le diamètre qui joint ad et bc ; et les tangentes u et v en ces derniers points correspondent aux points de contact U et V des tangentes à la conique. La droite UV, polaire de K, correspond donc au point de rencontre des tangentes u et v ; mais ces dernières sont parallèles à la diagonale l du losange ; leur point de rencontre correspond donc à une droite qui passe par le point L et par le point I qui correspond à l'infini ; donc la droite LI se confond avec VU, polaire de K. On prouvera de la même manière que L est le pôle de KI. De là on conclut le théorème suivant :

Si par un point K *pris dans le plan d'une section conique on mène les deux sécantes* AK *et* CK, *et qu'on joigne deux à deux les points où elles rencontrent la courbe par les droites* AB *et* CD *qui se coupent en* I, *et par les droites* AC *et* BD *qui se coupent en* L, *la droite* IL *sera la polaire du point* K *par rapport à la conique.*

PREMIÈRE CONSÉQUENCE : PROBLÈME. — *Mener une tangente à une conique par un point extérieur, la courbe étant tracée, ou connaissant cinq de ses points.*

Ayant tiré à volonté les deux sécantes KDA, KBC (fig. 135), il suffira de tracer les droites AB, CD qui se coupent en I ; puis les droites BD, AC qui se coupent en L, pour obtenir la polaire IL du point K.

La polaire de K est la corde qui joint les points de contact des tangentes réelles ou imaginaires qui passent par ce point. Quand cette droite IL rencontre la courbe en deux points réels U et V, les droites KU et KV sont donc les deux tangentes demandées.

Cette construction s'applique évidemment au cercle et semble plus simple que celle qu'on enseigne en géométrie élémentaire puisqu'elle ne repose que sur le tracé de sept lignes droites.

On pourrait aussi mener les tangentes par un point extérieur connaissant cinq points de la conique. Car nous venons de voir que pour résoudre le problème il suffit de trouver les points de rencontre de la courbe avec deux sécantes menées par le point extérieur donné ; et nous avons montré (n° 337) comment on peut trouver les points de rencontre d'une droite avec une conique dont cinq points sont connus.

Deuxième conséquence. — Il résulte encore de ce qui précède que, de même que IL est la polaire de K, IK est la polaire de L ; donc aussi que KL est la polaire de I. Le triangle IKL est donc tel que chaque côté est la polaire du sommet opposé ; on l'appelle *triangle autopolaire*.

Deux coniques ont toujours un triangle autopolaire commun; car si A, B, C, D sont les points de rencontre réels ou imaginaires des deux coniques, les points I, K, L seront les sommets d'un triangle autopolaire commun. Plus généralement, ce triangle autopolaire est commun à toutes les coniques circonscrites au quadrilatère ABCD.

Quatrième exemple. — Soit (fig. 136) ABCDEF un hexagone circonscrit à une conique ; la figure corrélative sera un hexagone inscrit dans une conique, et nous pourrons faire en sorte que celle-ci soit un cercle et que le point O, où se coupent les deux diagonales BE et CF corresponde à la droite de l'infini de la figure corrélative. Dès lors les côtés b et e de l'hexagone inscrit au cercle, qui correspondent aux sommets B et E de l'hexagone circonscrit à la conique, se couperont en un point à l'infini ou, en d'autres termes, seront parallèles ; pour une raison semblable les côtés c et f correspondant aux sommets C et F seront aussi parallèles. On s'assurera facilement qu'alors les deux autres côtés a et d de l'hexagone inscrit dans le cercle sont également parallèles, c'est-à-dire qu'ils se coupent en un point situé sur la droite de l'infini. Donc dans l'hexagone circonscrit les points A, D et le point O qui correspond à la droite de l'infini sont en ligne droite ; par conséquent, les trois diagonales AD, BE, CF de l'hexagone circonscrit passent par un même point. On a ainsi une nouvelle démonstration du théorème de Brianchon. Une démonstration analogue ferait retrouver le théorème de Pascal.

Remarque. — Dans le deuxième exemple nous avons fait correspondre à la figure proposée un triangle équilatéral inscrit dans un cercle. Si dans le troisième exemple on partait du carré et dans le quatrième de l'hexagone régulier pour former la figure corrélative, celle-ci ne pour-

rait plus être considérée comme la plus générale de son espèce. Car, quand on fait correspondre la conique à un cercle, on ne peut plus choisir arbitrairement les sommets d'un quadrilatère ou d'un hexagone circonscrit à la conique pour les faire correspondre aux côtés d'un carré ou d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle. La démonstration laisserait donc alors à désirer, en ce sens que la conclusion à laquelle on arriverait ne pourrait plus être considérée comme générale.

Cinquième exemple. — Nous prendrons maintenant des exemples de figures qui embrassent les trois dimensions de l'espace.

Soit une surface du second degré S (fig. 137), et un point i arbitrairement choisi dans l'espace. Construisons la figure corrélative de façon que le point i de la première figure corresponde à l'infini de la seconde.

Menons par le point i une transversale rencontrant la surface S en deux points α et β, et soient A et B les plans tangents en ces points. Aux points α et β correspondront deux plans tangents A′ et B′ à la surface S′ corrélative de S; et puisque la droite $\alpha\beta$ passe par le point i qui répond à l'infini, l'intersection des plans A′ et B′, laquelle correspond à la droite $\alpha\beta$, sera dans le plan situé à l'infini; en d'autres termes, les plans A′ et B′ seront parallèles. La droite ab qui joint leurs points de contact sera donc un diamètre; c'est-à-dire qu'elle passera par le centre o de la surface S′. Au point o correspond un plan O dans la figure corrélative; et les points a, o, b étant en ligne droite, les plans A, O, B passent par une même droite. D'où l'on conclut que si la transversale $\alpha\beta$ tourne autour du point i, les plans tangents A et B, menés aux points où elle rencontre la surface S, se coupent suivant une droite située dans un plan fixe O.

Faisons passer un plan I par le point i et par la droite commune aux plans A, O, B. A ce plan correspond dans la deuxième figure le point ω situé à l'infini sur ab; et le rapport anharmonique des quatre points a, o, b, ω est le même que celui des quatre plans correspondants A, O, B, I; ou encore le même que celui des quatre points α, j, β, i où ces plans sont coupés par la transversale $\alpha\beta$. On a donc $(aob\omega) = (\alpha j\beta i)$.

D'autre part, le point o étant au milieu de ab, et le point ω étant à l'infini sur cette droite, ce sont deux points conjugués harmoniques sur ab; donc aussi les points i et j sont conjugués harmoniques sur $\alpha\beta$.

On déduit de là cette propriété des pôles et des plans polaires des

surfaces du second degré, sur laquelle est fondée la théorie des figures polaires réciproques dans l'espace :

Étant donnée une surface du second degré, si autour d'un point fixe on fait tourner une transversale et qu'on mène les deux plans tangents à la surface aux points où elle est coupée par cette droite,

1° *Ces deux plans se couperont dans un plan fixe.* (*On l'appelle plan polaire du point fixe, et celui-ci s'appelle le pôle*).

2° *Le point où le plan polaire coupe la transversale est conjugué harmonique du pôle par rapport aux deux points où la transversale rencontre la surface.*

Sixième exemple. — Soient deux tétraèdres ayant leurs sommets placés deux à deux sur quatre droites qui passent par un même point i (fig. 138).

Construisons la figure corrélative et faisons correspondre le point i de la première figure à l'infini de la seconde.

Aux quatre faces de chacun des tétraèdres qui composent la première figure, correspondent respectivement quatre points formant les sommets de deux tétraèdres corrélatifs; et aux sommets des deux premiers tétraèdres correspondent les faces des deux autres.

Puisque la droite $\alpha\alpha'$ qui joint deux sommets homologues des premiers passe par le point i qui correspond à l'infini, la droite qui correspond à $\alpha\alpha'$ sera à l'infini ; c'est-à-dire que les faces qui correspondent dans la deuxième figure aux sommets α et α' se coupent suivant une droite située à l'infini ou, en d'autres termes, sont parallèles.

Le même raisonnement s'applique à deux faces quelconques de la seconde figure qui correspondent à deux sommets de la première situés sur une droite passant par i.

On voit donc que la figure corrélative de la figure donnée se composera de deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$, semblables et semblablement placés, c'est-à-dire ayant leurs faces parallèles deux à deux ; les quatre droites qui joignent leurs sommets homologues concourront donc en un même point u ; et le rapport des distances de ce point à deux sommets homologues sera constant ; c'est-à-dire qu'on aura

$$(1) \qquad \frac{ua}{ua'} = \frac{ub}{ub'} = \cdots.$$

Dans la première figure un plan U correspond au point u ; et puisque les points a, a', u sont en ligne droite les plans A, A', U qui correspondent à ces points se coupent suivant une droite mn. Menons

un plan I par cette droite mn et par le point i. Il correspondra au point ω situé à l'infini sur aa' et le rapport anharmonique des quatre points a, a', u, ω sera égal à celui des quatre points $\alpha, \alpha', \lambda, i$ où les plans correspondants sont coupés par la transversale $\alpha\alpha'$. Mais le point ω étant à l'infini, le premier de ces rapports se réduit à $-\left(\frac{au}{a'u}\right)$. On aura donc

$$-\left(\frac{au}{a'u}\right)=\left(\frac{\alpha\lambda}{\alpha'\lambda}\right):\left(\frac{\alpha i}{\alpha' i}\right).$$

Soient actuellement β et β' deux autres sommets des premiers tétraèdres, et μ le point où la transversale $\beta\beta'$, qui passe aussi par le point i, rencontre le plan U. On aura

$$-\left(\frac{bu}{b'u}\right)=\left(\frac{\beta\mu}{\beta'\mu}\right):\left(\frac{\beta i}{\beta' i}\right).$$

On a donc, en vertu des proportions écrites plus haut

$$\left(\frac{\alpha\lambda}{\alpha'\lambda}\right):\left(\frac{\alpha i}{\alpha' i}\right)=\left(\frac{\beta\mu}{\beta'\mu}\right):\left(\frac{\beta i}{\beta' i}\right).$$

Les segments $\alpha\lambda$ et $\alpha'\lambda$ sont proportionnels aux distances des deux points α et α' au plan U. Pareillement, $\beta\mu$ et $\beta'\mu$ sont proportionnels aux distances des deux points β et β' à ce plan. On conclut donc de là le théorème suivant :

Quand deux tétraèdres ont leurs sommets situés deux à deux sur quatre droites concourantes en un même point i,

1° *Leurs faces se coupent deux à deux suivant quatre droites qui sont situées dans un même plan* U.

2° *Le rapport des distances du point i à deux sommets homologues des deux tétraèdres est au rapport des distances de ces sommets au plan* U, *dans une raison constante, quels que soient ces deux sommets homologues.*

422. *Cas où le principe de dualité conduit aux figures polaires réciproques.* — En général, quand on applique le principe de dualité à une certaine figure, il n'y a pas réciprocité entre cette figure et celle qu'on en déduit; c'est-à-dire que si l'on obtient une figure S, en faisant mouvoir le point directeur sur une figure S′, et si l'on fait ensuite mouvoir le point directeur sur la figure S, on ne retrouve pas, en général, la figure S′, mais une autre figure S″. Pour que la réciprocité existe, les coefficients des équations (3), n° 413, doivent être liés par des relations que nous allons établir en supposant, pour simplifier, qu'il s'agisse de figures planes.

Considérons deux droites ayant pour coordonnées u_1, u_2, u_3 et u'_1, u'_2, u'_3 ; les pôles de ces droites seront représentés respectivement par les deux équations

$$\begin{vmatrix} U_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ U_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ U_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} U_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ U_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ U_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & u'_1 & u'_2 & u'_3 \end{vmatrix} = 0;$$

Les conditions pour que le pôle de la première de ces droites se trouve sur la seconde, et le pôle de la seconde sur la première, sont donc respectivement

$$\begin{vmatrix} u'_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u'_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ u'_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ u_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & u'_1 & u'_2 & u'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces conditions deviennent évidemment identiques si $a_{ki} = a_{ik}$ pour toutes les valeurs que peuvent prendre les doubles indices. Alors il y a réciprocité entre les deux droites et leurs pôles; c'est-à-dire que, deux droites quelconques étant données, si le pôle de la première est situé sur la seconde, réciproquement le pôle de seconde sera situé sur la première. Cette condition est précisément celle qui caractérise deux figures polaires réciproques; donc, *si on a la relation générale $a_{ki} = a_{ik}$, l'affinité dualistique se transforme en réciprocité polaire*.

Il est aisé de trouver la conique directrice qui conduit à cette transformation. En effet, si on considère d'abord le principe de dualité au point de vue le plus général, on verra qu'il existe dans le plan des deux figures corrélatives deux coniques remarquables dont *l'une est le lieu des points tels que quand l'un d'eux est pris pour point directeur, il se trouve sur la position correspondante de la droite mobile*; l'autre conique est *l'enveloppe de ces positions où la droite mobile passe par le point directeur.*

Pour trouver l'équation de la première de ces courbes, remarquons que le point directeur se trouve sur la position correspondante de la droite mobile quand les coordonnées x'_1, x'_2, x'_3 du point directeur vérifient l'équation (1) c'est-à-dire quand on a

$$u_1 x'_1 + u_2 x'_2 + u_3 x'_3 = 0;$$

en remplaçant u_1, u_2, u_3 par leurs valeurs (3), on a une équation du second degré qu'on peut mettre sous la forme

(10) $$\Sigma\Sigma a_{ik}x'_i x'_k = 0\,;$$

on devra faire i successivement égal à 1, 2, 3; et dans le résultat, opérer ensuite de la même manière sur k. Si on considère les x' comme variables, ce que nous indiquerons en employant les grandes lettres, on a

$$\Sigma\Sigma a_{ik}X_iX_k = 0\,;$$

c'est l'équation d'une conique, laquelle est *le lieu des points directeurs situés sur les positions correspondantes de la droite mobile*.

Résolvons maintenant les équations (3) par rapport aux x, ce qui conduit aux équations (6), et pour exprimer de nouveau que la droite mobile passe par le point directeur, substituons ces valeurs de x'_1, x'_2, x'_3 à X_1, X_2, X_3 dans l'équation (1). Nous aurons ainsi la relation à laquelle doivent satisfaire les coordonnées de la droite mobile pour que celle-ci passe par la position correspondante du point directeur. Cette équation représente donc, en coordonnées tangentielles, l'*enveloppe des droites mobiles passant par les positions correspondantes du point directeur*. En employant encore les grandes lettres pour désigner des coordonnées variables, on aura

(11) $$\Sigma\Sigma A_{ik}U_iU_k = 0,$$

Les équations (10) et (11) représentent deux courbes qui se correspondent, puisque quand le point directeur parcourt la courbe représentée par l'équation (10), la droite mobile roule sur celle que représente l'équation (11).

En général ces deux courbes sont distinctes; mais elles deviennent identiques quand on a $a_{ik} = a_{ki}$, quels que soient i et k. En effet, dans ce cas l'équation (10) devient

$$a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{23}X_2X_3 + 2a_{31}X_3X_1 = 0,$$

et l'équation (11) prend la forme

$$A_{11}U_1^2 + A_{22}U_2^2 + A_{33}U_3^2 + 2A_{12}U_1U_2 + 2A_{23}U_2U_3 + 2A_{31}U_3U_1 = 0;$$

or on a vu (n° 315) que ces deux équations représentent la même courbe; de plus il est aisé de voir que si on prend cette conique comme directrice pour former la figure polaire réciproque d'une figure donnée on obtient précisément la même transformation que celle à laquelle conduit le principe de dualité dans le cas particulier qui nous occupe ici.

Remarque. — L'équation de la conique directrice se ramène à l'une des formes

$$a_1X_1^2 + a_2X_2^2 + a_3X_3^2 = 0 \quad \text{ou} \quad a_2a_3U_1^2 + a_3a_1U_2^2 + a_1a_2U_3^2 = 0,$$

suivant qu'on emploie les coordonnées ponctuelles ou les coordonnées tangentielles, quand on prend pour triangle de référence un triangle autopolaire (*). Si l'on veut que la seconde de ces équation ne diffère de la première que par la substitution des coordonnées tangentielles aux coordonnées ponctuelles, on doit poser

$$a_1 : a_2a_3 = a_2 : a_3a_1 = a_3 : a_1a_2 \quad \text{ou} \quad a_1 = 1,\ a_2 = \pm 1,\ a_3 = \pm 1.$$

On voit par là que dans la démonstration du n° 329 on peut prendre l'équation de la conique directrice sous l'une des formes $X_1^2 \pm X_2^2 \pm X_3^2 = 0$. Il est bon d'observer que la conique directrice peut-être imaginaire sans que la polaire d'un point réel cesse d'être réelle.

423. *Principe d'homographie.* — Étant donnée une figure S, si l'on construit la figure corrélative S′ en appliquant le principe de dualité; si l'on construit ensuite la figure corrélative de S′ en appliquant une seconde fois le même principe, on trouvera une troisième figure S″ qui sera généralement différente de S. Il n'y a d'exception que quand la transformation est celle qui résulte de la théorie des pôles et plans polaires par rapport à une surface du second degré. Alors les deux figures S et S′ sont deux figures polaires réciproques, de sorte que S″ n'est autre que S. Dans tout autre cas ces figures sont différentes.

Or, les propositions auxquelles on applique le principe de dualité conduisent souvent à des propositions d'une plus grande généralité dans leur genre que les premières dans le leur. On conçoit donc qu'en formant la figure S″, celle-ci pourra conduire à des propositions du même genre que celles qu'on déduit de la figure S, mais plus générales que ces dernières. Le principe de dualité offre donc le moyen de généraliser une foule de propositions connues. Et on voit sur-le-champ que, ce moyen devant toujours être le même, puisqu'il se réduit à répéter deux fois le mécanisme de la transformation des figures par le principe de dualité, il peut être érigé lui-même en principe général de l'étendue, immédiatement applicable aux figures proposées.

(*) Voir : CLEBSCH, *Leçons sur la géométrie*, t. I, p. 110.

Voici comment, d'après Chasles, nous énoncerons ce principe :

Une figure de forme quelconque étant donnée dans l'espace, on peut toujours concevoir une seconde figure du même genre, jouissant des mêmes propriétés descriptives que la première; c'est-à-dire qu'à chaque point, à chaque plan, à chaque droite de la première figure, correspondent dans la seconde un point, un plan et une droite.

Aux points situés à l'infini dans l'une des figures correspondent dans l'autre des points situés tous dans un même plan; de sorte qu'à des faisceaux de droites parallèles, appartenant à l'une des figures, correspondent dans l'autre des faisceaux de droites concourantes en des points situés tous dans un même plan.

Les deux figures ont entre elles des relations de grandeur qui consistent en ce que :

1° *Le rapport anharmonique de quatre points situés en ligne droite dans l'une est égal au rapport anharmonique des quatre points homologues dans l'autre;*

2° *Et le rapport anharmonique de quatre plans de l'une des figures, passant par une même droite, est égal au rapport anharmonique des quatre plans homologues dans l'autre figure.*

La droite par laquelle passent les quatre plans peut être à l'infini, en d'autres termes, les quatre plans peuvent être parallèles. Il n'en résulte aucune difficulté, puisqu'on peut, au rapport anharmonique des quatre plans, substituer celui des points où ils sont coupés par une transversale quelconque.

Démonstration. — La démonstration de ce principe se réduit aux considérations indiquées plus haut. Il suffit de concevoir une figure S′, corrélative de la proposée S, c'est-à-dire sa transformée par le principe de dualité. Puis de former une autre figure S″ corrélative de S′. Il est clair que S″ sera du même genre que S, et que les deux figures auront toutes les dépendances comprises dans l'énoncé du principe.

424. On fait usage dans les arts et dans la géométrie rationnelle de plusieurs modes de déformation des figures, qui offrent des applications du principe d'homographie.

Par exemple, quand on fait la perspective d'une figure plane on a une seconde figure plane qui satisfait à l'énoncé du principe.

Il en est de même de deux figures quelconques semblables entre elles.

Quand de tous les points d'une figure on abaisse des ordonnées sur un

plan, et que par tous leurs pieds on mène des droites parallèles entre elles et proportionnelles aux ordonnées, les extrémités de ces droites forment une deuxième figure qui est encore homographique de la proposée.

Il en est de même de la figure que l'on forme en augmentant dans des rapports donnés les trois coordonnées de chaque point d'une figure proposée, en changeant ou non les directions des axes.

La déformation la plus générale qu'on puisse faire subir à une figure pour obtenir une figure homographique consiste à faire correspondre à chaque point de la première un point de la seconde en exprimant les coordonnées du premier point au moyen de fonctions linéaires de celles du second. Dans le cas des figures planes cela conduit aux équations

$$\rho x_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3,$$
$$\rho x_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3,$$
$$\rho x_3 = a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3;$$

desquelles on tire par résolution

$$\sigma y_1 = A_{11} x_1 + A_{21} x_2 + A_{31} x_3,$$
$$\sigma y_2 = A_{12} x_1 + A_{22} x_2 + A_{32} x_3,$$
$$\sigma y_3 = A_{13} x_1 + A_{23} x_2 + A_{33} x_3.$$

Ces relations établissent entre les deux figures ce que Clebsch appelle une *affinité linéaire ou collinéation;* et il est aisé de voir que ces deux figures sont homographiques; à chaque point correspond un point et à chaque droite, une droite.

On peut observer que les formules ci-dessus sont les mêmes que les formules (14) et (15) du n° 265. Mais tandis qu'il s'agissait là d'un même point rapporté à deux triangles différents, on a ici deux points rapportés au même triangle.

425. *Application.* — Pour présenter une application du principe d'homographie, nous ferons voir que le théorème du Carnot (n° 353) peut être regardé comme une généralisation du théorème de Newton (n° 352).

Le théorème de Newton, appliqué aux surfaces, consiste en ce que : Dans toute surface géométrique, de quelque point de l'espace qu'on mène deux transversales parallèles à deux axes fixes, le rapport des produits des segments formés sur les deux transversales entre ce point et la surface, reste constant. (Les segments sont, d'ailleurs, affectés de signes

qui indiquent de quel côté du point fixe ils sont situés sur les deux transversales).

Soient une surface quelconque S (fig. 139) et deux points fixes i et j. D'un point quelconque m de l'espace, menons deux transversales passant par ces points et rencontrant la surface respectivement en a, a', a'', ... et b, b', b'', ... Construisons la figure homographique de manière que les points i et j de la figure proposée correspondent à des points situés à l'infini dans la transformée. A des droites qui passent par i et j dans la première figure correspondent dans la seconde figure des droites parallèles à deux axes fixes. Nous aurons donc une surface S′ et deux transversales menées parallèlement à deux droites fixes par le point M qui correspond à m. Ces transversales rencontrent la surface S′ respectivement en A, A′, A″, ..., B, B′, B″, ...

Soit encore un plan fixe P, rencontré par les transversales ma, mb aux points e, f. Dans la figure homographique nous aurons un plan P′ rencontré par MA et MB aux points E et F.

Cela posé, au point i de la droite ma correspond le point ω placé à l'infini sur MA et, par conséquent, le rapport anharmonique des quatre points m, i, a, e est égal à celui des quatre points M, ω, A, E, c'est-à-dire que l'on a

$$-\left(\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{EM}}\right)=\left(\frac{am}{em}\right):\left(\frac{ai}{ei}\right)=\left(\frac{am}{ai}\right):\left(\frac{em}{ei}\right).$$

Chacun des points A′, A″, ... donne une relation semblable, et en multipliant toutes ces relations membre à membre, on a, si la surface est du degré n,

$$(1)\quad (-1)^n\left(\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{EM}}\right)\left(\frac{\mathrm{A'M}}{\mathrm{EM}}\right)\left(\frac{\mathrm{A''M}}{\mathrm{EM}}\right)\cdots=\left(\frac{am}{ai}\right)\left(\frac{a'm}{a'i}\right)\left(\frac{a''m}{a''i}\right)\cdots\times\left(\frac{em}{ei}\right)^n.$$

D'une manière semblable les transversales mb et MB conduisent à la relation

$$(2)\quad (-1)^n\left(\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{FM}}\right)\left(\frac{\mathrm{B'M}}{\mathrm{FM}}\right)\left(\frac{\mathrm{B''M}}{\mathrm{FM}}\right)\cdots=\left(\frac{bm}{bj}\right)\left(\frac{b'm}{b'j}\right)\left(\frac{b''m}{b''j}\right)\cdots\times\left(\frac{fm}{fj}\right)^n.$$

Observons maintenant que si l'on désigne par dm, di, dj les distances des trois points m, i, j au plan fixe P, on a

$$\left(\frac{em}{ei}\right)=\left(\frac{dm}{di}\right);\ \left(\frac{fm}{fj}\right)=\left(\frac{dm}{dj}\right);$$

et, par conséquent,

$$\left(\frac{em}{ei}\right) : \left(\frac{fm}{fj}\right) = \left(\frac{dj}{di}\right).$$

Ce rappprt est donc constant quelle que soit la position du point m dans la figure donnée.

D'autre part, en vertu du théorème de Newton on a

$$\left(\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}\right)\left(\frac{\mathrm{A'M}}{\mathrm{B'M}}\right)\left(\frac{\mathrm{A''M}}{\mathrm{B''M}}\right)\cdots = \text{constante},$$

quelle que soit la position du point M ; et puisque les droites EM et FM sont parallèles à deux axes fixes, le rapport $\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{FM}}$ est aussi constant quel que soit ce point M.

Donc, si on divise membre à membre les deux relations (1) et (2), le premier membre se réduira à une constante, et il viendra simplement

$$\left(\frac{am}{ai}\right)\left(\frac{a'm}{a'i}\right)\left(\frac{a''m}{a''i}\right)\cdots : \left(\frac{bm}{bj}\right)\left(\frac{b'm}{b'j}\right)\left(\frac{b''m}{b''j}\right)\cdots = \text{constante}.$$

On peut donc énoncer cette propriété générale des surfaces géométriques :

Quand on a une surface géométrique et deux points fixes i et j, de quelque point m de l'espace qu'on mène deux transversales passant respectivement par ces deux points fixes, le produit des rapports de segments qui déterminent sur la transversale mi les points de rencontre a, a', a'', ... de cette droite avec la surface, est au produit des rapports de segments qui déterminent sur la transversale mj les points de rencontre b, b', b'', ... de cette deuxième droite avec la surface, dans une raison constante, quelle que soit la position du point m.

Pour déterminer la constante qui entre dans cette relation, supposons que le point m soit en m' sur la droite ij. Le rapport

$$\left(\frac{am}{ai}\right) : \left(\frac{bm}{bj}\right) \quad \text{devient alors} \quad \left(\frac{cm'}{ci}\right) : \left(\frac{cm'}{cj}\right);$$

et il est aisé de voir que celui-ci se réduit à $-\left(\frac{cj}{ci}\right)$. Donc, si c, c', c'', ... sont les points de rencontre de la droite ij avec la surface S, l'égalité ci-dessus deviendra

$$(-1)^n \left(\frac{cj}{ci}\right)\left(\frac{c'j}{c'i}\right)\left(\frac{c''j}{c''i}\right)\cdots = \text{constante},$$

et on en déduit finalement

$$\left(\frac{am}{ai}\right)\left(\frac{a'm}{a'i}\right)\left(\frac{a''m}{a''i}\right)\cdots\left(\frac{bj}{bm}\right)\left(\frac{b'j}{b'm}\right)\left(\frac{b''j}{b''m}\right)\cdots\left(\frac{ci}{cj}\right)\left(\frac{c'i}{c'j}\right)\left(\frac{c''i}{c''j}\right)\cdots$$
$$=(-1)^n.$$

Nous retrouvons donc le beau théorème de Carnot, démontré au n° 354 pour les courbes, et étendu ici aux surfaces géométriques.

426. *Construction géométrique des figures homographiques.* — Pour construire une figure homographique d'une figure proposée, on peut prendre arbitrairement dans l'espace les cinq points a', b', c', d', e' dont quatre quelconques ne sont pas dans un même plan, pour les faire correspondre respectivement à cinq points a, b, c, d, e satisfaisant à la même condition et pris à volonté dans la figure proposée (fig. 140).

Ces cinq points suffiront pour déterminer chaque point m', et chaque plan M′ de la nouvelle figure qui correspondront respectivement à chaque point m, et à chaque plan M de la proposée.

Considérons, en effet, les deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$. Menons dans le premier les deux plans ebc, mbc, qui rencontrent l'arête ad en ε et α respectivement; et dans le second les deux plans $e'b'c'$, $m'b'c'$ qui rencontrent l'arête $a'd'$ en ε' et α'. Les quatre points a', d', ε', α' sont dans la deuxième figure les homologues des quatre points a, d, ε, α de la première figure. On a donc

$$\left(\frac{a\alpha}{d\alpha}\right):\left(\frac{a\varepsilon}{d\varepsilon}\right)=\left(\frac{a'\alpha'}{d'\alpha'}\right):\left(\frac{a'\varepsilon'}{d'\varepsilon'}\right).$$

Cette égalité fait connaître le point α'; car son premier membre est connu, de même que les trois points a', d', ε'. De sorte que le plan mené par l'arête $b'c'$ du tétraèdre $a'b'c'd'$ et par le point cherché m', est déterminé. Par deux équations semblables on déterminera les plans qui passeront par les arêtes $c'a'$, $a'b'$, respectivement, et par le point cherché. Ce point m' sera donc déterminé par l'intersection de ces trois plans.

Maintenant déterminons le plan M′ qui, dans la seconde figure, correspond au plan M de la première.

Soit α le point où ce plan rencontre l'arête ad et soit α' le point correspondant à α dans la deuxième figure; c'est le point où le plan

cherché M′ rencontre l'arête $a'\,d'$. On a donc entre les quatre points a', d', ε', α' la même relation que ci-dessus

$$\left(\frac{a\alpha}{d\alpha}\right):\left(\frac{a\varepsilon}{d\varepsilon}\right)=\left(\frac{a'\alpha'}{d'\alpha'}\right):\left(\frac{a'\varepsilon'}{d'\varepsilon'}\right)$$

qui fait connaître la position du point α'.

On déterminera par deux équations semblables les points β' et γ' où le plan cherché rencontre les arêtes $d'b'$ et $d'c'$ du tétraèdre. Ainsi ce plan sera déterminé par les points α', β', γ'.

Si le plan M de la première figure est à l'infini, la solution reste la même, seulement dans l'équation qui sert à déterminer le point α' du plan cherché, le rapport $\left(\frac{a\alpha}{d\alpha}\right)$ devient égal à -1. On trouvera donc sans peine sur les trois arêtes du second tétraèdre les points qui correspondent à l'infini, et on aura ainsi le plan de la seconde figure qui répond à l'infini de la première.

Le problème de la construction géométrique des figures homographiques est donc résolu complètement.

427. Ce mode de construction peut être exprimé par trois formules très simples qui se prêtent à la discussion des différents cas qui peuvent se présenter et qui ont conduit Chasles à divers théorèmes de géométrie. L'équation

$$\left(\frac{a\alpha}{d\alpha}\right):\left(\frac{a\varepsilon}{d\varepsilon}\right)=\left(\frac{a'\alpha'}{d'\alpha'}\right):\left(\frac{a'\varepsilon'}{d'\varepsilon'}\right)$$

peut s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{a\alpha}{d\alpha}\right)=\left(\frac{a'\alpha'}{d'\alpha'}\right)\times\left[\left(\frac{a\varepsilon}{d\varepsilon}\right):\frac{a'\varepsilon'}{d'\varepsilon'}\right)\right].$$

Le rapport

$$\left(\frac{a\varepsilon}{d\varepsilon}\right):\left(\frac{a'\varepsilon'}{d'\varepsilon'}\right)$$

est une quantité constante puisqu'il ne dépend que de la position du point fixe e de la première figure, et du point fixe e' qui lui correspond dans la deuxième figure. Représentons ce rapport constant par λ, il viendra

$$\left(\frac{a\alpha}{d\alpha}\right)=\lambda\left(\frac{a'\alpha'}{d'\alpha'}\right).$$

Pareillement, β et β' étant les points où les deux plans *mac*, *m'a'c'* rencontrent respectivement les deux arêtes *bd*, *b'd'* des deux tétraèdres, on a

$$\left(\frac{b\beta}{d\beta}\right)=\mu\left(\frac{b'\beta'}{d'\beta'}\right),$$

μ étant une constante.

Et enfin, γ, γ' étant les points où les deux plans *mab*, *m'a'b'* rencontrent respectivement les deux arêtes *cd*, *c'd'*, on a

$$\left(\frac{c\gamma}{d\gamma}\right)=\nu\left(\frac{c'\gamma'}{d'\gamma'}\right)$$

ν étant une troisième constante.

De ces équations on conclut ce théorème général sur les figures homographiques :

Étant donnés deux tétraèdres quelconques abcd, a'b'c'd', si par chaque point m d'une figure donnée on mène trois plans passant par les trois arêtes bc, ca, ab du premier tétraèdre, et rencontrant respectivement les arêtes opposées en α, β, γ, *et que sur les trois arêtes a'd', b'd', c'd' du second tétraèdre on prenne trois points* α', β', γ' *déterminés par les trois équations.*

$$\left(\frac{a\alpha}{d\alpha}\right)=\lambda\left(\frac{a'\alpha'}{d'\alpha'}\right),\quad \left(\frac{b\beta}{d\beta}\right)=\mu\left(\frac{b'\beta'}{d'\beta'}\right),\quad \left(\frac{c\gamma}{d\gamma}\right)=\nu\left(\frac{c'\gamma'}{d'\gamma'}\right),$$

λ, μ, ν *étant trois constantes prises arbitrairement; le point d'intersection des trois plans* $\alpha'b'c'$, $\beta'c'a'$, $\gamma'a'b'$ *correspondra au point m dans une seconde figure, qui sera homographique à la première.*

Les trois équations ci-dessus comprennent la construction complète des figures homographiques les plus générales. Car elles donnent les positions des trois points α', β', γ', correspondant respectivement aux trois points α, β, γ, et ceux-ci déterminent un point et un plan de la figure proposée.

Ce plan est celui des trois points, et ce point est l'intersection des trois plans menés respectivement par ces trois points et par les arêtes *bc*, *ca*, *ab* du premier tétraèdre. Les trois autres points α', β', γ' déterminent semblablement un plan et un point de la seconde figure correspondant respectivement au plan et au point de la première.

Ainsi ces trois équations serviront à la construction des points et des plans d'une figure homographique à une figure proposée.

Les quatre points *a*, *b*, *c*, *d* qui sont les sommets du premier tétraèdre

auquel on rapporte la figure proposée, peuvent être pris arbitrairement dans l'espace, pourvu qu'ils ne soient pas dans un même plan; il en est de même des quatre points a', b', c', d' qui leur correspondent dans la figure homographique qu'on veut construire.

Chasles a fait remarquer que ce théorème conduit à deux propositions de géométrie dont il a donné des démonstrations directes et dont on peut déduire toute la théorie des figures homographiques.

428. *Figures homologiques.* — Soient a, b, c, d (fig. 141), quatre points d'une figure dans l'espace; formons une figure homographique dans laquelle les quatre points qui correspondent à ces points respectivement, soient ces points eux-mêmes.

Soient un cinquième point m de la figure proposée et m' son homologue dans la figure homographique. Désignons par α, β, γ les points où les trois plans mbc, mca, mab, rencontrent les trois arêtes ad, bd, cd du tétraèdre $abcd$; et par α' β', γ' les points où les trois plans $m'bc$, $m'ca$, $m'ab$ rencontrent les mêmes arêtes; nous avons vu qu'on a

$$\left(\frac{a\alpha}{d\alpha}\right)=\lambda\left(\frac{a\alpha'}{d\alpha'}\right);\ \left(\frac{b\beta}{d\beta}\right)=\mu\left(\frac{b\beta'}{d\beta'}\right);\ \left(\frac{c\gamma}{d\gamma}\right)=\nu\left(\frac{c\gamma'}{d\gamma'}\right).$$

Le point m', homologue de m, peut être pris arbitrairement dans l'espace. Supposons qu'il soit situé sur la droite dm, et soit δ le point où cette droite rencontre le plan abc; on aura

$$\left(\frac{a\alpha}{d\alpha}\right):\left(\frac{a\alpha'}{d\alpha'}\right)=\left(\frac{\delta m}{dm}\right):\left(\frac{\delta m'}{dm'}\right),$$

parce que chacun des deux membres de cette égalité exprime le rapport anharmonique des quatre plans δbc, mbc, dbc, $m'bc$. Comparant cette équation à la première des trois précédentes, on en conclut

$$\lambda=\frac{\delta m}{dm}:\frac{\delta m'}{dm'}.$$

En calculant de la même manière μ et ν, on trouve que les trois coefficients constants λ, μ, ν sont égaux entre eux.

Réciproquement, quand ces trois coefficients sont égaux, chaque point m' de la seconde figure est situé sur la droite menée du point correspondant m, au sommet d du tétraèdre $abcd$. Car, soit m'' le point où le plan $m'bc$ rencontre la droite dm; on aura

$$\left(\frac{a\alpha}{d\alpha}\right):\left(\frac{a\alpha'}{d\alpha'}\right)=\left(\frac{\delta m}{dm}\right):\left(\frac{\delta m''}{dm''}\right).$$

Soit m''' le point où le plan $m'ac$ rencontre la même droite dm ; on aura

$$\left(\frac{b\beta}{d\beta}\right):\left(\frac{b\beta'}{d\beta'}\right)=\left(\frac{\delta m}{dm}\right):\left(\frac{\delta m'''}{dm'''}\right).$$

Les premiers membres de ces équations sont égaux, puisque nous avons supposé $\lambda=\mu$; les seconds membres sont donc égaux aussi ; d'où l'on conclut que les points m'', m''' se confondent ; c'est-à-dire que les deux plans $m'bc$, $m'ac$ passent par le même point de la droite dm ; ou encore, que les deux droites cm', dm, se rencontrent.

Ainsi quand $\lambda=\mu$, les deux droites dm, cm' se rencontrent toujours, quels que soient les deux points homologues m et m'.

Pareillement, si l'on a $\mu=\nu$, les deux droites dm, am' se rencontreront. Donc si l'on a en même temps $\lambda=\mu=\nu$, les deux droites cm', am' rencontreront la droite dm ; c'est-à-dire que le point m' sera sur la droite dm.

Par conséquent, quand on a $\lambda=\mu=\nu$, deux points homologues quelconques des deux figures sont toujours sur une droite qui passe par d, et le point m', homologue de m, peut se construire simplement en prenant

$$\frac{\delta m}{dm}=\lambda\frac{\delta m'}{dm'}.$$

Il suit de là que :

Chaque point du plan abc est lui-même son homologue dans les deux figures ; et par conséquent :

Deux plans homologues des deux figures rencontrent le plan abc suivant la même droite.

Deux droites homologues percent ce plan au même point.

Les figures qui jouissent de ces propriétés descriptives ont été étudiées sous le nom de *figures homologiques* par Poncelet. Le point d est leur *centre d'homologie;* et le plan abc leur *plan d'homologie.*

Reprenons la relation

$$\lambda=\left(\frac{\delta m}{dm}\right):\left(\frac{\delta m'}{dm'}\right).$$

Elle peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{dm'}{dm}\right):\left(\frac{\delta m'}{\delta m}\right)=\lambda.$$

Désignons par mp et $m'p'$ les perpendiculaires abaissées de m et m' sur le plan d'homologie. On a évidemment

$$\left(\frac{\partial m'}{\partial m}\right) = -\left(\frac{m'p'}{mp}\right),$$

le rapport $\left(\frac{m'p'}{mp}\right)$ étant censé affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que les perpendiculaires tombent du même côté de ce plan ou de côtés opposés. La relation ci-dessus devient donc

$$\left(\frac{dm'}{dm}\right) : \left(\frac{m'p'}{mp}\right) = -\lambda.$$

Sous cette forme elle exprime que :

Dans deux figures homologiques, le rapport des distances de deux points homologues au centre d'homologie, est au rapport des distances de ces deux points au plan d'homologie, dans une raison constante.

La même relation

$$\lambda = \left(\frac{dm'}{dm}\right) : \left(\frac{\partial m'}{\partial m}\right),$$

conduit encore à la conséquence suivante :

Étant donnée une figure, et étant pris un point d et un plan fixe abc, si de ce point on mène une droite à chaque point m de la figure, qu'on la prolonge jusqu'à sa rencontre en ∂ avec ce plan fixe, et qu'on prenne sur cette droite un point m' tel que l'on ait

$$\left(\frac{dm'}{dm}\right) : \left(\frac{\partial m'}{\partial m}\right) = \lambda,$$

λ étant une constante quelconque, le point m' appartiendra à une figure homologique à la proposée. Le point d et le plan abc seront le centre et le plan d'homologie des deux figures.

Dans le cas particulier où la constante λ est égale à -1 les points m et m' sont conjugués harmoniques sur la droite $d\partial$.

Les deux tétraèdres du n° 421, p. 460, sont évidemment deux figures homologiques.

CHAPITRE VII.

COMPLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE & D'ALGÈBRE.

§ 1. Principes généraux du calcul des congruences.

429. Nous avons déjà dit que l'arithmétique comprend deux parties distinctes.

L'objet de la première est de donner des règles pour énoncer et écrire tous les nombres, et effectuer les opérations relatives à la composition et décomposition des nombres. Dans la seconde partie on se propose d'étudier les propriétés des nombres, qui sont indépendantes du système de numération, par exemple, la propriété d'un nombre d'être divisible par un autre nombre, d'en être une puissance exacte, etc.; cette partie plus élevée de l'arithmétique est ce qu'on appelle la *théorie des nombres.*

Nous nous proposons d'établir ici quelques-uns des principes fondamentaux de cette théorie, particulièrement propres à montrer le lien étroit qui existe entre toutes les branches des mathématiques; il existe entre ces diverses branches des rapports si intimes, que tout progrès de l'une d'elles, est le plus souvent la source de certains progrès de quelques autres (*).

430. *Des congruences.* — En général dans les questions relatives à la divisibilité des nombres, les restes des divisions jouent un rôle plus

(*) On trouvera dans un mémoire de Poinsot intitulé : *Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres*, une grande partie des démonstrations que nous donnons dans ce chapitre.

important que les quotients qui, la plupart du temps, peuvent être des nombres entiers quelconques, dont on n'a pas à s'occuper. Les restes s'appellent *résidus*.

Lorsqu'un nombre a est divisible par un autre nombre p, cette propriété de a s'exprime, d'après une notation de Gauss, par le signe $a \equiv 0 \pmod{p}$, lequel s'énonce : *a est congru à zéro pour le module p*. Cette expression de la divisibilité de a par p s'appelle une *congruence*.

Si un nombre a divisé par p donne le résidu r, $a - r$ est divisible par p, d'où, $a - r \equiv 0 \pmod{p}$.

Mais cette congruence peut encore se mettre sous la forme $a \equiv r$, (mod. p), laquelle signifie que les nombres a et r ne diffèrent l'un de l'autre que par un multiple de p.

Une autre notation fréquemment employée, consiste à écrire $a = r + mp$; ce qui exprime que a est égal à r augmenté d'un multiple quelconque de p.

431. Voici quelques principes généraux relatifs aux congruences de même module.

1° *On peut sans altérer une congruence, ajouter un même nombre entier aux deux membres, ou l'en retrancher.*

Car la différence des deux membres n'est pas altérée par l'opération dont il s'agit. Elle ne cessera donc pas d'être égale à un multiple de p. On peut donc faire passer un terme entier d'un membre d'une congruence dans l'autre en changeant son signe.

2° *On peut aussi ajouter à l'un des deux membres un multiple quelconque de p, ou l'en retrancher.* Car la différence restera un multiple de p.

3° Des deux principes ci-dessus énoncés il résulte encore qu'*on peut ajouter ou retrancher membre à membre deux congruences quelconques.* Car cela revient à ajouter aux deux membres de la première certains multiples de p, plus un même résidu.

4° *On peut multiplier les deux membres d'une congruence par un même nombre entier.*

Car de la congruence $a \equiv b$, on tire $a - b \equiv 0$, c'est-à-dire que $a - b$ est un multiple de p; le produit de $a - b$ par un nombre entier quelconque m sera donc aussi un multiple de p, et on aura $m(a - b) \equiv 0$, d'où enfin, $ma \equiv mb \pmod{p}$.

Cette proposition peut aussi se démontrer en ajoutant m fois à elle-même la congruence $a \equiv b$.

5° *On peut multiplier deux congruences membre à membre.*

Car soit $a \equiv b$ et $c \equiv d$ (mod. p), je dis qu'on aura $ac \equiv bd$.

Et, en effet, $a = b + mp$, $c = d + m'p$; donc

$$ac = (b + mp)(d + m'p) = bd + m''p,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

COROLLAIRE. — *On peut sans altérer une congruence, en élever les deux membres à une puissance entière quelconque.*

6° *On peut sans altérer une congruence, diviser ses deux membres par tout nombre premier avec le module.*

Car, soient $a \equiv b$, (mod. p), ou, $a - b = mp$, et supposons qu'un nombre q, premier avec p, divise a et b ; la différence $a - b$ sera aussi divisible par q, ou ce qui revient au même, q divisera le produit mp. Or q est premier avec p, on a donc $m = m'q$. Soit d'ailleurs $a = a'q$, $b = b'q$; on aura $a - b$ ou $(a' - b')\,q = mp = m'qp$; on aura donc aussi $a' - b' = m'p$, ou encore $a' \equiv b'$ (mod. p).

7° *Enfin si on a deux congruences telles que* $a \equiv r$, $b \equiv 1$ (*mod.* p) *et que* a *soit un multiple de* b, *on peut diviser ces congruences membre à membre.*

Car, supposons que l'on ait $a = bq$, et $b = mp + 1$; on aura $a = (mp + 1)\,q$, ou $a \equiv q$; d'ailleurs, on a, par hypothèse, $a \equiv r$. Donc aussi, $q \equiv r$. C. Q. F. D.

§ 2. Sur le nombre des entiers qui peuvent rendre un polynôme exactement divisible par un entier donné.

432. Considérons une équation indéterminée à deux inconnues x et y, de la forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots + Sx + T = py,$$

dans laquelle A, B, C, ... et p sont des nombres entiers, et dont, pour abréger, nous désignerons le premier membre par X.

Résoudre cette équation en nombre entiers, revient à déterminer les valeurs entières de x qui rendent le premier membre exactement divisibles par p, ou, en d'autres termes, c'est trouver les valeurs de x qui satisfont à la congruence $X \equiv 0$ (mod. p.)

Tout nombre entier qui, mis à la place de x, rend X divisible par p, est une racine de cette congruence.

433. *Si le module est un nombre premier, la congruence* $X \equiv 0$ (*mod.* p) *ne peut avoir plus de* m *racines inférieures à ce module.*

Remarquons d'abord que la congruence exprime simplement que le polynôme qui en forme le premier membre est un multiple de p et qu'on peut dès lors, sans altérer les solutions, y ajouter ou en retrancher un multiple quelconque de p.

Cela posé, si A n'était pas premier avec p, il serait de la forme μp, et l'on pourrait alors supprimer le premier terme de l'équation, laquelle ne serait plus ainsi que du degré $m-1$. On pourrait de même supprimer tout autre terme dont le coefficient ne serait pas premier avec p.

Tous les coefficients A, B, C, ... S, T, peuvent donc être supposés nuls ou premiers avec p; et je dis qu'en ajoutant à B, C, ... des multiples convenables de p, on pourra les rendre tous divisibles par A.

En effet, si on pose $\frac{B+ip}{A}=e$, on a une équation indéterminée du premier degré $Ae-pi=B$, dans laquelle les coefficients A et p des inconnues e et i sont premiers entre eux. Cette équation admet donc pour e et i des solutions en nombres entiers, et fait connaître le multiple ip qui, ajouté à B, donne une somme divisible par A.

On opérera de la même manière pour rendre tous les autres coefficients C, D, divisibles par A.

Le facteur A étant alors commun à tous les termes du premier membre de la congruence, et étant d'ailleurs premier avec le module, on peut le supprimer sans que la congruence en soit altérée.

Ainsi nous considérerons toujours la congruence sous cette forme, où le premier coefficient est l'unité, ceux des autres termes étant des entiers qu'on peut évidemment supposer moindres que p, puisqu'on peut en retrancher un multiple de p.

434. Soit maintenant la congruence

$$(1)\qquad X\equiv x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\cdots+Tx+U \pmod{p},$$

et soit a une des valeurs de x, moindres que p, pour lesquelles $X\equiv 0$; on aura

$$0\equiv a^m+Pa^{m-1}+\cdots+U;$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$X\equiv x^m-a^m+P(x^{m-1}-a^{m-1})+Q(x^{m-2}-a^{m-2})\cdots+T(x-a)$$

ou encore

$$(2)\qquad X\equiv(x-a)(x^{m-1}+P'x^{m-2}+\cdots+T')$$

Soit b une seconde valeur de x moindre que p, pour laquelle $X \equiv 0$; on aura

$$(b-a)(b^{m-1}+P'b^{m-1}+\cdots+T')\equiv 0.$$

Or, b et a sont inégaux et moindres que p, donc $b-a$ est premier avec p et, par conséquent,

$$b^{m-1}+P'b^{m-2}+\cdots+T'\equiv 0.$$

Multipliant cette dernière congruence par $(x-a)$ et la retranchant ensuite de la congruence (2), on pourra mettre celle-ci sous la nouvelle forme

$$X\equiv(x-a)(x-b)(x^{m-2}+P''x^{m-3}+\cdots)$$

On voit aisément que si $a, b, \ldots k, l$ sont m valeurs moindres que p qui satisfont à la congruence $X\equiv 0$, on aura pour toute valeur de x,

$$X\equiv(x-a)(x-b)\cdots(x-k)(x-l), \quad (\text{mod.}\ p).$$

Observons maintenant que, p étant un nombre premier, il ne peut diviser le second membre que s'il divise l'un de ses facteurs. Mais il est évident que chacun de ceux-ci ne devient divisible par p que pour une seule valeur de x inférieure à p; par exemple, le facteur $x-a$ n'est divisible par p, c'est-à-dire ne donne pour reste zéro, que si $x=a$. La congruence $X\equiv 0$ ne peut donc admettre que les m racines $a, b, c, .., k, l$, inférieures à p.

Quant aux racines supérieures à p, elles sont évidemment en nombre infini ; car, a étant une racine, on aurait encore une racine en ajoutant à a un multiple quelconque de p.

On peut encore observer que s'il y a θ racines inférieures à p, on a d'après la démonstration qui précède,

$$X\equiv(x-a)(x-b)\ldots(x-f)\,.\,Q_{m-\theta},$$

c'est-à-dire qu'abstraction faite des multiples de p, X sera congru au produit

$$(x-a)(x-b)\ldots(x-f),$$

multiplié par un polynôme entier du degré $m-\theta$.

Cette démonstration suppose que le module p soit un nombre premier. Car s'il s'agissait d'un module composé N, le produit des binômes $x-a$, $x-b$, $x-c$, ... pourrait être divisible par N sans qu'aucun d'eux le fût séparément. Il suffirait que l'un de ces binômes fût divisible par un des facteurs de N, et d'autres par les autres facteurs de ce

module; d'où il suit que la congruence $X \equiv 0$, (mod. N), peut avoir, si N est un nombre composé, plus de racines qu'il n'y a d'unités dans l'exposant de son degré.

Par la même démonstration on voit encore que la congruence $X \equiv 0$; (mod. p) peut avoir autant de racines moindres que p qu'il y a d'unités dans l'exposant de son degré; car pour former une congruence du degré m qui aurait m racines données a, b, c, d, ... moindres que p, il n'y aurait qu'à faire le produit

$$(x - a)(x - b)(x - c)\ldots$$

et à l'égaler à un multiple quelconque de p.

Ainsi, il y a une infinité de congruences qui ont effectivement m racines, et, si le module est un nombre premier, il ne peut y en avoir aucune de degré m qui ait plus de m racines; mais voilà tout ce qu'on peut conclure de la démonstration précédente. Lorsqu'on propose une congruence du degré m, on ne peut savoir immédiatement, en général, si elle a ou non des racines en nombres entiers. Il n'y a qu'un cas particulier fort remarquable, où l'on connaît toujours le nombre et les valeurs des racines par la forme même de la congruence proposée. Nous le rencontrerons plus loin quand nous nous occuperons du théorème de Fermat.

435. Du théorème relatif à la composition du polynôme X découle une conséquence importante : si l'on effectue le produit

$$(x - a)(x - b)\ldots(x - k)(k - l),$$

on aura

$$X \equiv x^m - x^{m-1}\Sigma a + x^{m-2}\Sigma ab \ldots \pm abc\ldots kl,$$

chaque signe sommatoire s'étendant à tous les termes de la forme de celui devant lequel il est placé.

Cette congruence doit exister pour toute valeur de x et, par conséquent, pour $x = 0$; or si l'on fait $x = 0$, X se réduit à U; donc

$$U \equiv \pm abc\ldots kl \pmod{p}.$$

Le signe + convient au cas ou m est pair, le signe — au cas ou m est impair.

Donc, *si le polynôme*

$$x^m + Px^{m-1} + \cdots + Tx + U,$$

est divisible par un nombre premier p pour m valeurs de x moindres que p,

le produit de ces racines diminué de U *est divisible par* p *quand* m *est pair; et le même produit augmenté de* U *est divisible par* p *quand* m *est impair.*

§ 3. — Théorèmes de Fermat, de Wilson et d'Euler.

436. Lemme. — *Soient* a *et* p *deux nombres premiers entre eux; multiplions* a *par la suite des nombres* $1, 2, 3, \ldots, \overline{p-1}$. *Nous formerons ainsi la suite des produits* $1a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a$; *divisons chacun d'eux par* p, *et désignons par* $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-1}$, *les résidus; je dis que deux quelconques de ceux-ci ne peuvent être égaux.*

Car, si en divisant ma et na par p on obtenait des résidus égaux, il en résulterait $ma \equiv na$ (mod. p), ou $(m-n)a \equiv 0$ (mod. p).

Mais a est premier avec p; $m-n$ devrait donc être divisible par p, ce qui est impossible, m et n étant par hypothèse inégaux et moindres que p.

Les résidus $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$, comprennent donc tous les nombres de la suite $1, 2, 3, \ldots, \overline{p-1}$.

437. Théorème de Fermat. — On a, par hypothèse, les congruences $1a \equiv r_1, 2a \equiv r_2, 3a \equiv r_3, \ldots, (p-1)a \equiv r_{p-1}$ (mod. p).

En les multipliant membre à membre on trouve

$$1.2.3\ldots\overline{p-1}\,.\,a^{p-1} \equiv r_1 r_2 \ldots r_{p-1};$$

mais nous venons de voir que

$$r_1 r_2 \ldots r_{p-1} = 1.2.3\ldots\overline{p-1};$$

donc la dernière congruence revient à

$$1.2.3\ldots\overline{p-1}\,(a^{p-1}-1) \equiv 0 \text{ (mod. } p).$$

Cette congruence existe toujours si a et p sont premiers entre eux. Mais si l'on suppose en outre que p soit premier absolu, il est premier avec chacun des facteurs du produit $1.2.3\ldots\overline{p-1}$; donc il divise le facteur $a^{p-1}-1$, et on a

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \text{ (mod. } p).$$

De là ce théorème, connu sous le nom de théorème de Fermat :

Si le nombre premier p *n'est pas un diviseur de* a, *le reste de la division de* a^{p-1} *par* p *est égal à l'unité.*

Il résulte du théorème de Fermat que l'équation $x^{p-1} - 1 = mp$ dans

laquelle p est un nombre premier, a pour racines les $p-1$ nombres $1, 2, 3, \ldots p-1$, inférieurs à p.

Corollaire. — Le théorème de Fermat conduit à une conséquence remarquable relative au nombre des racines entières que peut admettre une équation quelconque

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots = mp,$$

dans laquelle p est un nombre premier. Car, puisque aux multiples de p près, le binôme $x^{p-1} - 1$ est identique au produit

$$(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-\overline{p-1}),$$

il en résulte que si la proposée

$$x^m + Ax^{m-1} + \cdots \equiv 0$$

a m racines entières $e, e', e'', \ldots$ inférieures à p, le premier membre est, sauf les multiples de p, égal à un diviseur du binôme $x^{p-1} - 1$; ou plus généralement que, si elle a un nombre θ de racines entières, le polynôme $x^m + Ax^{m-1} + \cdots$ a nécessairement avec $x^{p-1} - 1$ un commun diviseur du degré θ; et la réciproque est manifeste. D'où l'on conclut qu'on peut toujours reconnaître si une congruence

$$x^m + Ax^{m-1} + \cdots \equiv 0 \pmod{p}$$

a des racines entières et quel est le nombre de ces racines, en cherchant le plus grand commun diviseur du polynome X et du binôme $x^{p-1} - 1$. Si ce commun diviseur existe, et qu'il soit du degré θ, la proposée a θ racines entières ; s'il n'y a pas de commun diviseur, la proposée n'admet aucune racine entière.

Il va de soi que dans la recherche du plus grand commun diviseur on peut, pour faciliter les opérations, ajouter au dividende et au diviseur de chaque division partielle, un multiple quelconque de p, ou l'en retrancher.

On voit par ce qui précède que toute congruence

$$x^m + Ax^{m-1} + \ldots \equiv 0 \pmod{p}$$

qui admet m racines, a pour premier membre un diviseur du binôme $x^{p-1} - 1$, à un multiple près du module p, et qu'ainsi la congruence $x^{p-1} - 1 \equiv 0$, qui semblait un cas particulier, est au fond très générale et renferme en quelque sorte toutes les autres, ce qui fait sentir toute l'importance du théorème de Fermat dans l'analyse indéterminée.

438. Théorème de Wilson. — Nous avons vu que le binôme $x^{p-1}-1$ dans lequel p est un nombre premier, a pour racines les $p-1$ nombres entiers inférieurs à p, et qu'on a, par conséquent,

$$x^{p-1}-1 \equiv (x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-\overline{p-1}).$$

D'après une remarque déjà faite, les termes indépendants de x, dans les deux membres de cette congruence, ne peuvent différer que d'un multiple de p ; d'où il suit, puisque $p-1$ est pair, que l'on a

$$1.2.3\ldots\overline{p-1} \equiv -1 \;(\text{mod.}\, p) \quad \text{ou} \quad 1,2,3,\ldots,\overline{p-1}+1 \equiv 0.$$

C'est-à-dire que *le produit de tous les nombres* $1.2.3\ldots\overline{p-1}$, *inférieurs à* p, *augmenté de* 1, *est toujours divisible par* p, *quand* p *est un nombre premier.* C'est le théorème de Wilson.

Il est aisé de voir que, réciproquement, si un nombre donné p divise le produit $1.2.3\ldots\overline{p-1}$ augmenté de l'unité, ce nombre est premier. Car, s'il n'était pas premier, ses facteurs seraient tous moindres que $p-1$, et par conséquent ils seraient compris au nombre des facteurs $1.2.3\ldots\overline{p-1}$. En décomposant p en un produit de deux facteurs quelconques a, b, on aurait donc

$$1.2.3\ldots\overline{p-1}+1 = m.ab$$

ou

$$1.2.3\ldots\overline{a-1}.\overline{a+1}\ldots\overline{p-1}+\frac{1}{a} = mb.$$

Ce qui est impossible.

439. Théorème d'Euler, *ou généralisation du théorème de Fermat.* — Le théorème de Fermat n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus général démontré pour la première fois par Euler dans les *Nouveaux commentaires de Saint-Pétersbourg*, années 1760 et 1761.

Soit x un nombre entier, premier avec un nombre quelconque $N = A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}\ldots$. Soient $1, a, b, \ldots, \overline{N-1}$, tous les facteurs en nombre n, premiers avec N et plus petits que N. Multiplions chacun d'eux par x et divisons par N tous les produits. En désignant par $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, les résidus, nous aurons les n congruences

$$1.x \equiv r_1, \quad a.x \equiv r_2, \quad b.x \equiv r_3, \ldots, \overline{N-1}.x \equiv r_n, \quad (\text{mod. N}).$$

Nous avons déjà prouvé (n° 436) que ces n résidus sont tous différents. Je dis en outre qu'un quelconque d'entre eux, r_2 par exemple, est pre-

mier avec N. Car, s'il pouvait y avoir un facteur commun entre r_2 et N, ce facteur diviserait à la fois r_2, et $ax - r_2$ qui est un multiple de N. Il existerait donc un facteur commun entre N et ax, ce qui est impossible, a et x étant premiers avec N par hypothèse.

Puisque ces résidus sont différents, premiers avec N et plus petits que N, qu'ils sont, d'ailleurs, en nombre n, égal à celui des nombres $1, a, b, \ldots, \overline{N-1}$, premiers avec N, et plus petits que N, il s'ensuit que cet ensemble de résidus comprend tous les nombres de la suite $1, a, b, \ldots, \overline{N-1}$, mais dans un ordre nouveau. Donc, en multipliant entre elles les congruences ci-dessus, on a

$$a.b.c\ldots\overline{N-1}.x^n \equiv a.b.c\ldots\overline{N-1}$$

ou

$$a.b.c\ldots\overline{N-1}.(x^n-1)\equiv 0\ldots(\text{mod. N}).$$

Mais N, premier avec chacun des facteurs $a, b, c, \ldots, \overline{N-1}$, est premier avec leur produit; donc il divise le facteur $x^n - 1$, et on a la congruence $x^n - 1 \equiv 0$ (mod. N); par conséquent, *si n marque combien il y a de nombres inférieurs à* N *et premiers avec* N, $x^n - 1$ *est toujours divisible par* N, *pourvu que x soit un nombre premier avec* N.

Si N est premier absolu, il est clair que $n = N - 1$, et que l'on retombe de cette manière sur le théorème de Fermat.

Donc, la congruence $x^n - 1 \equiv 0$, rapportée au module composé N, a n racines entières qui sont les n nombres inférieurs à N et premiers avec N; et il est aisé de voir qu'elle ne peut en avoir d'autres. Car soit, s'il est possible, une racine x ayant avec N un commun diviseur θ, de manière qu'on ait $x = \theta y$ et $N = \theta P$. On aurait donc, par hypothèse, $\theta^n y^n - 1 = m\theta P$; d'où il résulterait $\theta^{n-1} y^n - \frac{1}{\theta} = mP$, équation impossible à moins que θ ne soit égal à l'unité. et que, par conséquent, x et N ne soient premiers entre eux. Ainsi l'équation $x^n - 1 = mN$ ne peut être résolue que par les nombres premiers avec N, et n'a que n racines, en nombres entiers inférieurs à N. Quant aux autres solutions, on les obtient en ajoutant à celles que nous venons de considérer, des multiples quelconques de N.

Ce qu'on vient de dire est d'autant plus remarquable que si le binôme $x^n - 1$ est résoluble en facteurs rationnels de degrés inférieurs, quelques-uns de ces facteurs étant séparément égalés à un multiple de N,

les congruences qui en résultent peuvent avoir plus de solutions qu'il n'y a d'unités dans le plus haut exposant de l'inconnue x, ce qui ne peut jamais arriver quand N est un nombre premier.

Mais dans le cas où N est un nombre composé, si quelque facteur de $x^n - 1$, égalé à un multiple de N, donne plus de solutions qu'il n'y a d'unités dans l'exposant, la proposée $x^n - 1 \equiv 0$ ne peut néanmoins avoir en tout plus de n racines.

Quand N est égal à un nombre premier p, la congruence $x^n - 1 \equiv 0$ devient $x^{p-1} - 1 \equiv 0$, et si l'on décompose le premier membre $x^{p-1} - 1$ en différents facteurs rationnels, chacun d'eux égalé à un multiple de p, a toujours autant de racines qu'il y a d'unités dans le degré de ce facteur, et n'en a ni plus ni moins. Cela tient à ce que, le nombre p étant premier, un produit ne peut jamais être divisible par p à moins que l'un de ses facteurs ne le soit séparément. Or un facteur $x^{\theta} + \cdots$ du binôme proposé ne peut devenir divisible par p pour plus de θ valeurs de x, comme on l'a démontré. D'un autre côté, il ne peut l'être pour moins de θ valeurs, car il faudrait que l'autre facteur qui est du degré $p - 1 - \theta$ le fût pour plus de $p - 1 - \theta$ valeurs, afin qu'on retrouvât les $p - 1$ racines entières qui satisfont toujours à la proposée ; et on sait que cela est impossible.

Ainsi on a toujours non seulement la congruence $x^{p-1} - 1 \equiv 0$ qui a $p - 1$ racines entières, mais encore les congruences $x \;\; - 1 \equiv 0$ qui en ont nécessairement θ, quand θ est une aliquote de $p - 1$; car, dans ce cas, il est clair que $x^{\theta} - 1$ est un diviseur rationnel de $x^{p-1} - 1$.

440. Théorème de Wilson généralisé.— Le théorème de Wilson est susceptible d'une généralisation analogue à celle du théorème de Fermat.

Formons tous les produits $n-1$ à $n-1$ des n nombres $1, a, b, \ldots, \overline{N-1}$, inférieurs à N et premiers avec N; nous aurons $n - 1$ produits différents, tous premiers avec N, et qui, étant abaissés au-dessous de N par la division, reviennent aux n premiers nombres proposés, $1, a, b, \ldots, \overline{N-1}$, mais dans un nouvel ordre. Car, si les résidus de deux de ces produits

$$1 \,.\, a \,.\, c \,.\, d \ldots \overline{N-1}, \qquad 1 \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots \overline{N-1},$$

étaient les mêmes, on aurait

$$1 \,.\, a \,.\, c \ldots \overline{N-1} - 1 \,.\, b \,.\, c \ldots \overline{N-1} \equiv 0 \pmod{N}$$

ou

$$c \,.\, d \ldots \overline{N-1}\,(a - b) \equiv 0.$$

Or le produit $c \,.\, d \ldots \overline{N-1}$ est premier avec N; donc $b-a$ devrait être divisible par N, ce qui est impossible puisque b et a sont inégaux et plus petits que N. Les résidus sont donc différents, en nombre n et premiers avec N; donc, ils reproduisent dans un nouvel ordre la suite des nombres $1, a, b, \ldots, \overline{N-1}$. Il s'ensuit qu'on a

$$(a \,.\, b \,.\, c \ldots \overline{N-1})^{n-1} \equiv a \,.\, b \,.\, c \ldots \overline{N-1} \pmod{N}$$

ou bien

$$(a \,.\, b \,.\, c \ldots \overline{N-1})^{n} \equiv (a \,.\, b \,.\, c \ldots \overline{N-1})^{2}.$$

Mais par le théorème précédent, le premier membre $(a \,.\, b \,.\, c \ldots \overline{N-1})^{n}$ est congru à l'unité; donc on a

$$(a \,.\, b \,.\, c \ldots \overline{N-1})^{2} - 1 \equiv 0 \pmod{N}.$$

C'est-à-dire que *le carré du produit de tous les nombres inférieurs et premiers à un nombre quelconque* N, *étant diminué de l'unité, laisse un reste divisible par* N.

La congruence précédente peut se mettre sous la forme

$$[a.b.c \ldots \overline{N-1} + 1]\,[a.b.c \ldots \overline{N-1} - 1] \equiv 0$$

et l'on peut démontrer que l'un ou l'autre des deux facteurs qui forment le premier membre est séparément divisible par N. On peut donc diviser tous les nombres N en deux classes, suivant qu'ils satisfont à l'une ou l'autre de ces deux conditions. Si N est un nombre premier p, on a vu que c'est le facteur $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \overline{p-1} + 1$ qui est divisible par p, ce qui constitue le théorème de Wilson.

§ 4. Sur le nombre n qui marque combien il y a de nombres inférieurs à un nombre N et premiers avec N.

441. Nous avons vu que dans les théorèmes ci-dessus n désigne le nombre qui marque combien il y a de nombres inférieurs au module N et premiers avec N. Proposons-nous de calculer ce nombre.

Soit $N = A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} D^{\delta} \ldots$ Je dis qu'on a

$$n = N\left(1 - \frac{1}{A}\right)\left(1 - \frac{1}{B}\right)\left(1 - \frac{1}{C}\right) \cdots$$

Pour le démontrer remarquons d'abord que si de la suite des nombres $1, 2, 3, \ldots, N$, on ôte tous les multiples du facteur A; puis, que des nombres restants on ôte tous les multiples de B, et ainsi de suite, on aura ôté tous les nombres qui peuvent avoir avec N un commun diviseur.

Ainsi les nombres restants, qui ne peuvent contenir aucun des facteurs simples de N, seront nécessairement premiers avec N. Il s'agit donc d'examiner combien il doit rester successivement de ces nombres, à mesure qu'on retranche de la série 1, 2, 3, 4, ..., N, tous les multiples de A ; du reste tous les multiples de B; du nouveau reste les multiples de C, et ainsi de suite.

Pour y parvenir cherchons combien la série 1, 2, 3, 4, ..., N, contient de multiples du produit A . B . C . D d'un nombre quelconque de facteurs simples de N.

Si l'on part de 1, 2, 3, ... c'est quand on arrivera à A.B.C.D, qu'on rencontrera le premier de ces multiples; ensuite on trouvera les nombres $ABCD + 1$, $ABCD + 2$, ... et il est clair que 2ABCD sera le second multiple cherché. En continuant ainsi on verra aisément que sur ABCD nombres de la suite, on rencontre toujours un des multiples de ABCD ; et le nombre N qui termine la série étant lui-même un de ces multiples, on voit que ceux-ci seront en nombre $\frac{N}{ABCD}$.

Imaginons maintenant que l'on ait écrit ces multiples à la suite les uns des autres; nous aurons la série ABCD, 2ABCD, 3ABCD, ..., N.

C'est une progression arithmétique dont la raison est ABCD, et dont les termes sont en nombre $N_1 = \frac{N}{ABCD}$; pour simplifier les explications nous emploierons pour désigner cette suite, le nombre $\frac{N}{ABCD}$, qui exprime combien elle a de termes; de sorte que quand nous dirons la suite $\frac{N}{ABCD}$, nous entendrons désigner la progression écrite plus haut.

Cherchons maintenant combien dans cette suite N_1, il y a de multiples d'un facteur quelconque de N, premier avec ABCD, du facteur K par exemple.

Puisque K est premier avec le produit ABCD, il est clair que KABCD est le premier multiple de K qui se rencontrera dans la suite N_1 ; et qu'à partir de celui-ci on rencontrera successivement les multiples 2KABCD, 3KABCD ... jusqu'à N. D'où il résulte que dans la suite N_1, on trouve à la fin de chaque série de K termes, un multiple de K. Le nombre de ces multiples que contient la suite N_1 est donc $\frac{N_1}{K} = \frac{N}{ABCDK}$; et si on

écrit ces multiples à la suite les uns des autres, ils formeront une nouvelle progression arithmétique, que nous devrons désigner, d'après la convention établie ci-dessus, par $\frac{N}{ABCDK}$.

Supposons maintenant qu'on ait barré dans la suite des nombres naturels jusqu'à N, tous les multiples de A. Les nombres restants seront en nombre

$$N - \frac{N}{A} = N\left(1 - \frac{1}{A}\right).$$

Barrons ensuite les multiples de B qui restent, et pour cela observons que si dans la suite N nous barrions tous les multiples de B, qui sont en nombre $\frac{N}{B}$, il en est qui seraient barrés deux fois; car, tous les multiples de A étant déjà barrés, les multiples de AB seraient barrés pour la seconde fois; et, par conséquent, si l'on prenait $\frac{N}{B}$ pour le nombre des termes supprimés dans la seconde opération, on compterait en trop les multiples de AB, qui sont en nombre $\frac{N}{AB}$; le nombre des termes supprimés réellement à la seconde opération est donc $\frac{N}{B} - \frac{N}{AB}$; les termes restants seront en nombre

$$N - \frac{N}{A} - \frac{N}{B} + \frac{N}{AB} = N\left(1 - \frac{1}{A}\right)\left(1 - \frac{1}{B}\right).$$

Il sera commode, pour les opérations suivantes, de convenir qu'au lieu de barrer les multiples d'un certain facteur, on écrira la suite de ces multiples en les faisant précéder du signe —. Quand on fera la réduction des termes semblables dans le tableau ainsi formé, les termes qu'il fallait barrer seront supprimés. Ainsi, pour supprimer les multiples de A, on formera un tableau composé des deux suites N, et $-\frac{N}{A}$, et après réduction, les termes restants seront en nombre

$$N - \frac{N}{A} = N\left(1 - \frac{1}{A}\right).$$

Quand nous voudrons ensuite supprimer les multiples de B, il faudra les supprimer dans la suite négative $-\frac{N}{A}$ aussi bien que dans la suite

positive N; car la suite négative $-\frac{N}{A}$ ne sert qu'à indiquer la suppression de certains termes de la suite N; de sorte que si on vient à les supprimer dans cette dernière suite par l'introduction d'une nouvelle suite négative, ils devront être rétablis dans la suite $-\frac{N}{A}\cdot$ Or, pour supprimer les multiples de B qui se trouvent dans la suite N, il faut écrire la suite négative $-\frac{N}{B}$; pour rétablir ensuite les multiples de B qui se trouvent dans la suite négative $-\frac{N}{A}$, il suffit de les écrire avec le signe $+$, ce qui donne la série $+\frac{N}{AB}\cdot$ On aura ainsi dans le tableau les quatre suites

$$N, \quad -\frac{N}{A}, \quad -\frac{N}{B}, \quad +\frac{N}{AB};$$

et, chacune d'elles étant désignée ici par le nombre de termes qu'elle contient, le tableau renfermera encore, après la suppression des multiples de A et de B, un nombre de termes égal à

$$N-\frac{N}{A}-\frac{N}{B}+\frac{N}{AB}=N\left(1-\frac{1}{A}\right)\left(1-\frac{1}{B}\right),$$

résultat identique à celui trouvé plus haut.

En continuant de la sorte, on voit aisément qu'après la suppression des multiples d'un nombre quelconque de facteurs de N, on aura un tableau renfermant des suites positives et des suites négatives; et que quand on voudra ensuite supprimer les multiples d'un autre facteur, il faudra les supprimer dans les suites négatives aussi bien que dans les suites positives, en écrivant de nouvelles séries de termes respectivement positifs et négatifs.

D'après cela, pour supprimer les multiples de C, il faudra introduire

$$-\frac{N}{C}, \quad +\frac{N}{AC}, \quad +\frac{N}{BC} \quad \text{et} \quad -\frac{N}{ABC},$$

de sorte qu'on aura le tableau suivant

$$\begin{array}{l} N-\frac{N}{A}+\frac{N}{AB}-\frac{N}{ABC} \\ \quad -\frac{N}{B}+\frac{N}{BC} \\ \quad -\frac{N}{C}+\frac{N}{CA}; \end{array}$$

et, après les réductions de termes semblables, le nombre des termes restants sera

$$N\left(1-\frac{1}{A}\right)\left(1-\frac{1}{B}\right)\left(1-\frac{1}{C}\right).$$

La loi de formation devient maintenant évidente, et on aura

$$n = N\left(1-\frac{1}{A}\right)\left(1-\frac{1}{B}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{K}\right).$$

§ 5. Démonstrations tirées de la considération de l'ordre.

442. *Polygones réguliers, convexes ou étoilés.* — Considérons plusieurs objets, groupés dans un certain ordre, par exemple N points symétriquement placés sur une circonférence et formant les sommets d'un polygone régulier de N côtés.

A partir de l'un d'eux on pourra aller de l'un à l'autre en les prenant successivement de deux en deux, ou de trois en trois, ou en général de h en h. Il est clair qu'on devra retomber ainsi sur un des sommets par lesquels on a déjà passé, et qu'alors on aura un nouveau polygone fermé. Il est clair également que le sommet où le polygone se fermera sera précisément celui qui aura servi de point de départ. En effet, le polygone étant fermé, si on fait le tour du cercle en sens inverse en prenant toujours les points de h en h, on doit repasser par les mêmes points et revenir au point de départ; or, en tournant sur le polygone fermé il est impossible de revenir au point de départ à moins que celui-ci ne soit un sommet.

Quand le polygone sera fermé il arrivera de deux choses l'une. Ou bien on aura passé par tous les sommets, et formé un nouveau polygone de N côtés, polygone régulier étoilé; ou bien l'on n'aura passé que par une partie de ces N sommets.

On va voir que si θ est le plus grand commun diviseur de N et de h, on passe toujours par un nombre $N' = \frac{N}{\theta}$ de points, et qu'on fait un nombre $h' = \frac{h}{\theta}$ de fois le tour de la circonférence.

Pour le prouver, nous démontrerons d'abord deux lemmes préliminaires.

Lemme I. — *Soit $h = \theta h'$. Si on forme un second polygone en joignant les sommets du polygone primitif de θ en θ, et que dans ce second polygone*

on joigne les sommets de h' en h' pour former un troisième polygone, ce dernier sera le même que celui qu'on obtiendrait en joignant les sommets du polygone primitif de h en h.

Car, à chaque côté du troisième polygone, correspondent h' côtés du second; et à chacun de ceux-ci correspondent θ côtés du premier; donc à chaque côté du troisième, correspondent $h'\theta$ ou h côtés du premier polygone.

Lemme II. — *Si on joint de h en h les sommets d'un polygone régulier de* N *côtés, pour former un nouveau polygone, le nombre des sommets de ce dernier ne peut être plus grand que* N; *et s'il est moindre, il y a un commun diviseur entre* N *et h.*

D'abord ce nombre de sommets ne peut surpasser N, puisque autrement on devrait passer au moins deux fois par quelques-uns des sommets du polygone primitif, ce qui est impossible si on s'arrête dès que le polygone est fermé.

Si on suppose maintenant que ce nombre soit N', plus petit que N, il peut arriver que le polygone N' soit un polygone convexe ou que ce soit un polygone étoilé; mais de ce dernier, en joignant les sommets deux à deux dans l'ordre où ils se succèdent sur le cercle, on pourrait dans tous les cas tirer un polygone régulier convexe de N' côtés. Cela posé, il est clair que, les deux polygones N et N' étant réguliers, à chacun des côtés du polygone convexe N', il correspondra un même nombre k de côtés du polygone N ; et on a, par conséquent, $N = N'k$.

Supposons maintenant qu'en joignant de h en h les sommets du polygone N pour former le polygone étoilé N', on fasse t fois le tour de la circonférence. Chaque tour fera rencontrer tous les sommets du polygone N; on rencontrera donc un nombre $Nt = N'kt$ de ces sommets. D'autre part, à chaque côté du polygone N' correspondent h côtés du polygone N; donc en joignant les sommets de celui-ci de h en h pour former le polygone N', on rencontrera N' fois un nombre h de ces sommets soit $N'h$. On aura, par conséquent, $N'kt = N'h$ ou $kt = h$.

Puisqu'on a à la fois $N = N'k$ et $h = tk$, on voit que k est un commun diviseur des nombres N et h.

Théorème. — *Si θ est le plus grand commun diviseur de* N *et de h, et qu'on joigne de h en h les sommets d'un polygone de* N *côtés, le nombre* N' *des sommets par lesquels on passe pour former un nouveau polygone*

fermé est $N' = \frac{N}{\theta}$; *et le nombre de fois qu'on fait le tour de la circonférence est* $h' = \frac{h}{\theta}$.

Car, d'après le lemme I, joindre de h en h les sommets du polygone N, c'est la même chose que joindre de h' en h' ceux du polygone $N' = \frac{N}{\theta}$.

Or, si on joint de h' en h' les sommets du polygone N', on ne peut passer par plus de N' sommets ; et on ne peut non plus en rencontrer un nombre moindre, puisqu'il faudrait pour cela, d'après le lemme II, qu'il y eût un commun diviseur entre N' en h', ce qui est impossible. Le nombre des sommets par lesquels on passe est donc précisément égal à N' ou à $\frac{N}{\theta}$.

On a vu, d'ailleurs, par le lemme précédent, que si t est le nombre de fois qu'on fait le tour de la circonférence, on a $h' = tk$, k étant un commun diviseur de h' et N' ; et puisque h' et N' sont premiers entre eux, on doit avoir $k = 1$, d'où $t = h' = \frac{h}{\theta}$.

Corollaire. — *Si* N *et* h *sont premiers entre eux, on passera par tous les sommets avant de revenir au point de départ.*

Première remarque. — Si h est égal à N, ou à un multiple de N, en prenant les points donnés de h en h, on ne peut obtenir qu'un polygone à un seul sommet, c'est-à-dire qu'on ne peut tomber sur un autre point que le point de départ.

Deuxième remarque. — La démonstration qui précède ne suppose aucune propriété des nombres, ni aucun théorème d'arithmétique. Elle donnerait même au besoin pour la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres, une règle nouvelle qui ne paraît pas moins élégante que celle d'Euclide(*).

Par la même méthode on peut démontrer une foule d'autres théorèmes de la théorie des nombres. Nous en donnerons quelques exemples.

443. Théorème. — *Tout nombre* N *qui divise le produit* AB *et qui est premier avec le facteur* A *divise* B.

(*) Cette remarque est de Poinsot, mais sa démonstration est insuffisante.

Car, soit un polygone de N côtés; en joignant les sommets de B en B, on passera par $\frac{N}{\theta}$ sommets, θ étant le plus grand commun diviseur de N et B.

Joignons ensuite les sommets du polygone N de A en A; nous aurons un nouveau polygone de N côtés, puisque A et N sont premiers entre eux. En prenant dans le nouveau polygone les sommets de B en B, nous formerons donc encore un polygone de $\frac{N}{\theta}$ côtés. Or, en joignant de A en A, puis de B en B, on obtient le même polygone que si on avait joint directement de AB en AB, ce qui aurait donné $\frac{N}{\theta'}$ sommets, θ' étant le plus grand commun diviseur de AB et de N. On a donc $\theta' = \theta$, c'est-à-dire que le plus grand commun diviseur de N et de B est le même que celui de N et de AB. Or celui-ci est N, puisque N divise AB par hypothèse; on a donc $N = \theta' = \theta$, donc N est le plus grand commun diviseur de N et de B, et, par conséquent, N divise B.

444. Théorème. — *Si deux nombres* α *et* β *sont premiers avec* N, *le produit* $\alpha\beta$ *est aussi premier avec* N.

En effet, si on joint de α en α les sommets du polygone N, on passera par tous les sommets, et on formera un nouveau polygone régulier de N côtés, puisque α est premier avec N. Si dans ce nouveau polygone on prend les points de β en β, on aura un troisième polygone de N côtés, puisque β est aussi premier avec N. Or cette double opération revient à prendre tout d'un coup les sommets de $\alpha\beta$ en $\alpha\beta$ dans le polygone primitif; donc, puisque en prenant les sommets de $\alpha\beta$ en $\alpha\beta$ on forme un polygone de N côtés, $\alpha\beta$ est un nombre premier avec N.

445. Théorème d'Euler. — *Si* x *est un nombre premier avec* N, *et que* n *soit le nombre qui marque combien il y a de nombres inférieurs et premiers à* N, *on a la congruence* $x^n - 1 \equiv 0$ (*mod.* N).

Remarquons d'abord que si $1, a, b, c, \ldots, \overline{N-1}$, sont tous les nombres inférieurs et premiers à N, et si on joint d'abord les sommets du polygone N un à un, puis de a en a, de b en b, et ainsi de suite, on formera tous les polygones réguliers possibles de N côtés. Ces polygones sont en nombre n. Il est bien entendu qu'on regarde comme différents deux polygones de même forme, mais dont les côtés sont parcourus en sens inverse. Par exemple, en joignant les sommets consécutifs, on a un polygone dont la

forme est la même que celle du polygone qu'on obtient en joignant ces sommets de $\overline{N-1}$ en $\overline{N-1}$; mais si dans le premier les sommets se succèdent dans l'ordre A, B, C, ..., K, L, dans le second on les rencontrera dans l'ordre L, K, ..., C, B, A. Et, en général, en joignant de $\overline{N-a}$ en $\overline{N-a}$, on aura un *polygone renversé* par rapport à celui qu'on trouve en joignant de a en a.

Cela posé, désignons par x un nombre quelconque inférieur et premier à N. Joignons les sommets du polygone N à partir de l'un quelconque d'entre eux, de x en x, ce qui donnera un second polygone régulier de N côtés. De ce second polygone tirons en un troisième, en y prenant encore les sommets de x en x ; de celui-ci par la même loi un quatrième, et ainsi de suite. On finira par retomber sur le polygone primitif. Car, puisqu'on ne peut obtenir qu'un nombre limité de polygones différents, il est clair qu'on doit finir par retrouver un de ceux qui étaient déjà formés et qu'alors les suivants doivent se succéder périodiquement dans un ordre invariable. Or, si on en considère deux qui soient les mêmes dans deux périodes consécutives, les précédents, d'où ils sont tirés, doivent évidemment être aussi les mêmes. Le polygone qui a servi de point de départ est donc le premier qui se reproduira, puisque en reprenant les opérations en sens inverse, il doit se reproduire avant un quelconque des autres, sans quoi on ne le retrouverait jamais.

Quand on aura formé la série de ces n' polygones différents, ou bien ils constitueront tous ceux qu'on peut obtenir en joignant les sommets par tous les intervalles possibles inférieurs et premiers à N, et alors on aura $n = n'$; ou bien ils n'en formeront qu'une partie, et alors je dis que cette partie sera une aliquote de n, de sorte qu'on aura $n'\theta = n$.

En effet, prenons un des $n - n'$ polygones qui restent après qu'on a formé le groupe de n' polygones différents dont il vient d'être question, et tirons-en, par la même loi que précédemment, n' polygones réguliers ; il est clair d'abord qu'ils seront tous différents entre eux ; et ensuite il est aisé de voir qu'ils seront tous différents des premiers ; car si un seul polygone de ce second groupe pouvait revenir à l'un de ceux qui sont dans le premier, comme on déduit toujours par la même loi, le groupe entier reviendrait au premier groupe, ce qui est impossible, puisqu'on y part d'un polygone qui n'est point dans le premier groupe par hypo-

thèse. On démontrera de même que, s'il reste encore d'autres polygones réguliers, il y en aura n' nouveaux, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus. Et comme il n'y a en tout que n polygones différents, le nombre n' de ceux qu'on assemble en prenant les sommets de x en x, est une partie aliquote de n.

Or, si dans un polygone on prend les sommets de x en x, et que dans le polygone qui en résulte en les prenne encore de x en x, et ainsi de suite, c'est comme si on tirait directement tous les polygones du premier en y prenant successivement les sommet de x en x, puis de x^2 en x^2, de x^3 en x^3, etc., et enfin de $x^{n'}$ en $x^{n'}$.

Mais par hypothèse en prenant les sommets de $x^{n'}$ en $x^{n'}$, on retombe sur le polygone primitif; donc prendre le nombre $x^{n'}$ de sommets, revient à prendre un certain nombre de fois tous les N sommets, plus un, de sorte qu'on a $x^{n'} \equiv 1$ (mod. N).

Et, si on élève les deux membres de cette congruence à la puissance θ, en remarquant que $n'\theta = n$, on a

$$x^n - 1 \equiv 0 \text{ (mod. N).} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

446. Théorème de Wilson généralisé. — *Si* $1, a, b, \ldots \overline{N-1}$, *sont les* n *nombres inférieurs et premiers à un nombre quelconque* N, *l'un ou l'autre des deux nombres* $1 . a . b \ldots \overline{N-1} \pm 1$, *est toujours divisible par* N.

En effet, dans le polygone N prenons les sommets de a en a. Comme a est premier avec N, nous formerons un second polygone régulier de N côtés. Actuellement, dans ce second polygone, il est évident que nous pouvons prendre les sommets de x en x de manière à retomber sur le premier polygone ; mais par ces deux opérations nous aurons pris les sommets de ax en ax. Donc, puisque nous retombons sur le premier polygone, prendre les sommets de ax en ax, revient à les prendre de 1 en 1. Donc si a est premier avec N, il y a toujours un autre nombre x, aussi premier avec N, tel que $ax \equiv 1$ (mod. N). Mais il peut arriver que le nombre x soit le même que a; alors on aurait $a^2 \equiv 1$ (mod. N).

Dans ce cas prenons les points de a en a, comme ci-dessus; mais dans le polygone qui en résulte, au lieu de les prendre encore de a en a pour retomber sur le premier, prenons-les de $N - a$ en $N - a$; nous trouverons le premier polygone renversé et, par conséquent, le produit $a(N - a)$ reviendra à -1 ; c'est-à-dire qu'on aura

$$a(N - a) \equiv -1 \text{ (mod. N).}$$

Donc, tous les nombres $1, a, b, \ldots, \overline{N-1}$ peuvent toujours s'associer deux à deux de manière à donner un produit congru à ± 1 ; leur produit total revient, par conséquent, à ± 1, et on a

$$1 . a . b : \ldots \overline{N-1} \pm 1 \equiv 0 \text{ (mod. N)}.$$

447. *Solutions de l'équation indéterminée du premier degré à deux inconnues.* — De cette même considération de l'ordre on peut tirer une solution en quelque sorte géométrique, de l'équation indéterminée du premier degré à deux inconnues. Cette solution, on va le voir, n'est qu'un corollaire de la congruence établie plus haut $ax \equiv 1$ (mod. N).

La forme générale de l'équation indéterminée dont il s'agit est, comme on sait, $Lx - My = N$, où les coefficients L et M sont premiers entre eux. Il suffit même de résoudre l'équation $Lx - My = 1$, parce que, si l'on en trouve les racines x et y, on n'aura qu'à les multiplier par N pour obtenir les racines Nx et Ny de la proposée.

Première solution. — Soit donc à résoudre l'équation indéterminée $Lx - My = 1$, et supposons qu'on veuille avoir d'abord la valeur de x.

Prenons une suite de points $a, b, c, d, \ldots, w$, en nombre M, coefficient de l'autre inconnue y, et joignons ces points, à partir du premier, de L en L ; comme L est premier avec M, on passe par tous les points avant de retomber sur le point de départ, et on forme ainsi un nouvel ordre, ou nouveau polygone du même nombre M de sommets. Or, si dans ce nouvel ordre on joint les points en allant de l'un à l'autre par l'intervalle λ, qui y sépare a de b, il est clair qu'on retombera sur le premier ordre $a, b, c, \ldots, w$, comme si dans ce premier on avait pris simplement les points de 1 en 1. Donc, puisque la double opération d'aller de L en L, dans le premier ordre, et puis de λ en λ dans le second, revient à marcher tout d'un coup de $L\lambda$ en $L\lambda$, le produit $L\lambda$ revient à l'unité relativement à M ; c'est-à-dire qu'on a $L\lambda \equiv 1$ (mod. M), ou encore $L\lambda = 1 + \mu M$; par conséquent, $x = \lambda$ est la plus petite valeur de x qui satisfasse à la proposée, et $y = \dfrac{L\lambda - 1}{M} = \mu$ est la valeur de y conjuguée avec cette valeur de x.

Au reste, il est clair qu'on pourrait trouver la valeur de y aussi directement que celle de x, en considérant un polygone de L sommets et en les joignant de M en M, ce qui donnerait un nouvel ordre de ces L sommets. Car, dans ce nouvel ordre, si l'on prenait l'intervalle μ qui sépare a, non pas de b qui suivait a dans l'ordre primitif, mais de w qui

l'y précédait, il est clair qu'on retomberait sur le polygone renversé $a, w, \ldots, d, c, b$, comme si l'on avait marché de $L - 1$ en $L - 1$ dans l'ordre primitif; donc on aura $M\mu = -1 + \lambda L$; et, par conséquent, μ sera la plus petite valeur de y qui résoudra l'équation $Lx - My = 1$, avec la valeur $x = \lambda = \frac{M\mu + 1}{L}$.

Les autres solutions sont renfermées dans les formules $x = \lambda + iM$ et $y = \mu + iL$, i étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, mais qu'on doit toujours prendre avec le même signe dans les deux expressions.

Exemple. — Pour éclaircir la règle par une application très simple, soit, par exemple, à résoudre l'équation indéterminée $12x - 7y = 1$.

Prenons sept points dans l'ordre a, b, c, d, e, f, g, et de cet ordre, en y allant de 12 en 12, ou, ce qui revient au même, de 5 en 5, parce que 12 est égal à 5, à un multiple près de 7, tirons l'ordre nouveau a, f, d, b, g, e, c, où l'intervalle qui sépare a de b est 3 ; le plus petit nombre x, qui satisfait à l'équation proposée est donc $x = 3$; et de là on tire par la proposée même la valeur de y. Si l'on avait voulu trouver directement y, on aurait pris une suite de points $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m$, au nombre de 12, coefficient de l'autre inconnue ; et en les joignant de 7 en 7, on aurait trouvé l'ordre nouveau $a, h, c, k, e, m, g, b, i, d, l, f$, où l'on voit que la distance qui sépare a non pas de b, qui le suivait dans l'ordre primitif, mais bien de m, qui le précédait, est égale au nombre 5; d'où il résulte $y = 5$ pour la plus petite valeur de y qui résout l'équation $7y - 12x = -1$, ou en changeant les signes, $12x - 7y = 1$.

La méthode est assez prompte pourvu qu'un des deux coefficients L ou M soit un nombre peu considérable. Car, en se bornant alors à ne chercher par cette voie que l'inconnue affectée du plus grand coefficient, on n'aura besoin de marquer des points qu'en nombre égal au coefficient le plus petit, ce qui fera connaître la première inconnue ; après quoi on pourra tirer l'autre de l'équation proposée. Mais si les coefficients étaient tous deux un peu grands, il faudrait ranger par ordre beaucoup de points, ce qui serait long et fastidieux, ou même impraticable. Toutefois la solution n'en est pas moins curieuse dans la théorie, par les rapprochements qu'on en peut faire avec les solutions purement arithmétiques.

Deuxième solution. — On peut encore déduire du théorème d'Euler une autre solution.

Dans le polygone de M côtés joignons les sommets de L en L, ce qui donne un second polygone de M côtés; dans celui-ci joignons encore de L en L, ce qui donne un troisième polygone de M côtés, et continuons ainsi jusqu'à l'opération $m^{ème}$, qui nous fait retomber sur le polygone primitif. Comme le résultat de ces opérations est le même que si l'on avait marché tout d'un coup de L^m en L^m, il s'ensuit qu'on a

$$L^m = L.L^{m-1} = M\mu + 1$$

d'où la solution $x = L^{m-1}$.

Pour avoir la plus petite valeur de x qui satisfasse à l'équation, il suffira d'abaisser L^{m-1} au-dessous de M par la division.

On voit donc que la plus petite valeur de x peut se trouver en formant le $(m-1)^e$ polygone dérivé, en y prenant deux sommets consécutifs, et en regardant à quelle distance ces deux sommets se trouvent l'un de l'autre dans le polygone primitif. Cette distance sera le nombre cherché x.

Voilà donc, en apparence, une seconde solution géométrique de l'équation indéterminée $Lx - My = 1$; mais il est aisé de voir que cette solution, abrégée comme elle peut l'être, ne diffère point de celle qu'on a donnée plus haut. Car, le polygone primitif pouvant être regardé comme étant le m^e dérivé et, par conséquent, comme étant celui qui vient après le $(m-1)^e$, il est clair que les deux polygones qu'on emploie ici pour avoir x sont deux polygones dérivés consécutifs. Or, puisque tous nos polygones naissent l'un de l'autre par la même loi, on peut employer de même deux autres polygones consécutifs quelconques, tel que le premier et le second, ce qui ramène précisément à la première solution géométrique.

Mais en arithmétique l'expression $x = L^{m-1}$ nous donne cette règle nouvelle pour trouver x : Faites les puissances successives L, L^2, L^3, ... en abaissant à mesure au-dessous de M par la division et continuez ainsi jusqu'à ce que vous trouviez le reste 1; le reste précédent sera la plus petite valeur de x qui résout la proposée.

On trouverait de même directement pour l'expression de l'autre inconnue, $y = -M^{l-1}$, l étant la puissance de M qui donne $M^l \equiv 1 \pmod{L}$.

Exemple. — Reprenons l'équation déjà résolue plus haut $12x - 7y = 1$; on aura

$$M = 7, \quad L = 12 = 5 + 7,$$

et il viendra successivement $L \equiv 5 \pmod{7}$; $L^2 \equiv 5.5 \equiv 4$; $L^3 \equiv 4.5 \equiv 20 \equiv 6$; $L^4 \equiv 6.5 \equiv 30 \equiv 2$; $L^5 \equiv 2.5 \equiv 10 \equiv 3$; $L^6 \equiv 3.5 \equiv 15 \equiv 1$.

Donc $x = L^5$, ou $x = 3$, est la solution.

§ 6. Des congruences binômes.

448. *Congruences binômes rapportées à un module premier p. — Soit une congruence binôme $x^{n-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p), et désignons par r une quelconque de ses racines. Toute puissance de r est aussi une racine de cette congruence.*

Car, si on élève à une puissance quelconque α, les deux membres de la congruence $r^n \equiv 1$ (mod. p), on trouve $(r^\alpha)^n \equiv 1$, ce qui montre que r^α est une racine de la congruence $x^n - 1 \equiv 0$.

449. *Toute racine commune aux deux congruences $x^n - 1 \equiv 0$, $x^m - 1 \equiv 0$ (mod. p) satisfait aussi à la congruence $x^\theta - 1 \equiv 0$, θ étant le plus grand commun diviseur de n et de m.*

Car, soit i le reste de la division de m par n, de manière qu'on ait $m = nq + i$. On aura

$$r^m \equiv r^{nq+i} = (r^n)^q \times r^i \equiv 1.$$

Mais à cause de $r^n \equiv 1$, on a aussi $(r^n)^q \equiv 1$; d'où l'on conclut $r^i \equiv 1$.

Pareillement, des deux congruences $r^n \equiv 1$ et $r^i \equiv 1$, on tirerait $r^{i'} \equiv 1$, i' étant le reste de la division de n par i, et ainsi de suite; d'où il résulte qu'on aurait enfin $r^\theta \equiv 1$, θ étant le plus grand commun diviseur de m et de n.

Cette propriété peut s'exprimer en disant que les racines communes aux congruences $x^m \equiv 1$, $x^n \equiv 1$ (mod. p), sont celles de la congruence $x^\theta \equiv 1$, θ étant le plus grand commun diviseur de m et de n.

Car, on vient de voir que ces racines communes résolvent la dernière congruence ; et, réciproquement, toute racine r de celle-ci satisfait aux deux premières, puisque en élevant à des puissances convenables les deux membres de $x^\theta \equiv 1$ on trouve les deux congruences $r^m \equiv 1$ et $r^n \equiv 1$.

Corollaire I. — Si m et n sont premiers entre eux, les deux congruences n'ont d'autre racine commune que l'unité, puisque $x^\theta - 1 \equiv 0$ devient alors $x - 1 \equiv 0$.

Corollaire II. — Les racines entières de toute congruence binôme

$x^n - 1 \equiv 0$ (mod. p), sont celles de $x^\theta - 1 \equiv 0$, θ étant le plus grand commun diviseur de $p-1$ et de n, et p un nombre premier.

En effet, les racines de la congruence $x^n - 1 \equiv 0$ doivent appartenir aussi à la congruence $x^{p-1} - 1 \equiv 0$, puisque en vertu du théorème de Fermat, cette dernière a pour racines tous les nombres de la suite $1, 2, 3, \ldots, p-1$.

Si n est premier avec $p-1$, la congruence n'a donc d'autre racine que l'unité.

Si entre n et $p-1$ il y a le plus grand commun diviseur θ, plus grand que 1, la congruence $x^n - 1 \equiv 0$ a nécessairement θ racines parmi les nombres $1, 2, 3, \ldots, p-1$; car le binôme $x^\theta - 1$ sera un diviseur rationnel de $x^{p-1} - 1$ et, par conséquent, sera divisible par p pour θ valeurs de x inférieures à p.

Il est donc inutile de considérer d'autres congruences binômes que celles où l'exposant n est un diviseur de $p-1$.

Si, par exemple, on proposait les congruences $x^7 \equiv 1$, $x^{10} \equiv 1$, $x^{15} \equiv 1, \ldots$ (mod. 13), cela reviendrait à proposer $x \equiv 1$, $x^2 \equiv 1$, $x^3 \equiv 1 \ldots$ (mod. 13). Car, ces dernières renferment autant de racines entières qu'il y a d'unités dans leurs degrés respectifs, et ce sont les seules que puissent avoir les congruences données.

450. *Racines primitives des congruences binômes de module premier.* — Considérons les puissances successives $r^1, r^2, r^3, r^4, \ldots, r^n$, de l'une quelconque des racines de la congruence $x^n \equiv 1$ (mod. p).

On a vu que toutes ces puissances sont aussi des racines. Si on les abaisse au-dessous de p par la division, il peut arriver que les résidus soient tous différents, et dès lors, comme ils sont en nombre n, ils donnent toutes les racines de $x^n \equiv 1$. A cause de cette circonstance, on dit que r est *une racine primitive* de la congruence.

Si, au contraire, ces résidus ne sont pas différents, la racine r ne reproduit, par l'élévation aux puissances, qu'une partie des racines de la congruence donnée, et on dit alors qu'elle en est une racine non primitive.

Cela posé, il est facile de prouver que si l'on prend pour r une racine de la congruence $x^n \equiv 1$, qui ne satisfait à aucune congruence binôme de degré moindre que n, c'est une racine primitive, parce qu'en effet, dans ce cas, les résidus des puissances $r, r^2, r^3, \ldots, r^n$, sont tous diffé-

rents, et qu'on a ainsi n racines différentes, c'est-à-dire la série complète des racines de la congruence proposée.

Afin de le montrer, admettons pour un instant que deux de ces résidus soient les mêmes, et qu'on ait, par exemple, $r^e \equiv r^{e'}$ (mod. p), e et e' étant moindres que n, et $e < e'$. On tirerait de là $r^e(r^{e'-e} - 1) \equiv 0$, et comme r^e est premier avec p, on peut supprimer ce facteur, ce qui donne $r^{e'-e} - 1 \equiv 0$ (mod. p).

Or $e' - e$ est plus petit que n; donc r satisferait à une congruence dont le degré $e' - e$ serait moindre que n, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Donc, si r ne satisfait à aucune congruence de degré moindre que n, c'est une racine primitive ; prouvons maintenant que dans le cas contraire ce n'est pas une racine primitive.

Supposons, en effet, que, m étant un exposant moindre que n, on ait $r^m \equiv 1$; on aura aussi, en désignant par θ le plus grand commun diviseur de m et de n, $r^\theta \equiv 1$. Or, si on élève les deux membres de cette dernière congruence aux puissances successives jusqu'à la puissance n', en supposant $n'\theta = n$, on a

$$r^\theta \equiv 1,\ r^{2\theta} \equiv 1,\ r^{3\theta} \equiv 1,\ \ldots,\ r^n \equiv 1,$$

ce qui montre que parmi les puissances de r, jusqu'à la n^e, il y en a plusieurs qui donnent les mêmes résidus, et que, par conséquent, ces puissances en nombre n ne peuvent pas donner les n racines de la congruence proposée.

451. *De l'existence des racines primitives et de leur nombre.* — Il résulte de ce qui précède que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit une racine primitive de la congruence binôme $x^n - 1 \equiv 0$, rapportée à un module premier p, et où n est un diviseur de $p - 1$, est que ce nombre ne satisfasse à aucune congruence de la forme $x^\theta - 1 \equiv 0$, θ étant un diviseur de n. Donc, si on rejette toutes les racines qui satisfont à de telles congruences, celles qui restent sont primitives. Cette remarque nous permettra de prouver que toute congruence binôme de la forme supposée a des racines primitives, et de trouver le nombre de ces racines.

Supposons d'abord que n soit un nombre premier absolu. Toutes les racines autres que l'unité sont alors primitives. Car, le seul diviseur de n étant l'unité, il suffit, pour avoir les racines primitives, de rejeter

celles qui satisfont à la congruence $x^1 - 1 \equiv 0$, et il n'y en a pas d'autres que l'unité.

Donc, si l'exposant n est égal à un nombre premier a, il y a $a - 1$ racines primitives.

Si l'on a $n = a^2$, a étant toujours un nombre premier, l'exposant n n'a pas au-dessous de lui de plus grand diviseur que a et, par conséquent, le binôme $x^{1^2} - 1$ n'a pas au-dessous de lui de diviseur binôme de degré plus élevé que $x^1 - 1$. En rejetant donc de la congruence proposée les a racines de $x^a - 1 \equiv 0$, il en restera $a^2 - a$ qui ne pourront satisfaire à aucune congruence de degré moindre, et qui seront primitives.

Si l'on a $n = a^3$, on trouvera de même qu'en rejetant les a^2 racines de la congruence $x^{a^2} - 1 \equiv 0$, on aura rejeté toutes celles qui peuvent résoudre des congruences binômes de degré inférieur, et que, par suite, il en restera $a^3 - a^2$ qui seront racines primitives de la proposée.

En général, soit $n = a^\alpha$ et par conséquent, $x^{a^\alpha} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, la congruence proposée. Si on rejette les racines de la congruence binôme $x^{a^{\alpha-1}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, on aura rejeté toutes celles qui résolvent, en même temps que la proposée, des congruences de degré inférieur; et dès lors les racines restantes, qui seront au nombre de $a^\alpha - a^{\alpha-1}$, seront toutes des racines primitives.

Ainsi, pour un exposant n, qui est une puissance quelconque α d'un nombre premier a, la congruence $x^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, a toujours des racines primitives, et le nombre en est

$$a^\alpha - a^{\alpha-1} = a^\alpha\left(1 - \frac{1}{a}\right);$$

c'est-à-dire qu'il y en a autant que de nombres inférieurs à n et premiers avec n.

Ce théorème est général pour un nombre quelconque n.

Pour le démontrer, supposons que l'exposant de la congruence binôme $x^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, soit le nombre composé $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, et considérons les congruences

$$x^{a^\alpha} - 1 \equiv 0, \quad x^{b^\beta} - 1 \equiv 0, \quad x^{c^\gamma} - 1 \equiv 0, \quad \ldots \pmod{p}$$

Soit x_1 une racine quelconque de la première, x_2 une racine de la seconde, x_3 une racine de la troisième, etc.; je dis que le produit $x_1 x_2 x_3 \ldots$ sera une racine de la proposée; car des congruences

$$x_1^{a^\alpha} \equiv 1, \quad x_2^{b^\beta} \equiv 1, \quad x_3^{c^\gamma} \equiv 1, \quad \ldots \pmod{p},$$

on tire

$$x_1^{a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots} \equiv 1, \quad x_2^{a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots} \equiv 1, \quad \dots;$$

d'où

$$(x_1 x_2 x_3 \dots)^{a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots} \equiv 1. \quad (\text{mod. } p).$$

Si l'on considère tous les produits qu'il est possible de former en prenant pour facteurs une racine de chacune des congruences ci-dessus, ces produits seront donc tous des racines de la proposée. Prouvons maintenant que deux quelconques de ces produits ne peuvent donner un même résidu; et que, puisqu'ils sont en nombre n, ils constituent le système complet des n racines de la proposée.

Car supposons, s'il est possible, que deux de ces produits soient équivalents; par exemple, qu'on ait

$$x_1 x_2 \dots x_n \equiv x'_1 x'_2 \dots x'_n \ (\text{mod. } p).$$

Dans ces produits deux au moins des facteurs appartenant à la même congruence sont différents par hypothèse; supposons que ce soient x_1 et x'_1; on peut toujours les exprimer au moyen d'une racine primitive r de la congruence $x^{a^\alpha} - 1 \equiv 0$ à laquelle ces nombres appartiennent; dès lors on aura $x_1 \equiv r^p$ et $x'_1 \equiv r^q$, p et q étant moindres que a^α. On pourra donc aussi mettre la congruence admise plus haut sous la forme

$$r^{p-q}(x_2 x_3 \dots x_n) \equiv x'_2 x'_3 \dots x'_n.$$

Élevant les deux membres de cette dernière à la puissance $b^\beta c^\gamma \dots$ et observant que $x_2^{b^\beta c^\gamma \dots} \equiv 1$, $x_3^{b^\beta c^\gamma \dots} \equiv 1$, ..., on trouve

$$r^{(p-q) b^\beta c^\gamma \dots} \equiv 1;$$

mais on a aussi $r^{a^\alpha} \equiv 1$, ce qui conduit à la congruence $r^\theta \equiv 1$, θ étant le plus grand commun diviseur entre a^α et $(p-q)\, b^\beta c^\gamma \dots$; or a est premier avec $b, c, \dots$; donc θ est le plus grand commun diviseur de a^α et de $p-q$; et puisque $p-q$ est moindre que a^α, θ est aussi moindre que a^α. Donc, r satisfaisant à une congruence de degré θ, moindre que a^α, ne serait pas une racine pirmitive de la congruence $x^{a^\alpha} \equiv 1$; ce qui est contraire à l'hypothèse.

On voit déjà par là, que la résolution de la congruence proposée $x^n - 1 \equiv 0$ (mod. p) est ramenée à celle des congruences

$$x^{a^\alpha} \equiv 1, \quad x^{b^\beta} \equiv 1, \quad x^{c^\gamma} \equiv 1, \quad \dots \ (\text{mod. } p).$$

Supposons maintenant que x' soit une racine primitive de la première de ces congruences, x'' une racine primitive de la seconde, x''' une racine

primitive de la troisième, et ainsi de suite; je dis qu'alors le produit $x'x''x''' \dots$ est une racine primitive de la proposée.

Il est aisé de voir qu'en effet ce produit, élevé à une puissance quelconque d, moindre que n, ne peut donner le résidu 1; car, si on avait

$$(x'x''x''' \dots)^d - 1 \equiv 0 \,(\text{mod.}\, p),$$

l'exposant d pourrait se ramener à un diviseur de n, moindre que n. Il y aurait donc au moins un facteur simple de n, tel que a, qui entrerait dans le nombre d avec un exposant moindre que dans n; ainsi d serait diviseur de $a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \dots$; donc puisque $x'x''x''' \dots$, élevé à la puissance d donnerait le résidu 1, ce même produit élevé à la puissance $a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \dots$, qui est un multiple de d, donnerait aussi 1, et on aurait

$$(x'x''x''' \dots)^{a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \dots} \equiv 1.$$

Mais à cause de $x''^{b^\beta} \equiv 1$, $x'''^{c^\gamma} \equiv 1, \dots$ cette congruence se réduit à $x'^{a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \dots} \equiv 1$. Or, par hypothèse, $x'^{a^\alpha} \equiv 1$; donc on aurait aussi, en prenant le plus grand commun diviseur $a^{\alpha-1}$ des exposants de ces congruences, $x'^{a^{\alpha-1}} \equiv 1$.

Donc, x' donnerait le résidu 1 avant la puissance a^α, et partant ne serait pas racine primitive de la congruence $x^{a^\alpha} \equiv 1$, ce qui est contre l'hypothèse.

Donc, le produit $x'x''x''' \dots$ ne peut donner le résidu 1 pour aucune puissance d inférieure à n et, par conséquent, il est racine primitive de la congruence proposée $x^n - 1 \equiv 0$ (mod. p).

Toutes les racines primitives qu'on obtient en formant les produits $x'x''x''' \dots$ sont différentes d'après ce qui a été démontré plus haut; et on verra sans peine qu'il ne peut y en avoir d'autres, parce que si un des facteurs du produit $x'x'' \dots$, le facteur x' par exemple, n'est pas une racine primitive de la congruence à laquelle il appartient, le produit satisfait à une congruence de degré moindre que n. Dans ce cas on a, en effet,

$$x'^{a^{\alpha-1}} \equiv 1, \quad x''^{b^\beta} \equiv 1, \quad x'''^{c^\gamma} \equiv 1, \dots;$$

d'où l'on déduit aisément

$$(x'x''x''' \dots)^{a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \dots} \equiv 1,$$

ce qui montre que $x'x''x''' \dots$ n'est pas une racine primitive de la congruence proposée.

Ainsi toute congruence $x^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ a des racines primitives, et le nombre en est précisément égal à celui des produits différents $x'x''x''' \ldots$ qu'on peut faire en combinant les racines primitives x', x'', x''', ... des congruences respectives $x^{a^\alpha} \equiv 1$, $x^{b^\beta} \equiv 1$, $x^{c^\gamma} \equiv 1$, ...

Or, le nombre des racines primitives x' de la première congruence est $a^{\alpha-1}(a-1)$; les racines primitives x'' de la deuxième sont au nombre de $b^{\beta-1}(b-1)$; les racines primitives x''' de la troisième sont au nombre de $c^{\gamma-1}(c-1)$, etc., donc les racines primitives de la congruence proposée sont au nombre de

$$a^{\alpha-1}.b^{\beta-1}.c^{\gamma-1}\cdots \times (a-1)(b-1)(c-1)\cdots$$

c'est-à-dire qu'il y en a autant que de nombres inférieurs et premiers à n.

Poinsot a démontré directement, d'une manière ingénieuse, que dès qu'on suppose l'existence d'une seule racine primitive de la congruence $x^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, il doit y en avoir autant qu'il y a de nombres inférieurs à n et premiers avec n.

Il désigne par r une racine primitive, et forme la suite des puissances $r, r^2, r^3, \ldots, r^{n-1}, r^n$, ce qui donne la suite complète des n racines différentes de la proposée; or, si l'on considère un nombre quelconque e, inférieur à n et premier avec n, et qu'on prenne les racines dans cette même suite en allant de l'une à l'autre de e en e à partir de r^e, comme l'intervalle e par lequel on saute est premier avec n, on sera obligé de passer par toutes les racines avant de revenir à la racine r^e d'où l'on est parti; donc la suite $r^e, (r^e)^2, (r^e)^3, (r^e)^4, \ldots, (r^e)^n$, nous donne aussi, aux multiples près de p, toutes les différentes racines de la proposée; donc r^e est aussi une racine primitive.

Par conséquent, si l'on suppose une seule racine primitive r de la congruence $x^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, on en trouve immédiatement autant qu'il y a de nombres inférieurs à n et premiers avec n. Et l'on voit en même temps qu'il n'y en a pas davantage; car, si l'on va d'une racine à l'autre par un intervalle constant h qui ait avec n un commun diviseur θ, plus grand que 1, on ne passera jamais que par un nombre $\frac{n}{\theta}$ de ces racines, de sorte que r^h serait une racine primitive de $x^{\frac{n}{\theta}} - 1 \equiv 0$ et, par conséquent, ne serait pas racine primitive de la proposée.

452. Il résulte de cette théorie des racines primitives des nombres premiers, que si on donne un nombre quelconque a, moindre que p, en l'élevant aux puissances $1, 2, 3, \ldots$ il y en aura au moins une avant la p^e qui, divisée par p, donnera le reste 1. Si $p-1$ est la première puissance qui donne l'unité pour reste, a est une racine primitive de p. Si n est cette première puissance, n est un diviseur de $p-1$, et a est racine primitive de la congruence $x^n - 1 \equiv 0$. On dit encore, dans ce cas, que *a appartient à l'exposant n*, et alors les puissances $a, a^2, a^3, \ldots, a^n$, donnent une série de résidus tous différents, formant une période qui se reproduit indéfiniment pour les puissances suivantes ; de sorte que, dans le tableau ci-dessous, toutes les puissances qui se trouvent dans une même colonne donnent le même résidu.

$$\begin{array}{lllll} a & a^2 & a^3 & \ldots & a^n \\ a^{n+1} & a^{n+2} & a^{n+3} & \ldots & a^{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{p-n} & a^{p-n+1} & a^{p-n+2} & \ldots & a^{p-1}. \end{array}$$

453. *Des congruences binômes rapportées à un module composé.* — Les deux propositions suivantes, relatives aux congruences binômes dont le module est un nombre composé, se démontrent de la même manière que dans le cas où le module est un nombre premier.

1° *Si r est une racine de la congruence $x^n - 1 \equiv 0$ (mod. N), où le module N est un nombre composé, r^α en est aussi une racine.*

2° *Soit x une racine commune aux deux congruences $x^m - 1 \equiv 0$, $x^n - 1 \equiv 0$ (mod. N), on a aussi $x^\theta - 1 \equiv 0$ (mod. N), θ étant le plus grand commun diviseur des exposants m et n.*

Une conséquence de cette dernière proposition, c'est que l'on ne doit considérer d'autres congruences binômes que celles où l'exposant de x est un diviseur du nombre n qui indique combien il y a de facteurs inférieurs au module N et premiers avec ce module. Car, en vertu du théorème d'Euler, si n marque combien il y a de nombres inférieurs à N et premiers avec N, tous ces nombres $1, a, b, \ldots, \overline{N-1}$, satisfont à la congruence $x^n - 1 \equiv 0$ (mod. N). Donc, aucun nombre ne peut résoudre une congruence quelconque $x^m - 1 \equiv 0$ (mod. N), s'il ne résout en même temps la congruence $x^\theta - 1 \equiv 0$ (mod. N), θ étant le plus grand commun diviseur de m et de n.

On ramènera donc ainsi la recherche des racines de la congruence

$x^m - 1 \equiv 0$, à celles de la congruence $x^\theta - 1 \equiv 0$, dans laquelle θ est un diviseur du nombre n.

La différence qui existe entre le cas actuel et celui où le module est un nombre premier, consiste en ce que le binôme $x^\theta - 1$ peut avoir plus de racines différentes qu'il n'y a d'unités dans son degré θ.

Considérons les puissances successives $1, r^2, r^3, \ldots, r^m$, de l'une quelconque des racines de la congruence $x^m - 1 \equiv 0 \pmod{N}$; toutes ces puissances sont aussi des racines de la congruence proposée, et on prouve, comme dans le cas où le module est un nombre premier, que deux quelconques de ces racines ne peuvent être les mêmes, à moins que r ne satisfasse à une congruence de degré moindre que m. Toutefois, quand toutes ces puissances sont différentes, on ne peut pas dire pour cela que r soit une racine primitive. Elle reproduit bien m racines différentes, mais on ne peut affirmer qu'elle donne toutes les racines, puisque, quand le module est un nombre composé, une congruence peut avoir plus de racines qu'il n'y a d'unités dans son degré. Par exemple, la congruence $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{12}$ admet la racine 5 qui, par l'élévation aux puissances, donne les deux racines 5 et 1. Cependant 5 n'est pas une racine primitive; car, bien que la congruence proposée ne soit que du second degré, elle admet les quatre racines 1, 5, 7 et 11.

La question des racines primitives devient donc ici plus complexe que quand le module est un nombre premier; et on peut même faire voir que dans beaucoup de cas, les congruences dont le module est un nombre composé n'admettent pas de racines primitives.

Soit en général $N = A^\alpha B^\beta C^\gamma \ldots$ en désignant par A, B, C, ... des nombres premiers. Si n est le nombre qui marque combien il y a de nombres $1, a, b, \ldots, \overline{N-1}$ inférieurs à N, et premiers avec N, on a la congruence $x^n - 1 \equiv 0 \pmod{N}$, qui admet les n racines $1, a, b, \ldots, \overline{N-1}$, et qui n'en a pas davantage.

Mais x étant premier avec N, est aussi premier avec chacun des facteurs A^α, B^β, C^γ, ...; on a donc aussi

$$x^\lambda \equiv 1 \pmod{A^\alpha}, \quad x^\mu \equiv 1 \pmod{B^\beta}, \quad x^\nu \equiv 1 \pmod{C^\gamma}, \quad \ldots;$$

$\lambda, \mu, \nu, \ldots$ étant les nombres qui marquent combien il y a de nombres premiers avec les modules respectifs A^α, B^β, C^γ, ..., et premiers avec ces modules. Or, si m est le plus petit multiple commun des nombres $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ il résulte des congruences précédentes qu'on a aussi

$$x^m \equiv 1 \pmod{A^\alpha}, \quad x^m \equiv 1 \pmod{B^\beta}, \quad x^m \equiv 1 \pmod{C^\gamma}, \quad \ldots;$$

c'est-à-dire que le binôme $x^m - 1$ est divisible à la fois par les facteurs premiers entre eux A^α, B^β, C^γ, ... ; et, par conséquent, par leur produit N ; on a donc pour tout nombre x, premier avec N, $x^m - 1 \equiv 0$ (mod. N).

Mais le plus petit multiple commun des nombres λ, μ, ν, ... est toujours moindre que le produit $\lambda\mu\nu$ ..., si ces nombres ne sont pas premiers entre eux. Or, les nombres

$$\lambda = A^{\alpha-1}(A-1), \quad \mu = B^{\beta-1}(B-1), \quad \nu = C^{\gamma-1}(C-1), \quad \ldots$$

ne sont jamais premiers entre eux, puisqu'ils ont au moins le commun diviseur 2, sauf dans le cas où N serait simplement une puissance A^α d'un nombre premier impair ou le double de cette puissance.

Donc un nombre quelconque x, premier avec N, étant élevé aux puissances 1, 2, 3 ... amènera toujours l'unité pour résidu avant qu'on n'arrive à la puissance n ; donc la congruence d'Euler, $x^n - 1 \equiv 0$ (mod. N), ne peut avoir de racines primitives, à moins que N ne soit une puissance d'un nombre premier impair, ou le double d'une telle puissance.

Si, par exemple, le module $N = 18 = 2.3^2$, on a $n = 6$, et la congruence d'Euler $x^6 - 1 \equiv 0$ (mod. 18), admet des racines primitives.

En effet, les nombres inférieurs à 18 et premiers avec 18 sont 1, 5, 7, 11, 13 et 17. Les diviseurs binômes de $x^6 - 1$ sont $x^2 - 1$ et $x^3 - 1$; le premier admet les racines 1 et 17 ; et le second, les racines 1, 7 et 13 ; les racines restantes 5 et 11, qui n'appartiennent à aucune congruence de degré moindre que la proposée $x^6 - 1 \equiv 0$, en sont des racines primitives, comme il est facile de le vérifier.

De ce qui précède il résulte cette conséquence, que si l'on forme toutes les puissances r^1, r^2, r^3, r^4, ... d'un nombre premier avec N, et qu'on cherche les résidus de ces nombres pour le module N, il arrivera, sauf les cas d'exception que nous avons signalés, qu'une certaine puissance avant la n^e, donnera l'unité pour résidu ; et que, dans les cas d'exception, ce sera la n^e puissance qui donnera le résidu 1, n étant égal à

$$N\left(1-\frac{1}{A}\right)\left(1-\frac{1}{B}\right)\left(1-\frac{1}{C}\right)\cdots;$$

si l'on suppose que la plus faible puissance qui donne 1 soit la m^e, les résidus des puissances r^1, r^2, r^3, ..., r^m, sont tous différents, et forment une période qui se reproduit pour les puissances $r^{m+1}, r^{m+2}, r^{m+3}, \ldots, r^{2m}$,

et ainsi de suite, et le nombre des termes de la période, m, est un diviseur du nombre

$$n = N\left(1-\frac{1}{A}\right)\left(1-\frac{1}{B}\right)\left(1-\frac{1}{C}\right)\cdots$$

454. *Du nombre des chiffres de la période d'une fraction décimale périodique.* — Supposons qu'on veuille réduire en fraction décimale la fraction irréductible $\frac{p}{q}$, et trouver, dans le cas où la fraction engendrée est périodique, quel est le nombre des chiffres de la période ; ce sera un cas particulier de celui que nous allons examiner et où nous supposerons la fraction périodique écrite dans un système de numération à base quelconque.

Appelons B la base du système ; formons les produits p, $p.B$, $p.B^2$, $p.B^3$, ... et divisons-les par q. Supposons que $p.B^\alpha$ soit le premier de ceux dont le résidu est égal à l'un des suivants, et qu'on ait

$$pB^\beta \equiv pB^\alpha \text{ (mod. } q\text{), ou } pB^\alpha(B^{\beta-\alpha}-1) \equiv 0 \text{ (mod. } q\text{).}$$

On sait qu'alors $\beta - \alpha$ sera le nombre des chiffres de la période, et α le nombre des chiffres qui la précèdent (n° 80).

Admettons d'abord que q soit premier avec B ; on aura nécessairement $B^{\beta-\alpha} - 1 \equiv 0$ (mod. q). De plus, si d est la plus petite puissance qui donne $B^d - 1 \equiv 0$, on sait que d doit être un commun diviseur de $\beta - \alpha$ et de n, n étant le nombre des facteurs inférieurs à q et premiers avec q.

Puisque $\beta - \alpha$ est divisible par d, on a donc $\beta - \alpha = > d$.

D'autre part, de la congruence $B^d - 1 \equiv 0$, on déduit $pB^d \equiv p$ (mod. q) ; donc pB^d donne le même résidu que p ; il suit de là qu'il n'y a aucun chiffre avant la période, et que le nombre des chiffres de la période ne peut surpasser d ; c'est-à-dire que $\beta - \alpha < = d$. Puisque l'on a à la fois $\beta - \alpha = > d$ et $\beta - \alpha < = d$, il faut nécessairement que $\beta - \alpha = d$. D'où l'on conclut que *quand le dénominateur* q *est premier avec la base* B *du système de numération, la période commence au premier chiffre après la virgule ; et que le nombre des chiffres de la période est égal au nombre* n *qui indique combien il y a de nombres premiers avec le dénominateur* q *et plus petits que* q *; ou bien au diviseur de* n *auquel appartient la base* B.

Examinons maintenant le cas où q n'est pas premier avec B.

Soient M, N, P, Q, ... tous les facteurs communs de q et de B, de sorte que l'on ait

$$q = M^a N^b P^c \dots \times q', \quad B = M^{a'} N^{b'} P^{c'} \dots \times q'';$$

q', q'', M, N, P, ... étant tous facteurs premiers entre eux.

La congruence

$$p B^\alpha (B^{\beta-\alpha} - 1) \equiv 0 \pmod{q},$$

devient ici

$$p \,.\, M^{\alpha a'} N^{\alpha b'} P^{\alpha c'} \dots \times q''^\alpha (B^{\beta-\alpha} - 1) \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, q = M^a N^b P^c \dots \times q').$$

Elle exprime que le produit

$$p \,.\, M^{\alpha a'} N^{\alpha b'} P^{\alpha c'} \dots \times q''^\alpha (B^{\beta-\alpha} - 1)$$

est divisible par le produit $M^a . N^b . P^c \dots q'$. Or, chacun des facteurs M, N, P, ... est premier avec p et avec q''; chacun d'eux est aussi premier avec $B^{\beta-\alpha} - 1$, parce que M, N, P ... sont des diviseurs de B; donc le produit $M^a N^b P^c \dots$ divisera nécessairement le produit $M^{\alpha a'} N^{\alpha b'} P^{\alpha c'} \dots$, ce qui exige que l'on ait

$$\alpha a' \geqq a, \quad \alpha b' \geqq b, \quad \alpha c' \geqq c, \dots$$

ou encore

$$\alpha \geqq \frac{a}{a'}, \quad \alpha \geqq \frac{b}{b'}, \quad \alpha \geqq \frac{c}{c'}, \dots .$$

Désignons donc par α' le plus grand de ces rapports si c'est un nombre entier, ou, dans le cas contraire, le nombre entier immédiatement supérieur. On voit déjà que α ne peut être moindre que α'.

D'un autre côté, le premier membre de la congruence étant aussi divisible par q', qui est le premier avec p et B, le facteur $B^{\beta-\alpha} - 1$ est divisible par q'. Donc, si d est le diviseur du nombre n auquel appartient la base B pour le module q', d est aussi un diviseur de $\beta - \alpha$, et, par conséquent, $\beta - \alpha$ ne peut être moindre que d; donc $\alpha \geqq \alpha'$, $\beta - \alpha \geqq d$.

D'autre part, α ne peut être plus grand que α', et $\beta - \alpha$ ne peut être plus grand que d.

En effet, on a $B^{\alpha'} (B^d - 1) \equiv 0 \pmod{q}$; car α' étant au moins égal au plus grand des rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, ..., le facteur $B^{\alpha'}$ est divisible par le produit $M^a . N^b . P^c \dots$, et, par hypothèse le facteur $B^d - 1$ est divisible par q'. On a donc aussi $p \,.\, B^{\alpha'+d} \equiv p \,.\, B^{\alpha'} \pmod{q}$. C'est-à-dire que

le produit $p \,.\, B^{\alpha'+d}$ donne le même reste que le produit $p \,.\, B^{\alpha'}$. Le nombre des chiffres non périodiques ne peut donc surpasser α'; et le nombre des chiffres de la période ne peut surpasser d. Par conséquent, $\alpha <= \alpha'$ et $\beta - \alpha <= d$; donc finalement, on a $\alpha = \alpha'$, $\beta - \alpha = d$, et on peut affirmer que :

Si α' est le nombre entier immédiatement supérieur aux rapports $\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}, \ldots$, ou égal au plus grand de ces rapports, le nombre des chiffres non périodiques est α'.

Et si d est le plus petit exposant qui donne $B^d - 1 \equiv 0$ (*mod.* q'), *d est le nombre des chiffres de la période.*

Remarque. — Si la base ne contient des facteurs premiers qu'à la première puissance, le nombre des chiffres qui précèdent la période est égal au plus grand des exposants qui affectent ces facteurs dans le dénominateur de la fraction. Car alors on a

$$a' = b' = \ldots = 1\ ; \quad \text{d'où,} \quad \alpha => a,\ \alpha => b, \ldots.$$

Ce cas comprend celui où la base est $10 = 2.5$; ce qui nous fait retrouver une proposition déjà démontrée en arithmétique.

Exemple. — Soit la fraction $\frac{7}{2^5.3^2.5}$; cherchons combien la fraction périodique qu'elle engendrerait dans le système duodécimal de numération, aurait de chiffres avant la période et de chiffres périodiques.

Nous ferons les calculs dans le système décimal; on a

$$B = 2^2.3\ ; \quad q = 2^5.3^2.5\ ; \quad \text{donc} \quad \frac{a}{a'} = \frac{3}{2}\ ; \ \frac{b}{b'} = 2\ ; \quad \alpha = 2.$$

Il y aura donc deux chiffres non périodiques.

On a, d'autre part, $q' = 5$; et 5 étant un nombre premier, la congruence $12^d - 1 \equiv 0$ (mod. 5), est vérifiée pour $d = 4$; il reste seulement à savoir si 12 est une racine primitive de la congruence $x^4 - 1 \equiv 0$ (mod. 5), ou si ce nombre satisfait à une congruence de degré moindre; ce degré moindre devrait être un diviseur de 4; il ne pourrait donc être autre que 2, et il suffit d'essayer si on a $12^2 \equiv 1$ (mod. 5); or $12 \equiv 2$; donc $12^2 \equiv 4$; donc d ne peut être égal à 2, et on a $d = 4$. La période a, par conséquent, quatre chiffres.

En effectuant les opérations, on trouve en effet, que dans le système à base 12, la fraction ci-dessus peut s'écrire de la manière suivante :

$$0{,}02 \quad 9724 \quad 9724 \quad \ldots$$

Autre exemple. — Soit à trouver combien de chiffres périodiques et de chiffres non périodiques donnerait la fraction $\frac{13}{2^2 \cdot 3 \cdot 5}$, dans le système à base 8; nous ferons encore les calculs dans le système décimal.

Dans cet exemple on a $\frac{a}{a'} = \frac{2}{3}$, $\alpha = 1$. Il n'y a donc qu'un seul chiffre avant la période.

On a aussi

$$q' = 3 \cdot 5 = 15, \quad \text{et} \quad n = 15\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8.$$

Les diviseurs de n sont 1, 2, 4, 8; il reste donc à trouver le plus petit de ces nombres qui, mis à la place de d, résout la congruence $8^d - 1 \equiv 0 \pmod{15}$.

Il est facile de voir que ce nombre sera au plus égal à 4; car le module 15 ne se réduisant pas à une puissance d'un nombre premier impair multipliée par 2, la congruence d'Euler $x^8 - 1 \equiv 0 \pmod{15}$, n'a pas de racines primitives (n° 453).

Or, pour $d = 2$, le nombre 8^d donne le résidu 4; donc, $d = 2$ ne donnant pas le résidu 1, ce sera nécessairement $d = 4$ qui donnera ce résidu, ce dont il est aisé de s'assurer directement. La période a donc quatre chiffres.

En faisant les calculs, on trouve qu'en effet, dans le système à base 8, la fraction $\frac{13}{2^2 \cdot 3 \cdot 5}$ peut s'écrire sous la forme 0,1 5673 5673 5673 ...

Troisième exemple. — Soit encore la fraction $\frac{1}{1260} = \frac{1}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$ écrite dans le système décimal; on a $B = 10 = 2 \cdot 5$; $q' = 3^2 \cdot 7$; $\alpha = 2$. Donc le nombre des chiffres non périodiques est 2, et pour avoir le nombre des chiffres de la période il faut chercher la plus petite valeur de d pour laquelle $10^d - 1 \equiv 0 \pmod{3^2 \cdot 7}$.

Mais on a, par le théorème d'Euler, $10^6 - 1 \equiv 0 \pmod{9}$; et par celui de Fermat, $10^6 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

On s'assurera d'ailleurs aisément que 10 (ou 3) est une racine primitive de cette dernière congruence, et que, par conséquent, $10^d - 1$ ne peut être divisible par 7 pour aucune valeur de d moindre que 6; donc 6 est le nombre des chiffres de la période. On trouve, en effet,

$$\frac{1}{1260} = 0{,}00\ 079365\ 079365\ldots$$

§ 7. Des équations algébriques binômes. — Inscription des polygones réguliers dans le cercle.

455. Les équations binômes jouissent de propriétés remarquables analogues à celles des congruences binômes, et qui se démontrent à peu près de la même manière. La méthode générale pour la résolution de ces équations, que l'on doit à Gauss, repose sur les propriétés des racines primitives des nombres premiers.

Nous nous proposons dans ce qui va suivre de démontrer quelques-unes des propriétés des équations binômes et de donner une idée de la méthode de Gauss pour la résolution de ces équations.

I. — *Si α est une racine de l'équation $x^m - 1 = 0$, toute puissance de α est aussi une racine de cette équation.*

Car, puisque par l'hypothèse $\alpha^m = 1$, on a aussi $(\alpha^m)^k = (\alpha^k)^m = 1$.

C. Q. F. D.

II. — *Toute racine commune aux deux équations $x^m - 1 = 0$, $x^n - 1 = 0$, satisfait aussi à l'équation $x^\theta - 1 = 0$, θ étant le plus grand commun diviseur de m et de n.*

Car, si α est une racine commune, on a $\alpha^m = 1$ et $\alpha^n = 1$; or, en désignant par q le quotient et par r le reste de la division de m par n, on a aussi

$$\alpha^m = \alpha^{nq+r} = (\alpha^n)^q \times \alpha^r = \alpha^r; \quad \text{donc} \quad \alpha^r = 1.$$

On fera voir de même que, r' étant le reste de la division de n par r, on a aussi $\alpha^{r'} = 1$.

En continuant ainsi, on trouvera un certain reste θ, qui sera le plus grand commun diviseur de m et de n, et pour lequel on aura encore $\alpha^\theta = 1$.

Il est aisé de voir que, réciproquement, toute racine de l'équation $x^\theta - 1 = 0$, satisfait aux deux équations

$$x^m - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^n - 1 = 0.$$

Car, θ divisant à la fois m et n, x^m et x^n sont des puissances entières de x^θ; et si on a $x^\theta = 1$, toute puissance de x^θ est aussi égale à 1.

De cette proposition on déduit les deux corollaires suivants :

1° *Si m et n sont deux nombres premiers entre eux, les équations $x^m - 1 = 0$, $x^n - 1 = 0$ n'ont d'autre racine commune que l'unité.*

2° *Si m est un nombre premier, aucune racine de l'équation $x^m - 1 = 0$,*

autre que l'unité, ne peut appartenir à une équation binôme de degré moindre.

456. *Racines primitives.* — Soit r une racine quelconque de l'équation $x^m - 1 = 0$. Si on forme les puissances $r^1, r^2, r^3, \ldots, r^m = 1$, il peut arriver que l'on obtienne m valeurs différentes. Dans ce cas r reproduit, par l'élévation aux puissances, toutes les racines de l'équation proposée ; c'est ce qu'on nomme une *racine primitive* de cette équation.

Elle ne peut évidemment satisfaire à une équation binôme de degré moindre que m; car on voit que si r donnait l'unité pour une puissance inférieure à la m^e, on ne retrouverait qu'une partie des racines de la proposée, lesquelles se reproduiraient dans le même ordre à partir de la puissance égale à l'unité.

Réciproquement, si les m premières puissances de r ne sont pas toutes différentes, cette racine n'est pas primitive, et elle satisfait alors à une équation binôme de degré moindre que m; en effet, si on avait $r^q = r^p$, p étant plus petit que q, et q étant tout au plus égal à m, on aurait aussi $r^{q-p} = 1$, c'est-à-dire que r satisferait à une équation binôme de degré $q - p$, plus petit que m; elle devrait de plus satisfaire à l'équation $r^\theta - 1 = 0$, θ étant le plus grand commun diviseur de $q - p$ et de m.

Donc, si parmi les racines d'une équation binôme de degré m on écarte toutes celles qui appartiennent aux équations binômes dont le degré est un diviseur de m, il ne restera que les racines primitives de la proposée.

Nous pourrions aisément déduire de là combien une équation binôme donnée a de racines primitives, en suivant exactement la même marche que pour les congruences binômes; mais nous ferons usage d'une méthode différente en nous fondant sur la formule

$$x = \cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m},$$

laquelle donne, comme on sait, toutes les racines de l'équation $x^m - 1 = 0$, en remplaçant k successivement par $1, 2, 3, \ldots, m$. Pour abréger, nous poserons dans ce qui va suivre,

$$\varphi(x) = \cos x + \sqrt{-1}\sin x;$$

et nous ferons observer qu'on a

$$\varphi(x) \times \varphi(y) = \varphi(x + y) \quad \text{et} \quad [\varphi(x)]^m = \varphi(mx).$$

Cela étant, nous démontrerons le théorème suivant

457. *Si l'on a $m = p^\lambda q^\mu r^\nu \ldots$, $p, q, r, \ldots$ étant tous les facteurs premiers de m, le nombre des racines primitives de l'équation binôme $x^m - 1 = 0$ est égal à*

$$p^\lambda q^\mu r^\nu \ldots \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\ldots;$$

c'est-à-dire qu'il est égal au nombre n, qui indique combien il y a de nombres premiers avec l'exposant m et plus petits que m.

De plus, la résolution de l'équation proposée se ramène à celle des équations plus simples $x^{p^\lambda} = 1$, $x^{q^\mu} = 1$, $x^{r^\nu} = 1, \ldots$.

Pour démontrer la première partie de cette proposition, considérons la racine $\alpha = \varphi\left(\frac{2k\pi}{m}\right)$, dans laquelle k est un nombre premier avec m.

Si l'on élève α à une puissance quelconque l, on voit immédiatement que $\alpha^l = \varphi\left(\frac{2kl\pi}{m}\right)$ est aussi une racine de l'équation proposée, ce que nous avions déjà démontré plus haut (n° 455, I).

Je dis de plus que, si l'on donne à l successivement toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, m$, on obtiendra m racines différentes, la m^e étant l'unité, ou, en d'autres termes, je dis que α est une racine primitive de l'équation proposée.

Car, supposons pour un instant que l'on puisse avoir $\alpha^l = \alpha^{l'}$, l' étant moindre que l, et l tout au plus égal à m. Il en résulterait

$$\varphi\left(\frac{2kl\pi}{m}\right) = \varphi\left(\frac{2kl'\pi}{m}\right)$$

ou

$$\cos\frac{2kl\pi}{m} = \cos\frac{2kl'\pi}{m}, \quad \text{et} \quad \sin\frac{2kl\pi}{m} = \sin\frac{2kl'\pi}{m};$$

ce qui exige que les arcs $\frac{2kl\pi}{m}$, et $\frac{2kl'\pi}{m}$, ne diffèrent que d'un nombre entier de circonférences, c'est-à-dire que

$$\frac{kl}{m} = \frac{kl'}{m} + e,$$

e désignant un nombre entier. On tire de là $\frac{k(l-l')}{m} = e$.

Or, m est premier avec k et plus grand que $l - l'$; cette relation est

donc impossible ; donc α est une racine primitive de l'équation proposée.

Il y a donc au moins autant de racines primitives qu'il y a de nombres k, inférieurs à m et premiers avec m. D'ailleurs, il ne saurait y en avoir davantage. Car, si k n'était pas premier avec m, en désignant par θ le plus grand commun diviseur de ces nombres, et en posant $k = \theta k'$, $m = \theta m'$, la valeur de α reviendrait à

$$\alpha = \varphi\left(\frac{2k\pi}{m}\right) = \varphi\left(\frac{2k'\pi}{m'}\right),$$

ce qui fait voir que α serait une racine primitive de l'équation $x^{m'} - 1 = 0$ et, par conséquent, ne serait pas racine primitive de la proposée.

Si parmi les puissances de α on considère celles où l'exposant l est un nombre premier avec m, ce seront évidemment les racines primitives de la proposée ; car on a $\alpha^l = \varphi\left(\frac{2kl\pi}{m}\right)$; et le produit kl étant premier avec m, la racine α^l est primitive, d'après ce qu'on vient de démontrer.

Donc, si on prend successivement pour l tous les nombres inférieurs à m et premiers avec m, les valeurs de α^l donneront les n racines primitives de la proposée.

Si m se réduit à un nombre premier impair, toutes les racines autres que l'unité, c'est-à-dire les racines imaginaires de l'équation $x^m = 1$, en sont donc des racines primitives ; si m est un nombre premier pair, c'est-à-dire si l'équation se réduit à $x^2 - 1 = 0$, elle admet la racine primitive -1.

458. Pour établir la deuxième partie du théorème énoncé plus haut, posons $p^\lambda = a$, $q^\mu = b$, $r^\nu = c$, ..., d'où $m = a.b.c. \ldots$.

Les racines primitives de l'équation binôme $x^a - 1 = 0$ seront données par l'expression $x' = \varphi\left(\frac{2k'\pi}{a}\right)$ dans laquelle k' est un nombre inférieur à a et premier avec a.

De même, les racines primitives des équations $x^b - 1 = 0$, $x^c - 1 = 0$, ... seront respectivement

$$x'' = \varphi\left(\frac{2k''\pi}{b}\right), \quad x''' = \varphi\left(\frac{2k'''\pi}{c}\right), \quad \ldots,$$

k'', k''', ... étant des nombres respectivement inférieurs à b, c, ... et premiers avec ces facteurs.

Formons le produit $\alpha = x'x''x''' \ldots$, en prenant une racine primitive de chacune de ces équations, et en multipliant ces racines entre elles; ce produit sera

$$x'x''x''' \cdots = \varphi\left[2\pi\left(\frac{k'}{a}+\frac{k''}{b}+\frac{k'''}{c}+\cdots\right)\right]$$
$$= \varphi\left[2\pi\frac{k'bc\cdots+k''ac\cdots+k'''ab\cdots+\cdots}{m}\right]$$

et je dis que ce sera une racine primitive de la proposée.

Il suffira, pour le faire voir, de montrer que le nombre $k'bc\cdots+k''ac\cdots+\cdots$ est premier avec m. A cet effet, remarquons que m est égal au produit des facteurs premiers entre eux $a, b, c, \ldots$. Or, si l'on considère le facteur a, par exemple, il divise tous les termes de la somme ci-dessus, à partir du second; mais il est premier avec k', parce que x' est, par hypothèse, une racine primitive de l'équation $x^a - 1 = 0$; il est aussi premier avec $b, c, \ldots$; et, par conséquent, avec chaque facteur du premier terme. Donc le numérateur est premier avec a. On prouverait de même qu'il est premier avec $b, c, \ldots$ et, par conséquent, avec m. Donc α est une racine primitive de l'équation $x^m - 1 = 0$.

Il suffit donc, pour pouvoir calculer une racine primitive de l'équation proposée, et par suite toutes ses racines, de connaître une racine primitive de chacune des équations

$$x^a - 1 = 0, \quad x^b - 1 = 0, \quad x^c - 1 = 0, \quad \ldots.$$

Nous allons indiquer maintenant à quoi se ramène la détermination de ces dernières.

459. Considérons l'équation $x^a - 1 = 0$ ou $x^{p^\lambda} - 1 = 0$. Désignons par ρ_1 une racine quelconque de l'équation $x^p - 1 = 0$; par ρ_2 une racine quelconque de l'équation $x^p - \rho_1 = 0$; par ρ_3 une racine quelconque de l'équation $x^p - \rho_2 = 0$; et ainsi de suite, de sorte que ρ_λ soit une racine de l'équation $x^p - \rho_{\lambda-1} = 0$.

Je dis que ρ_λ sera une racine de l'équation proposée. En effet, on a

$$1 = \rho_1^p = (\rho_2^p)^p = \rho_2^{p^2} = (\rho_3^p)^{p^2} = \rho_3^{p^3} = \cdots = \rho_\lambda^{p^\lambda};$$

ce qui prouve que ρ_λ satisfait à l'équation $x^{p^\lambda} - 1 = 0$.

Observons maintenant que ρ_1 a p valeurs différentes. Chaque valeur de ρ_1 donne p valeurs de ρ_2, de sorte que le nombre des valeurs de ρ_2 est égal à $p \times p = p^2$. Deux quelconques de ces valeurs ne peuvent, d'ail-

leurs, être les mêmes; car, d'une part, l'équation $x^p = \rho_1$ ne peut avoir de racines égales; et d'autre part, deux équations telles que $x^p = \rho_1$ et $x^p = \rho'_1$, dans lesquelles ρ_1 est différent de ρ'_1, ne peuvent avoir de racine commune; puisque, si la valeur de x était la même dans ces deux équations, on en conclurait $\rho_1 = \rho'_1$.

Chaque valeur de ρ_2 donne à son tour p valeurs de ρ_3, qui sont aussi toutes différentes, pour les mêmes motifs; de sorte que le nombre des valeurs de ρ_3 est égal à $p^2 \times p = p^3$.

En continuant ainsi on verra que ρ_λ a un nombre de valeurs différentes égal à p^λ, ce qui donne toutes les racines de l'équation proposée $x^{p^\lambda} - 1 = 0$.

Je dis de plus, que ρ_λ est une racine primitive ou non, suivant que ρ_1 est ou n'est pas une racine primitive de l'équation $x^p - 1 = 0$, c'est-à-dire suivant qu'elle est égale à l'unité ou différente de l'unité.

En effet, si ρ_λ n'est pas une racine primitive de l'équation $x^{p^\lambda} - 1 = 0$, elle doit satisfaire à une équation binôme dont le degré est un diviseur de p^λ et, par conséquent, elle doit satisfaire aussi à l'équation $x^{p^{\lambda-1}} - 1 = 0$. On aurait donc $\rho_\lambda^{p^{\lambda-1}} = 1$; mais on a aussi

$$\rho_\lambda^{p^{\lambda-1}} = \rho_{\lambda-1}^{p^{\lambda-2}} = \rho_{\lambda-2}^{p^{\lambda-3}} = \cdots \rho_3^{p^2} = \rho_2^p = \rho_1;$$

il en résulterait donc $\rho_1 = 1$. Par conséquent, si ρ_λ n'est pas une racine primitive de l'équation proposée, on doit avoir $\rho_1 = 1$.

Réciproquement, si $\rho_1 = 1$, on en conclut que $\rho_\lambda^{p^{\lambda-1}} = 1$, c'est-à-dire que ρ_λ n'est pas une racine primitive de la proposée.

Donc les racines primitives de l'équation $x^{p^\lambda} - 1 = 0$ sont les valeurs de ρ_λ qui correspondent à des valeurs de ρ_1 différentes de l'unité. Ces valeur de ρ_λ sont évidemment en nombre $(p-1)p^{\lambda-1}$; c'est-à-dire qu'il y en a autant que de nombres inférieurs et premiers à p^λ, ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu plus haut.

On peut donc énoncer les propositions suivantes :

La résolution de l'équation binôme $x^m = 1$, dont le degré m est un nombre composé quelconque, se ramène à la résolution des équations de même forme, qui ont respectivement pour degrés les nombres premiers, ou les puissances de nombres premiers qui divisent m.

Et la résolution de l'équation binôme $x^m = 1$, dont le degré m est une puissance d'un nombre premier p, se ramène à la détermination d'une racine ρ_1, autre que l'unité, de l'équation $x^p = 1$; d'une racine quelconque ρ_2

de l'équation $x^p = \rho_1$; *puis d'une racine quelconque* ρ_3 *de* $x^p = \rho_2$; *et ainsi de suite.*

460. Sans entrer plus avant dans la théorie de la résolution des équations binômes, nous ferons connaître les énoncés des propositions sur lesquelles est fondée la résolution algébrique de ces équations.

On nomme *équation irréductible,* une équation algébrique dont le premier membre ne peut se décomposer en facteurs qui soient des fonctions rationnelles de l'inconnue et des coefficients de cette équation.

Supposons qu'une équation irréductible admette deux racines tellement liées entre elles que l'une puisse s'exprimer rationnellement au moyen de l'autre; de sorte qu'on ait, par exemple, $x' = \theta x_1$, relation où x' et x_1 sont deux racines de l'équation donnée, et où θx désigne une certaine fonction rationnelle de x.

Désignons, pour abréger, par $\theta^2 x$ la fonction $\theta(\theta x)$, c'est-à-dire le résultat que l'on obtient en effectuant sur θx, la même opération qu'il a fallu effectuer sur x pour obtenir θx; désignons de même $\theta(\theta^2 x)$ par $\theta^3 x$, et ainsi de suite. On démontre que l'équation proposée doit admettre pour racines tous les termes de la série $x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \theta^3 x_1, \ldots$. Cette série renferme un nombre infini de termes, et comme elle ne peut contenir plus de termes différents qu'il n'y a d'unités dans le degré de l'équation, il faut qu'à partir de l'un d'eux, les termes se reproduisent périodiquement dans un même ordre.

On démontre que dans le cas où toutes les racines d'une équation de degré μ sont données par la série dont il vient d'être question, c'est-à-dire quand ces racines sont représentées par $\theta x, \theta^2 x, \theta^3 x, \ldots, \theta^{\mu-1} x, \theta^\mu x = x$, l'équation est résoluble algébriquement.

Or, ce cas est précisément celui de l'équation $\frac{x^m - 1}{x - 1} = 0$, dans laquelle m est un nombre premier.

En effet, on sait d'abord que si x_1 est une racine de cette équation, ses $m - 1$ racines seront exprimées par $x_1, x_1^2, x_1^3, \ldots, x_1^{m-1}$.

D'autre part, si a est une racine primitive du nombre premier m, c'est-à-dire de la congruence $x^{m-1} - 1 \equiv 0$ (mod. m), les $m - 1$ racines de cette congruence (à savoir les nombres $1, 2, 3, \ldots, \overline{m-1}$), sont équivalentes, dans un autre ordre, aux puissances $a, a^2, a^3, \ldots a^{m-1} \equiv 1$; donc les racines de l'équation $\frac{x^m - 1}{x - 1} = 0$, peuvent être représentées

par $x_1^a, x_1^{a^2}, x_1^{a^3}, \ldots, x_1^{a^{m-1}}$; chacune d'elles s'obtient donc en élevant la précédente à la puissance a; et si l'on pose $\theta x = x^a$, on aura

$$\theta x_1 = x_1^a, \quad \theta^2 x_1 = x_1^{a^2}, \quad \theta^3 x_1 = x_1^{a^3}, \quad \ldots \quad \theta^{m-1} x_1 = x_1^{a^{m-1}} = x_1.$$

Les racines de l'équation $\dfrac{x^m - 1}{x - 1} = 0$, où m est un nombre premier absolu, sont donc représentées par la série $\theta x_1, \theta^2 x_1, \theta^3 x_1, \ldots \theta^{m-1} x_1 = x_1$; donc, d'après ce qu'on vient de dire, cette équation est résoluble par radicaux.

On démontre encore que si l'on a $m - 1 = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, les facteurs $a, b, c, \ldots$ étant des nombres premiers, la résolution algébrique de l'équation dépend de α équations du degré a; de β équations du degré b; de γ équations du degré c; etc. Nous indiquerons tout à l'heure une conséquence importante de cette dernière proposition.

461. *De l'inscription des polygones réguliers dans le cercle.* — Pour inscrire un polygone régulier de n côtés dans un cercle de rayon 1, il faut déterminer l'arc $\dfrac{2\pi}{n}$, égal à la n^e partie de la circonférence; la corde de cet arc sera le côté du polygone régulier cherché.

Si l'on connaît l'arc $\dfrac{2k\pi}{n}$, k étant un nombre premier avec n, la corde correspondante sera le côté d'un polygone régulier étoilé de n côtés, puisque en joignant de k en k les sommets du polygone convexe dont il vient d'être question, on forme un polygone étoilé de n côtés.

Si k n'est pas premier avec n, on aura un polygone régulier don le nombre de côtés sera un sous-multiple de n.

Pour trouver l'arc $\dfrac{2k\pi}{n}$, il suffit de connaître son cosinus, qui détermine deux arcs valant ensemble 2π et correspondant à deux polygones dont l'un est, par rapport à l'autre, un polygone renversé; et, pour pouvoir construire cette ligne trigonométrique à l'aide de la règle et du compas, il suffit qu'elle soit exprimée par une fonction algébrique ne renfermant aucun radical d'un degré supérieur au second.

Supposons donc qu'on ait exprimé $\cos \dfrac{2k\pi}{n}$ par des radicaux du second degré. Soit OA $= 1$ (fig. 142), le rayon du cercle; ayant construit la ligne $\cos \dfrac{2k\pi}{n}$, on la portera en OF; on mènera la perpendiculaire FE,

et on joindra AE; ce sera le côté d'un des polygones cherchés; BA sera celui du polygone renversé. Si le cosinus était négatif on le porterait en OG et AD, AC, seraient les côtés des polygones correspondants.

Or, si l'on pose

$$\alpha = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n},$$

α est une des racines de l'équation $x^n - 1 = 0$; d'autre part, si on résout algébriquement cette équation, ses racines sont de la forme $p + q\sqrt{-1}$ et les divers systèmes de valeurs de p et q correspondent à ceux des valeurs que prennent $\cos\frac{2k\pi}{n}$ et $\sin\frac{2k\pi}{n}$, quand on remplace k successivement par $1, 2, 3, \ldots, n$. Si l'équation est résoluble au moyen de radicaux du second degré, les diverses valeurs de p ne dépendent que de radicaux de cette nature, et on pourra les construire à l'aide de la règle et du compas. On connaîtra ainsi les valeurs de $\cos\frac{2k\pi}{n}$, et l'on obtiendra ensuite les polygones correspondants en opérant comme nous l'avons dit plus haut.

Mais nous avons vu n° 460 que si, n étant un nombre premier, l'on a $n - 1 = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, la résolution de l'équation binôme dépend de α équations du degré a; de β équations du degré b; etc. Pour n'avoir à résoudre que des équations du second degré, il faut donc que $n - 1$ ne renferme pas d'autres facteurs premiers que 2; d'où l'on conclut que, pour qu'il soit possible d'inscrire un polygone régulier de n côtés, n étant un nombre premier, il faut que celui-ci soit égal à une puissance de 2, augmentée d'une unité. Il est donc possible d'inscrire, au moyen de la règle et du compas, les polygones réguliers de 3, 5, 17 ... côtés.

Si n n'est pas premier, mais si l'on sait inscrire les polygones de $n', n'', n''', \ldots$ côtés, $n', n'', n''', \ldots$ étant des facteurs premiers entre eux, il est possible aussi d'inscrire le polygone de n côtés, n étant égal au produit $n'.n''.n''' \ldots$

Car, par hypothèse, on peut déterminer les fractions de circonférence $\frac{2\pi}{n'}$ et $\frac{2\pi}{n''}$; et je dis que dès lors il est facile de trouver l'arc $\frac{2\pi}{n'n''}$. Pour le faire voir, il suffit de prouver que l'on peut trouver deux nombres entiers x et y tels que l'excès de x fois l'arc $\frac{2\pi}{n'}$ sur y fois l'arc $\frac{2\pi}{n''}$ soit

égal à l'arc $\frac{2\pi}{n'n''}$; ou, en d'autres termes, qu'il est possible de résoudre en nombres entiers l'équation

$$x.\frac{2\pi}{n'} - y\frac{2\pi}{n''} = \frac{2\pi}{n'n''},$$

laquelle revient à $n''x - n'y = 1$.

Mais cette dernière peut toujours se résoudre en nombres entiers puisque n'' et n' sont deux nombres premiers entre eux.

Donc, on peut inscrire les polygones réguliers dont le nombre des côtés est

$$3 \times 5; \quad 3 \times 17; \quad 5 \times 17; \quad 3 \times 5 \times 17;$$

et ainsi de suite.

Comme on peut aussi, à l'aide de la règle et du compas, diviser un arc quelconque en deux parties égales, il est évident que si l'on sait inscrire le polygone régulier dont le nombre de côtés est n, on saura aussi inscrire celui donc le nombre de côtés est $2^m \times n$.

462. *Application.* — Appliquons ceci à l'inscription du pentagone régulier. L'équation binôme à résoudre dans ce cas est $x^5 - 1 = 0$, ou, après la suppression du facteur $x - 1$,

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

En posant $x + \frac{1}{x} = z$, on obtient la transformée $z^2 + z - 1 = 0$; d'où

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

De là on déduit les valeurs de x

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \mp \frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}.\sqrt{-1}.$$

Comparant cette expression à la formule

$$x = \cos\frac{2k\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{5},$$

on trouve

$$\cos\frac{2k\pi}{5} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4};$$

et dans cette relation il faut donner successivement à k les valeurs 1, 2, 3 et 4. Le premier membre de cette égalité ne prend ainsi que deux valeurs différentes qui correspondent à celles du second membre; car on a dans tous les cas

$$\cos\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right) = \cos\frac{2(n-k)\pi}{n} = \cos\frac{2k\pi}{n}.$$

La valeur de $\cos\frac{2k\pi}{n}$ ne change donc pas quand on remplace k par $n-k$; d'où il résulte que

$$\cos 4\cdot\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5}, \quad \text{et} \quad \cos 3\cdot\frac{2\pi}{5} = \cos 2\cdot\frac{2\pi}{5};$$

on conclut de là (fig. 142),

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 4\cdot\frac{2\pi}{5} = \text{OF} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4};$$

$$\cos 2\cdot\frac{2\pi}{5} = \cos 3\cdot\frac{2\pi}{5} = -\text{OG} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

En construisant ces valeurs de OF et de OG, et menant les perpendiculaires BE et CD par les points F et G ainsi trouvés, on aura en AE et AD les côtés du pentagone régulier convexe et du pentagone régulier étoilé.

463. On peut aussi trouver une équation qui donne immédiatement les longueurs des côtés des polygones réguliers inscrits. En effet, ces côtés sont les cordes des arcs renfermés dans la formule $\frac{2k\pi}{n}$, où il faut donner à k les valeurs entières 1, 2, 3, ..., $(n-1)$. Désignons par u la corde de l'arc $\frac{2k\pi}{n}$ et remarquons que cette corde est moyenne proportionnelle entre le diamètre qui est égal à 2, et le sinus verse de l'arc sous-tendu, qui est égal à

$$\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Nous aurons, par conséquent,

$$u^2 = 2\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n}\right).$$

D'autre part,

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} = \cos\frac{2k\pi}{n} \mp \sqrt{-1}\,\sin\frac{2k\pi}{n},$$

d'où

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\frac{2k\pi}{n} = 2 - u^2.$$

Mais l'équation réciproque

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} \cdots + x^2 + x + 1 = 0$$

se ramène au degré $\mu = \frac{n-1}{2}$ en posant $x + \frac{1}{x} = z$, ce qui donne la transformée

$$z^\mu + Az^{\mu-1} + Bz^{\mu-2} + \ldots = 0.$$

Si dans cette dernière on remplace z par sa valeur $2 - u^2$, on obtiendra une équation en u qui aura pour racines les côtés des divers polygones réguliers de n côtés, et aussi les côtés des polygones réguliers dont le nombre de côtés est un diviseur de n.

En appliquant ceci au pentagone nous aurons pour l'équation en z

$$z^2 + z - 1 = 0,$$

et nous en déduirons pour l'équation en u

$$u^4 - 5u^2 + 5 = 0, \quad \text{d'où} \quad u = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}},$$

ce qui donne les expressions des côtés du pentagone régulier convexe, et du pentagone régulier étoilé.

464. La résolution des équations binômes offre un exemple remarquable du lien qui unit toutes les branches des mathématiques, et montre particulièrement que la théorie des nombres n'est pas, comme on a semblé le croire assez longtemps, isolée en quelque sorte dans ce système. La théorie des nombres, en faisant connaître une méthode pour la résolution algébrique des équations binômes, a fait faire un progrès inattendu et remarquable tout à la fois à l'algèbre et à la géométrie.

On trouve à ce sujet, dans le mémoire cité de Poinsot, une remarque fort intéressante.

Dans la plupart des problèmes que l'on peut avoir à résoudre, le

nombre doit jouer un rôle important, puisque l'on y a toujours plusieurs choses à considérer, et qu'il y a de premières difficultés qui dépendent du nombre de ces choses, de sorte que les premiers principes de la solution doivent être puisés dans la théorie des nombres.

Dans les questions où il n'y a que peu d'éléments à considérer, ces difficultés sont peu sensibles, et on peut les vaincre sans même s'en rendre compte; mais elles deviennent ou paraissent quelquefois insurmontables quand les éléments sont nombreux. C'est ainsi, par exemple, que les anciens connaissaient les moyens d'inscrire dans le cercle un triangle équilatéral et un pentagone régulier, à l'aide de la règle et du compas; mais il ne purent aller au delà. Or, on sait aujourd'hui que la possibilité de diviser la circonférence en un nombre premier de parties égales, dépend de la propriété de ce nombre premier d'être une puissance exacte de 2, augmentée d'une unité, et que, par conséquent, le problème est insoluble pour les polygones de 7, 11, 13, ... côtés. Cet exemple est de nature à montrer le rôle important que doit jouer la théorie des nombres en mathématiques. Les anciens Géomètres ne soupçonnaient même pas où résidait la difficulté du problème de l'inscription des polygones réguliers. Les solutions trouvées par eux pour les nombres 3 et 5 l'ont été sans qu'ils se doutassent du motif qui fait qu'elles sont possibles, et l'inutilité de leurs efforts avait fait croire à l'impossibilité de résoudre la question pour les nombres premiers plus grands que 5.

FIN.

